Kumari Gayatre Boral

Class - VII A Sec - A

1957.

T/6

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ কর্ত্তৃক সপ্তম হইতে দশম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকরূপে অনুমোদিত।
[Vide Notification No. Syl/75/55 Dated 20th October, 1955]

সহজ বীজগণিত

ALGEBRA MADE EASY

MATRICULATION ALGEBRA গ্রন্থের বাঙ্গালা সংস্করণ

[৭ম হইতে ১০ম শ্রেণীর জন্য]

ঢাকা কলেজের ভূতপূর্ব্ব গণিতাধ্যাপক, "এল্‌জেব্‌রা মেড্‌ ইজি",
"মডার্ণ জিওমেট্রি", "ইণ্টারমিডিয়েট এল্‌জেব্‌রা",
"ইণ্টারমিডিয়েট্‌ সলিড্‌ জিওমেট্রি" প্রভৃতি প্রণেতা

অধ্যাপক কালীপদ বসু, এম্‌. এ.

প্রণীত

কে. পি. বসু পাবলিশিং কোং
৪২, কর্ণওয়ালিস ষ্ট্রীট, কলিকাতা ৬

প্রকাশক
শ্রীজয়ন্ত বসু
৪২, কর্ণওয়ালিস ষ্ট্রীট, কলিকাতা ৬

চতুর্ব্বিংশ সংস্করণ

মুদ্রাকর
শ্রীত্রিদিবেশ বসু, বি. এ.
কে. পি. বসু প্রিন্টিং ওয়ার্কস্
১১, মহেন্দ্র গোস্বামী লেন, কলিকাতা ৬

চিত্রশিল্পী—শ্রীমনুজ গুহ

ভূমিকা

সর্ব্বজনবিদিত সহজ "বীজগণিত"কে বঙ্গীয় মাধ্যমিক শিক্ষাপর্ষৎ কর্ত্তৃক ৭ম হইতে ১০ম শ্রেণীর জন্য নির্দ্ধারিত পাঠ্যতালিকা অনুসারে পরিবর্ত্তিত করিতে যাইয়া ইহার পূর্ব্ব সংস্করণের সহিত তিনটি নূতন অধ্যায় সংযুক্ত করিতে হইয়াছে; যথা, "বীজগণিত, আক্ষরিক-প্রতীক সাহায্যে প্রকাশিত পাটীগণিত ভিন্ন আর কিছুই নহে", অর্গল-লেখ (Bar-graph) ও স্তম্ভ-লেখ (Column-graph)। এই তিনটি নূতন অধ্যায়েও অধ্যাপক কালীপদ বসুর চিরাচরিত বৈশিষ্ট্য, অর্থাৎ ভাষার সরলতা ও অঙ্কগুলির মধ্যে **ক্রমপরম্পরায় সরল হইতে জটিল বিষয়ের অবতারণা,** সম্পূর্ণরূপে বজায় রাখা হইয়াছে। পাঠ্যবস্তুর অন্যান্য বিষয়সমূহ যথাপূর্ব্বই রহিয়াছে; কেবলমাত্র শিক্ষাপর্ষৎ এর নির্দ্দেশানুযায়ী উহাদিগকে বিভিন্ন শ্রেণীর উপযোগী করিবার জন্য ভিন্ন ভিন্ন অংশে ভাগ করা হইয়াছে। **প্রশ্নপত্র ইংরাজী ভাষাতে রচিত হয় বলিয়া, এই পুস্তকে, বাংলা ভাষায় রচিত প্রশ্নাবলীর সঙ্গে সঙ্গে উহার ইংরাজী অনুবাদ দেওয়া হইয়াছে।** ইহাতে শিক্ষার্থিগণের ইংরাজী ভাষায় রচিত প্রশ্নপত্রগুলি সহজবোধ্য হইবে।

আশা করা যায় যে, শিক্ষক ও শিক্ষার্থিগণের চির সমাদৃত "সহজ বীজগণিত"এর বর্ত্তমান সংস্করণও পূর্ব্বের ন্যায় সমাদর লাভ করিবে।

২১শে নভেম্বর, ১৯৫৫
কলিকাতা

প্রকাশক

সূচীপত্র

[সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্য]

তৃতীয় অধ্যায়

ধন- ও ঋণ-রাশি এবং উহাদের লৈখিক দৃষ্টান্ত

(Positive and Negative Quantities through Graphical Illustration)

চতুর্থ অধ্যায়

ধন- ও ঋণ-রাশি সমন্বিত সাধারণ চারি নিয়ম ও বন্ধনীর ব্যবহার

(Four Simple Rules involving Positive and Negative Quantities : Use of Brackets)

পঞ্চম অধ্যায়

সরল সূত্রাবলী ও তাহাদের প্রয়োগ

(Simple Formulæ and their Application)

বিষয় পৃষ্ঠা

ষষ্ঠ অধ্যায়

সরল সমীকরণ-বিষয়ক সহজ প্রশ্নাবলীর সমাধান
(Solution of Simple Problems leading to Simple Equations)

সপ্তম অধ্যায়

ছাত্রদের দৈনিক কাজকর্ম্ম ও অভিজ্ঞতা-সম্পর্কিত নির্দ্দিষ্ট মানের বিষয়বস্তু লইয়া অর্গল-লেখ (Bar-graph) অঙ্কন
(Bar-graph from numerical data based on activities and experiences of daily life of pupils)

[অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্য]

অষ্টম অধ্যায়

পূর্ব্বপাঠের পুনরালোচনা (Revision of previous work)

নবম অধ্যায়

জটিল গুণন ও ভাগহার (Harder Multiplication and Division)

বিষয় পৃষ্ঠা

ঊনবিংশ অধ্যায়

জটিল গুণনীয়ক (Harder Factor)

বিংশ অধ্যায়

জটিলতর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. (Harder G. C. M. and L. C. M.)

একবিংশ অধ্যায়

জটিল ভগ্নাংশ (Harder Fractions)

দ্বাবিংশ অধ্যায়

সরল সমীকরণের বিস্তৃত আলোচনা (Fuller treatment of Simple Equations) এবং দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সহজ সহ-সমীকরণ (Easy Simultaneous Equations involving two unknowns)

সহজ বীজগণিতে ব্যবহৃত পরিভাষা

abscissa—ভুজ
absolute—পরম
absolute value—পরমমান
abstract quantity—অনবচ্ছিন্ন বা শুদ্ধ রাশি
addition—যোগ, সঙ্কলন
adfected quadratic—মিশ্র দ্বিঘাত বা দ্বিশক্তি
alternando—একান্তরক্রিয়া
alternative—বিকল্প
ambiguous—দ্ব্যর্থক
arithmetic series—সমান্তর শ্রেণী
ascending order—উদ্ধ্বক্রম
associative law—সংযোগ-নিয়ম
axiom—স্বতঃসিদ্ধ
axis—অক্ষ

bar-graph—অর্গল-লেখ
binomial—দ্বিপদ
biquadratic—চতুর্ঘাত
braces—ধনুর্ব্বন্ধনী
brackets—বন্ধনী

cancellation—অপসারণ
circle—বৃত্ত
coefficient—গুণক, সহগ
column—স্তম্ভ
column-graph—স্তম্ভ-লেখ
commutative law—বিনিময়-নিয়ম
complex—দুরূহ, জটিল
componendo—যোগক্রিয়া
compound—মিশ্র
concrete quantity—অবচ্ছিন্ন বা বদ্ধ রাশি
conditional identities—সাপেক্ষ অভেদাবলী
conjugate surd—বিপরীত করণী
constant (quantity)—ধ্রুবক
continued product—ক্রমিক বা ধারাবাহিক পূরণফল
co-ordinates—ভুজ-কোটি
crotchets—গুরুবন্ধনী
cube—ঘন
cube-root—ঘনমূল
cubic—ত্রিঘাত, ঘন
cyclic order—চক্র-ক্রম

deduction—সিদ্ধান্ত
degree (of an expression)—মান
denominator—হর
dependent (variable)—অধীন
descending order—অধঃক্রম
dimension—মাত্রা
distributive law—বিচ্ছেদ-নিয়ম
dividend—ভাজ্য
dividendo—ভাগক্রিয়া
divisibility—বিভাজ্যতা
divisibility theorem—বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা
divisor—ভাজক

elimination—অপনয়ন
equation—সমীকরণ
equation of condition—সাপেক্ষ সমীকরণ
evolution—মূলাকর্ষণ
expansion—বিস্তৃতি
exponent or index—সূচক
expression—রাশি, রাশিমালা

factor—উৎপাদক, গুণক

factorization—গুণকনির্ণয়, উৎপাদকনির্ণয়
formula (statement)—সূত্র
fraction—ভগ্নাংশ
function—অপেক্ষক

geometric series—গুণোত্তর শ্রেণী
graph—লেখ, চিত্র
graphical—লৈখিক
group—বিভাগ, সঙ্ঘ

harmonic series—বিপরীত শ্রেণী
homogeneous—সমমাত্র
horizontal—অনুভূমিক

identity—অভেদ
imaginary—কল্পিত
independent (variable)—স্বাধীন
index—সূচক
index law—সূচক-নিয়ম
inequality—অসমতা
infinite, infinity—অসীম, অনন্ত
insertion—স্থাপন
integral—অখণ্ড, পূর্ণ
introduction—উপক্রমণিকা
invertendo—বিপরীতক্রিয়া
involution—শক্তি-উন্নয়ন
irrational—অমূলদ

letter—অক্ষর
like—সদৃশ
limit—সীমা, কাষ্ঠা
limiting value—সীমাস্থমান
linear—একঘাত, সরল
literal coefficient—আক্ষরিক সহগ

maximum—বৃহত্তম
measure—মান
minimum—লঘিষ্ঠ

minor—অনুরাশি
minuend—বিয়োজন
monomial—একপদ, সরল
multinomial—বহুপদ
multiplicand—গুণ্য
multiplier—গুণক

natural number—অখণ্ড সংখ্যা
negative—ঋণ, নেগেটিভ
numerator—লব
numerical measure—সাংখ্যমান
numerical quantity—সাংখ্যরাশি

order—ক্রম
ordinate—কোটি
origin—মূলবিন্দু

parentheses—লঘুবন্ধনী
plotting of points—বিন্দু-সংস্থাপন
polynomial—বহুপদ
positive—ধন, পজিটিভ
power—ঘাত
product—গুণফল বা পূরণফল
progression—প্রগতি
property (mathematical)—ধর্ম্ম
proportion—সমানুপাত
proposition—প্রতিজ্ঞা
pure quadratic—অমিশ্র দ্বিঘাত বা দ্বিশক্তি

quadrant—পাদ
quadratic—দ্বিঘাত, দ্বিশক্তি
quantity—রাশি
quotient—ভাগফল
radical sign—মূল-চিহ্ন
ratio—অনুপাত
rational—মূলদ
rationalization—করণী-নিরসন

real—বাস্তব
reciprocal—অন্যোন্যক
reciprocal or recurring expression—বিপরীত রাশিমালা
recurrence—আবৃত্তি
reduction—লঘূকরণ
remainder—অবশিষ্ট
removal—অপসারণ
root—মূল, বীজ
row—সারি, পঙ্‌ক্তি

series—শ্রেণী
side (of equation)—পক্ষ
sign—চিহ্ন
simple—সরল
simplification—সরলীকরণ
simultaneous equation—সহ-সমীকরণ
solution—সমাধান
to solve—সমাধান করা
square—বর্গ
square-root—বর্গমূল
squared paper—বর্গাঙ্কিত কাগজ, ছক কাগজ
stationary—স্থির
subtraction—বিয়োগ
subtrahend—বিয়োজ্য
sum—যোগফল, সমষ্টি
surd—করণী
symbol—প্রতীক
symbols of operation—ক্রিয়াসূচক চিহ্ন
symbols of quantity—সাংখ্য প্রতীক
symbolical expression—সাঙ্কেতিক বাক্য
symmetry—প্রতিসাম্য

term—পদ, রাশি
transformation—রূপান্তরকরণ
transposition—পক্ষান্তরকরণ
trinomial—ত্রিপদ

unit—একক
unknown quantity—অজ্ঞাত রাশি
unlike—অসদৃশ

value—মান
variable—চল
variation—ভেদ
vinculum—রেখাবন্ধনী
vertical—উল্লম্ব

সহজ বীজগণিত

[সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্য]

উপক্রমণিকা

1. **বস্তুর পরিমাণ নির্ণয় ও তাহা সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ** করার পদ্ধতি নিম্নলিখিত দৃষ্টান্তগুলি দ্বারা উত্তমরূপে বুঝান যাইবে :—

(১) একখানা কাপড়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইলে, উহার ভিতর 'হাত'-পরিমিত ক্ষুদ্রতর দৈর্ঘ্য কতবার আছে, তাহাই নির্ণয় করা হয়।

[কনুই হইতে মধ্যমাঙ্গুলির অগ্রভাগ পর্য্যন্ত দূরত্বকে 'হাত' বলে।]

(২) ঢাকা হইতে কলিকাতার দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইলে, উহার ভিতর 'মাইল' (mile) নামক ক্ষুদ্রতর দূরত্ব কতবার আছে, তাহাই নির্ণয় করা হয়।

(৩) কোন অর্থের পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইলে, উহার ভিতর 'টাকা'-নামক মুদ্রাটি কতবার আছে, তাহাই নির্ণয় করা হয়।

(৪) এক বস্তা চাউলের ওজন নির্ণয় করিতে হইলে, উহার ভিতর 'সের'-নামক ওজন কতবার আছে, তাহাই নির্ণয় করা হয়।

উপরিউক্ত দৃষ্টান্তগুলি হইতে পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইতেছে যে, কোন বস্তুর ভিতর তজ্জাতীয় কোন ক্ষুদ্রতর বস্তু **যত সংখ্যক**বার আছে, সেই **সংখ্যা** দ্বারাই সমস্ত বস্তুটির পরিমাণ নির্ণয় করা হইয়া থাকে। উল্লিখিত ক্ষুদ্রতর বস্তুটিকে **একক** (unit), এবং এই **একক** সমস্ত বস্তুর মধ্যে **যত**বার আছে **তত**কে সমস্ত বস্তুটির **সাংখ্যমান** (numerical measure) বা শুধু **মান** (measure) বলে।

অতএব ১ম দৃষ্টান্তে, 'হাত' দৈর্ঘ্যের একক ; ২য় দৃষ্টান্তে, 'মাইল' দূরত্বের একক ; ৩য় দৃষ্টান্তে, 'টাকা' অর্থের একক ; এবং ৪র্থ দৃষ্টান্তে, 'সের' ওজনের একক।

আবার, আমাদের যদি জানা থাকে যে, একখানা কাপড়ের দৈর্ঘ্য ১০ হাত, বা ঢাকা হইতে কলিকাতার দূরত্ব ২৬০ মাইল, বা কোন অর্থের পরিমাণ ৫০০৲ টাকা, বা এক বস্তা চাউলের ওজন ২৫ সের, তাহা হইলে 'হাত'-এককের তুলনায় কাপড়খানির দৈর্ঘ্যের সাংখ্যমান ১০, 'মাইল'-এককের তুলনায় ঢাকা হইতে কলিকাতার দূরত্বের সাংখ্যমান ২৬০, 'টাকা'-এককের তুলনায় অর্থের সাংখ্যমান ৫০০ এবং 'সের'-এককের তুলনায় চাউলের ওজনের সাংখ্যমান ২৫, ইত্যাদিরূপ বুঝিতে হইবে।

যেহেতু কোন বস্তুর ভিতর তজ্জাতীয় 'একক' **যত সংখ্যক**বার আছে, সেই **সংখ্যা** দ্বারা বস্তুটির পরিমাণ প্রকাশ করা হইয়া থাকে, স্থতরাং, পূর্ব্বোক্ত দৃষ্টান্তগুলিতে, কাপড়ের দৈর্ঘ্য ১০ দ্বারা, ঢাকা হইতে কলিকাতার দূরত্ব ২৬০ দ্বারা, অর্থের পরিমাণ ৫০০ দ্বারা এবং ওজনের পরিমাণ ২৫ দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে।

টীকা 1. " 'পাউণ্ড'-এককের তুলনায় কোন অর্থের পরিমাণ ৩০", " 'মাইল'-এককের তুলনায় কোন দূরত্বের পরিমাণ ২৫", ইত্যাদি দ্বারা যথাক্রমে বুঝা যায় যে, এক পাউণ্ডকে একক ধরিলে কোন অর্থের সাংখ্যমান ৩০ (অর্থাৎ, পাউণ্ড-এককটি সমস্ত অর্থের ভিতর ৩০ বার আছে), এক মাইলকে একক ধরিলে কোন দূরত্বের সাংখ্যমান ২৫ (অর্থাৎ, দূরত্বের মধ্যে মাইল-এককটি ২৫ বার আছে), ইত্যাদি।

টীকা 2. লক্ষ্য করিতে হইবে যে, একই বস্তু, তজ্জাতীয় বিভিন্ন এককের তুলনায়, বিভিন্ন সংখ্যাদ্বারা প্রকাশিত হইয়া থাকে ; উদাহরণস্বরূপ, 'এক-ফুট'-এককের তুলনায় ১০ ফুট দৈর্ঘ্য ১০ দ্বারা প্রকাশিত হয় ; কিন্তু 'দুই-ফুট' দৈর্ঘ্যকে এককরূপে লইলে, ঐ ১০ ফুট দৈর্ঘ্যই ৫ দ্বারা প্রকাশিত হইবে।

উদাহরণ 1. দৈর্ঘ্যের একক এক ফুট হইলে, ৫ গজ ২ ফুট দৈর্ঘ্যের সাংখ্যমান কত ?

৫ গজ ২ ফুট অর্থাৎ ১৭ ফুটের মধ্যে দৈর্ঘ্যের একক (অর্থাৎ, এক ফুট) ১৭ বার আছে।

অতএব, ৫ গজ ২ ফুটের সাংখ্যমান = ১৭।

উদাহরণ 2. দেড় মিনিট সময় ৩০ দ্বারা প্রকাশিত হইলে, সময়ের একক কি লওয়া হইল ?

দেড় মিনিট = ৯০ সেকেণ্ড।

দেখা যায় যে, ৯০ সেকেণ্ডের মধ্যে 'সময়ের একক' ৩০ বার আছে ; অর্থাৎ, ৩০টি সময়ের একক, একত্রে ৯০ সেকেণ্ডের সমান।

অতএব, সময়ের একক = ৯০ সেকেণ্ডের $\frac{১}{৩০}$ অংশ, অর্থাৎ ৩ সেকেণ্ড।

প্রশ্নমালা 1

1. ওজনের একক এক সের হইলে, ২ মণ ২০ সেরের মান কত ?
2. '১০ সের'-কে এককরূপে ধরিলে, ২ মণ ২০ সেরের মান কত ?
3. ৩৬০ মাইল দূরত্ব ৩০ দ্বারা প্রকাশিত হইলে, দূরত্বের একক কত ধরা হইল ?
4. পূর্ব্ব প্রশ্নের দূরত্ব ৪৫ দ্বারা প্রকাশিত হইলেই বা দূরত্বের একক কত ?

5. ৪০০৲ টাকা ১৬ দ্বারা প্রকাশিত হইলে, ২২৫৲ টাকার সাংখ্যমান কত হইবে ?

6. ৭ ফুট ৪ ইঞ্চি দূরত্ব ২২ দ্বারা প্রকাশিত হইলে, ৪ ফুট দূরত্বের সাংখ্যমান কত ?

7. ৩ ঘণ্টা ৪৫ মিনিট সময় ৫ দ্বারা প্রকাশিত হইলে, সময়ের একক কত ধরা হইল ?

8. সময়ের একক ১৫ সেকেণ্ড হইলে, ৬০ সংখ্যা দ্বারা প্রকাশিত সময়ের পরিমাণ কত ?

9. ওজনের একক সাড়ে সাত পাউণ্ড হইলে, ২$\frac{১}{৭}$ হন্দর বস্তু কত দ্বারা প্রকাশিত হইবে ?

10. ক্ষেত্রফলের একক ৮ বর্গফুট হইলে, ১৮ বর্গইঞ্চি ক্ষেত্রের মান কত ? ১৮ বর্গগজ ক্ষেত্রের মান কত ?

11. ১২৫ বর্গফুট ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একখানি ক্ষেত্রের পরিমাণ ৮$\frac{১}{৩}$ দ্বারা প্রকাশিত হইলে, ক্ষেত্রফলের এককের তিনগুণ পরিমিত ক্ষেত্র কত বর্গক্ষেত্রের সমান ?

12. অর্থের একক কত ধরিলে, ১০ পা. ২ শি. ৬ পে. ২৭ দ্বারা প্রকাশিত হইতে পারে ?

13. অর্থের একক ৭ শি. ৮ পে. ধরিলে, ৭ পা. ১৩ শি. ৪ পে. এর সাংখ্যমান কত ?

14. অর্থের একক ৫ টা. ১১ আ. ২ পাই হইলে, ৫১ টা. ৪ আ. ৬ পাই এর সাংখ্যমান কত ?

15. ওজনের একক ২৩ সের ৫ ছটাক হইলে, ১৬ মণ ১২$\frac{৩}{৪}$ সেরের সাংখ্যমান কত ?

16. যে এককের তুলনায় ২০৲ টাকা ১০ আনা ৫$\frac{১}{২}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়, তাহার তিনগুণ এককের তুলনায় ৪৫৲ টাকা কত দ্বারা প্রকাশিত হইবে ?

17. '৯ হন্দর ৩ কো.'-কে ২৭৩ দ্বারা প্রকাশ করিলে যে একক লওয়া হয়, উহার এক-অষ্টমাংশ এককের তুলনায় এক 'টন' কত সংখ্যা দ্বারা প্রকাশিত হইবে ?

18. '৩৯ গজ ২ ফুট'-কে ৮৪ দ্বারা প্রকাশ করিলে যে একক লওয়া হয়, উহার ১৭ ভাগের তিনভাগ এককের তুলনায় ৭৫ গজের সাংখ্যমান কত ?

19. '২৬ দিন ১০ ঘণ্টা ২৬ মিনিট' সময়কে ১২০ দ্বারা প্রকাশ করিলে যে একক লওয়া হয়, তাহা অপেক্ষা ৪৭ মিনিট ১৩ সেকেণ্ড কম এককের তুলনায় এক 'লিপ্ ইয়ার' (leap year) এর সাংখ্যমান কত ?

20. পূর্ব্ববর্ত্তী প্রশ্নে প্রথমোক্ত একক হইতে শেষোক্ত একক ৬ ঘ. ৫৪ মি. ৪৭ সে. বেশী হইলেই বা উত্তর কত হইবে ?

2. রাশি (Quantity) : সংখ্যাদ্বারা প্রকাশ করা যায় এরূপ যে কোন বস্তুকেই রাশি বলে।

অতএব, সময়, ওজন, অর্থ, দূরত্ব প্রভৃতির প্রত্যেকটিই এক একটি রাশি ; কারণ ইহাদের প্রত্যেকটিকেই সংখ্যাদ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে। [পূর্ব্ববর্ত্তী উদাহরণগুলি দেখ।]

বীজগণিতে **'রাশি'** শব্দ সচরাচর, খণ্ড বা অখণ্ড, **'সংখ্যা'** অর্থেও ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

[বস্তুর অংশজ্ঞাপক সংখ্যাকে **খণ্ড সংখ্যা**, এবং যে সংখ্যা খণ্ড নয়, তাহাকে **অখণ্ড সংখ্যা** বলে।]

3. 'রাশি' ও 'সংখ্যা' উভয়ই একার্থবোধক ধরিয়া ব্যবহার করা হইলেও উহাদের মধ্যে পার্থক্য দেখাইবার জন্য ওজন, অর্থ, দূরত্ব প্রভৃতি রাশিগুলিকে **অবচ্ছিন্ন** বা **বদ্ধ রাশি** (concrete quantity) এবং (খণ্ড বা অখণ্ড) সংখ্যাগুলিকে **অনবচ্ছিন্ন** বা **শুদ্ধ রাশি** (abstract quantity) বা **সাংখ্য রাশি** (numerical quantity) বলে।

লক্ষ্য করিতে হইবে যে, অবচ্ছিন্ন রাশিসমূহও বীজগণিতের আলোচনার বিষয়ীভূত হইলে, সাধারণতঃ ঐ রাশিগুলির মান-প্রকাশক অনবচ্ছিন্ন সংখ্যা (abstract number) সমূহেরই আলোচনা করা হইয়া থাকে।

টীকা। প্রাচীন হিন্দুগণ পাটীগণিতের ন্যায়, বীজগণিতেরও অনেক মৌলিক গবেষণা ও তাহার উৎকর্ষসাধন করেন। তাঁহাদের ব্যবহৃত অনেক পারিভাষিক শব্দ আধুনিক বীজগণিতেও সর্ব্বদা ব্যবহৃত হইতে দেখা যায়। হিন্দুগণের নিকট হইতে আরবগণ এবং আরবগণের নিকট হইতে ইউরোপীয় পণ্ডিতগণ এই বিষয় শিক্ষা করেন। আরবগণ বীজগণিতের নাম রাখেন 'এল্-জেবের্ওয়াল্-মোকাবালা' [Al-Jebrw′-al-Muquabalah] এবং ইউরোপীয় পণ্ডিতগণ এই বইখানি অনুবাদ করিয়া উহার নাম রাখেন 'এল্-জেবরা' [Algebra]। এই নামেই বীজগণিত বর্ত্তমানে সর্ব্বত্র প্রচলিত।

প্রথম অধ্যায়

পাটীগণিতোক্ত প্রশ্নাবলীর ব্যাপক প্রয়োগের নিমিত্ত বর্ণমালার অক্ষরসমূহকে প্রতীক (symbol)-রূপে ব্যবহার

(The use of letters as symbols to generalise arithmetical problems)

4. পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতও একটি সংখ্যা-বিজ্ঞান। কিন্তু, উভয়ের প্রভেদ এই যে পাটীগণিতে ১, ২, ৩,......, ১/২, ৩/৭,...... (ইংরাজিতে, 1, 2, 3,......, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$,......) প্রভৃতি নির্দ্দিষ্ট মানবিশিষ্ট অঙ্কসমূহের সাহায্যে উহার বিষয়বস্তু আলোচিত হয়; কিন্তু বীজগণিতে উক্ত নির্দ্দিষ্ট মানবিশিষ্ট অঙ্কসমূহ ব্যতীতও বর্ণমালার অক্ষরসমূহকে, অর্থাৎ ক, খ, গ,...... $a, b, c,$...... $\alpha, \beta, \gamma,$...... প্রভৃতিকে **বদ্ধ** (concrete) বা **শুদ্ধ** (abstract) **সংখ্যা**রূপে ব্যবহার করিয়া পাটীগণিতে আলোচিত বিষয়গুলি ব্যাপক ও সাধারণভাবে প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, পাটীগণিতে ব্যবহৃত প্রক্রিয়া-চিহ্নসমূহ, যথা, $+$, $-$, $\times$, $\div$ (signs of operation), অথবা ক্রিয়াসূচক সাঙ্কেতিক-চিহ্নসমূহ, যথা, $\therefore$, $\because$, $>$, $<$, $=$, প্রভৃতি (symbols of operation), পাটীগণিতে যে যে অর্থে ব্যবহৃত হইয়াছে, ঠিক সেই সেই অর্থে বীজগণিতেও ব্যবহার করিতে হইবে।

এই পুস্তকে, ইংরাজি বর্ণমালার অক্ষরসমূহ, যথা, $a, b, c, d,$......, গ্রীক্ বর্ণমালার অক্ষরসমূহ, যথা, $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$......, এবং ইংরাজিতে ব্যবহৃত অঙ্কসমূহ, যথা, 1, 2, 3, 4,... বীজগণিতীয় প্রতীক (algebraical symbols) হিসাবে ব্যবহৃত হইবে।

5. মনে কর, তোমার নিকট 3 খানা বই আছে এবং তোমার ভাইয়ের নিকট 2 খানা বই আছে; তাহা হইলে তোমাদের দুইজনের নিকট মোট **3+2**, অর্থাৎ 5 খানা বই আছে। সুতরাং, তোমার ও তোমার ভাইয়ের মোট বইএর সংখ্যা হইল **3+2**, অর্থাৎ 5.

আবার, রামের নিকট 7 খানা খাতা আছে এবং যদুর নিকট 5 খানা খাতা আছে; তাহা হইলে রাম ও যদুর নিকট মোট **7+5** খানা খাতা আছে।

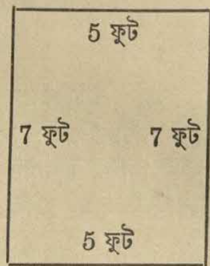
সুতরাং, রাম ও যদুর মোট খাতার সংখ্যা হইল **7+5**, অর্থাৎ **12.**

তদ্রূপ, তোমার নিকট 9 টি টাকা এবং মধুর নিকট a টি টাকা আছে ; তাহা হইলে তোমাদের দুইজনের নিকট মোট $9+a$ টি টাকা আছে।

সুতরাং, তোমাদের দুইজনের মোট টাকার সংখ্যা হইল '$9+a$'.

অতএব, তোমার নিকট m-সংখ্যক পয়সা এবং তোমার ভাইয়ের নিকট n-সংখ্যক পয়সা থাকিলে, তোমাদের দুইজনের নিকট '$m+n$'-সংখ্যক পয়সা থাকিবে।

সুতরাং, তোমাদের দুইজনের মোট পয়সার সংখ্যা হইল '$m+n$' ... (A)



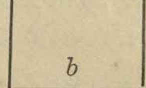
আবার, ধর, কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 7 ফুট এবং প্রস্থ 5 ফুট, তাহা হইলে উহার পরিসীমা, অর্থাৎ বাহুগুলির সমষ্টি (perimeter) হইবে 7 ফুট + 5 ফুট + 7 ফুট + 5 ফুট

অর্থাৎ $(2\times7+2\times5)$ ফুট,

অথবা, $(7+5)$ ফুট + $(7+5)$ ফুট,

অর্থাৎ $2\times(7+5)$ ফুট।

যদি উহার দৈর্ঘ্য 7 ফুট এবং প্রস্থ b-ফুট হইত, তাহা হইলে উহার পরিসীমা হইত $2\times(7+b)$ ফুট।



তদ্রূপ, যে কোন দৈর্ঘ্য মাপিবার এককের তুলনায়, যদি উহার দৈর্ঘ্য l দ্বারা এবং প্রস্থ b দ্বারা সূচিত হইত, তাহা হইলে উহার পরিসীমা (perimeter) হইত $2\times(l+b)$.

যদি এই পরিসীমাটিকে P দ্বারা সূচিত করা যায়, তাহা হইলে অবশ্যই, $P=2\times(l+b)$.

[অথবা $2\times l+2\times b$ রূপেও লেখা যায়।]

অতএব, আমরা সাধারণভাবে বলিতে পারি যে :—

যে আয়তক্ষেত্রের **দৈর্ঘ্য** 'l' এবং **প্রস্থ** 'b',

উহার **পরিসীমা** (perimeter), P, হইবে $\equiv 2\times(l+b)$ ... ... (B)

এইটিকে একটি সাধারণ সূত্র (formula) রূপে ব্যবহার করা যাইতে পারে।

লক্ষ্য করিবে যে A-চিহ্নিত কিংবা B-চিহ্নিত ফল দুইটি দ্বারা কোন নির্দ্দিষ্ট মানের ধারণা হইল না। A-চিহ্নিত ফল দ্বারা দুইটি সংখ্যার যোগফল এবং B-চিহ্নিত ফলটি দ্বারা যে কোন আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সহিত উহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সম্বন্ধ সাধারণভাবে

প্রকাশিত হইল। m ও n, বা l ও b, এর যে কোন নির্দ্দিষ্ট মান দেওয়া থাকিলে, ঐ ফলগুলিও নির্দ্দিষ্ট মানবিশিষ্ট হইবে।

উদাহরণস্বরূপ, A-চিহ্নিত ফলটিতে m এর মান 10 এবং n এর মান 12 হইলে, তোমাদের দুইজনের পয়সার সংখ্যা হইবে $10+12$, অথবা, **22**, অর্থাৎ তোমাদের দুইজনের নিকট মোট 22টি পয়সা থাকিবে।

আবার B-চিহ্নিত ফলটিতে, $l=40'$ এবং $b=20'$ হইলে,
আয়তের পরিসীমা হইবে $\underline{2\times(40'+20')}$, অথবা, $\underline{2\times60'}$, অথবা, **120′**.

পুনরায়, পাটীগণিতে আমরা দেখিয়াছি যে,

$5+3=3+5$; (প্রত্যেকটির ফলই ৪ বলিয়া)।

তদ্রূপ, $7+5=5+7$;

$9+11=11+9$;

তদ্রূপ, $17+x=x+17$;

$p+13=13+p$;

অতএব, সাধারণভাবে, $\boldsymbol{m+n=n+m}$.

আবার, মনে কর, রাম, শ্যাম ও যদুর একত্রে একটি দোকান ছিল। উহার মূলধনে, রাম দিল a-সংখ্যক টাকা, শ্যাম দিল b-সংখ্যক টাকা এবং যদু দিল c-সংখ্যক টাকা। তাহা হইলে তাহাদের মোট মূলধনের পরিমাণ হইল $a+b+c$-সংখ্যক টাকা। এই মোট মূলধন উৎপন্ন হইয়াছে রামের টাকার সংখ্যার সহিত শ্যামের টাকার সংখ্যা যোগ করিয়া উক্ত যোগফলের সহিত আবার যদুর টাকার সংখ্যা যোগ করিয়া; অথবা, শ্যামের টাকার সংখ্যার সহিত যদুর টাকার সংখ্যা যোগ করিয়া উক্ত যোগফলের সহিত রামের টাকার সংখ্যা যোগ করিয়া; বা, রামের টাকার সংখ্যার সহিত যদুর টাকার সংখ্যা যোগ করিয়া ঐ যোগফলের সহিত শ্যামের টাকার সংখ্যা যোগ করিয়া।

অতএব, $\boldsymbol{a+b+c=(a+b)+c}$, বা, $\boldsymbol{a+(b+c)}$, বা, $\boldsymbol{(a+c)+b}$.

6. পুনরায় ধর, তোমার নিকট 15 টাকা আছে এবং উহা হইতে তুমি 10 টাকা খরচ করিলে। তাহা হইলে তোমার নিকট উদ্বৃত্ত থাকিবে $15-10$ টাকা, অর্থাৎ 5 টাকা।

তোমার নিকট 35 টাকা থাকিলে এবং উহা হইতে 23 টাকা খরচ করিলে, তোমার নিকট উদ্বৃত্ত থাকিবে $35-23$ টাকা, অর্থাৎ 12 টাকা।

তোমার নিকট 70 টাকা থাকিলে এবং উহা হইতে r-টাকা খরচ করিলে, তোমার নিকট উদ্বৃত্ত থাকিবে $(70-r)$ টাকা।

তদ্রূপ, তোমার নিকট x-টাকা থাকিলে এবং উহা হইতে y-টাকা খরচ করিলে, তোমার নিকট উদ্বৃত্ত থাকিবে $(x-y)$-টাকা ... ... (C)

[অবশ্য, x এর মান y এর মান অপেক্ষা বড়, কেননা, তাহা না হইলে x-টাকা হইতে y-টাকা খরচ করা যায় না। অর্থাৎ, $x > y$.]

আবার, যেহেতু পাটীগণিতে দেখা যায় যে,

$$17-3-5=(17-3)-5=(17-5)-3=17-(5+3);$$

[প্রত্যেকটির মানই 9 বলিয়া]

$$25-12-6=(25-12)-6=(25-6)-12=25-(12+6);$$

[প্রত্যেকটির মানই 7 বলিয়া]

তদ্রূপ, $37-5-n=(37-5)-n=(37-n)-5=37-(5+n);$

$[37 > 5+n]$

সুতরাং, $a-b-c=(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c)$ ... (D)

$[a > b+c]$

লক্ষ্য করিবে, C-চিহ্নিত ফলটি দ্বারা, তোমার নিকট কত টাকা ছিল এবং উহা হইতে কত খরচ করিয়া কত টাকা উদ্বৃত্ত থাকিল ইহার কোনটিরই কোন নির্দ্দিষ্ট ধারণা হইল না। সাধারণ অথচ ব্যাপকভাবে ঐ ফলটি প্রকাশিত হইল। x ও y এর যে কোন নির্দ্দিষ্ট মান দেওয়া থাকিলে, উদ্বৃত্তের পরিমাণ নির্দ্দিষ্ট হইয়া যাইবে। যথা, $x=100$ এবং $y=80$ হইলে, স্পষ্টতঃ '$x-y$' **এর মান 20 হইবে।**

D-চিহ্নিত ফলটির সম্বন্ধও অনুরূপ; a, b ও c এর কোন নির্দ্দিষ্ট মানের জন্য $a-b-c$ এর মান নির্দ্দিষ্ট হইবে। যথা, $a=50$, $b=20$ এবং $c=10$ হইলে, D-চিহ্নিত ফলটি '20' এই নির্দ্দিষ্ট মানবিশিষ্ট হয়।

কারণ, $50-20-10=(50-20)-10=(50-10)-20=50-(20+10)$, প্রত্যেকটিই 20 এর সমান।

7. পুনরায় মনে কর, একটি বাগানে 25টি সারি এবং প্রত্যেক সারিতে 12টি করিয়া গাছ আছে।

তাহা হইলে, ঐ বাগানে, মোট গাছের সংখ্যা হইল 25×12; অথবা, 12×25;

[∵ প্রত্যেকটি গুণফলই 300]

তদ্রূপ, যদি 30টি সারি থাকিত এবং, প্রত্যেক সারিতে 15টি গাছ হইত, তাহা হইলে মোট গাছের সংখ্যা হইত 30×15; অথবা, 15×30;

[∵ প্রত্যেকটি গুণফলই 450]

যদি, 45টি সারি থাকিত এবং প্রত্যেক সারিতে x টি গাছ থাকিত, তাহা হইলে মোট গাছের সংখ্যা হইত $45 \times x$; অথবা, $x \times 45$.

সুতরাং, যদি **a-সংখ্যক** সারি থাকিত এবং প্রত্যেক সারিতে **b-সংখ্যক** গাছ থাকিত, তাহা হইলে বাগানের মোট গাছের সংখ্যা হইত $a \times b$;

অথবা, $b \times a$ অথবা, ab,* [$a \times b$ কে 'ab' লেখা হয়] ... (E)

এইরূপে, যদি কোন গাছে x-সংখ্যক ডাল থাকে, এবং প্রত্যেক ডালে, y-সংখ্যক ফল থাকে, তাহা হইলে স্পষ্টতঃ, ঐ গাছে

মোট ফলের সংখ্যা হইল $x \times y$. অথবা, xy* ... (F)

[$x \times y$ কে 'xy' লেখা হয়]

তদ্রূপ, যদি কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 5 ও 4 দ্বারা সূচিত হয়, তাহা হইলে উহার কালি [ক্ষেত্রফল (area)] 5×4 (অথবা, 4×5) দ্বারা সূচিত হইবে।

যদি ঐ দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 15 ও 10 দ্বারা সূচিত হইত, তাহা হইলে উহার কালি [ক্ষেত্রফল (area)] 15×10 (অথবা, 10×15) দ্বারা সূচিত হইবে।

যদি ঐ দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 17 ও x দ্বারা সূচিত হইত, তাহা হইলে উহার কালি [ক্ষেত্রফল (area)] $17 \times x$ (অথবা, $x \times 17$) দ্বারা সূচিত হইবে।

সুতরাং, যদি কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য l-দ্বারা এবং প্রস্থ b-দ্বারা সূচিত হয়, তাহা হইলে উহার ক্ষেত্রফল সূচিত হইবে $l \times b$ (অথবা, $b \times l$) দ্বারা।

এই ক্ষেত্রফলটিকে যদি A দ্বারা সূচিত করা যায়, তাহা হইলে স্পষ্টতঃ,

$A = l \times b$ (অথবা, $b \times l$). ... ... (G)

বা, $A = lb$* [$\because$ $l \times b$ কে lb লেখা হয়]

[***টীকা।** কতকগুলি অক্ষর, বা অঙ্ক ও অক্ষর, পাশাপাশি লেখা থাকিলে, উহাদ্বারা ঐ অঙ্ক ও অক্ষরসমূহের গুণফল বুঝায়। অঙ্কগুলির গুণফলকে সর্ব্ববামে এবং অক্ষরগুলিকে উহার ডা'নে বসাইতে হয়।]

আবার, ধর, কোন একটি ঘরের দৈর্ঘ্য l দ্বারা, প্রস্থ b দ্বারা এবং উচ্চতা 'h' দ্বারা সূচিত হইতেছে। তাহা হইলে উহার দেওয়ালগুলির প্রত্যেকটিই এক একটি আয়তক্ষেত্র হওয়ায়, উহাদের প্রত্যেকটির কালি (ক্ষেত্রফল) এবং ঐগুলি যোগ করিয়া দেওয়ালগুলির মোট ক্ষেত্রফল বাহির করা যায়।

বস্তুতঃ, দৈর্ঘ্য-সমন্বিত দুইটি বিপরীত দেওয়ালের মোট ক্ষেত্রফল হইবে $l \times h + l \times h$

[কারণ, উহাদের প্রত্যেকটিরই একটি বাহু l এবং উহার সন্নিহিত একটি বাহু h]

অথবা, $lh + lh$ অথবা, $2lh$.

এবং, প্রস্থ-সমন্বিত দুইটি বিপরীত দেওয়ালের মোট ক্ষেত্রফল হইবে $b \times h + b \times h$

[কারণ, উহাদের প্রত্যেকটিরই একটি বাহু b এবং উহার সন্নিহিত একটি বাহু h]

বা, $bh + bh$, অথবা, $2bh$.

কাজেই, দেওয়ালগুলির মোট ক্ষেত্রফল হইবে $2lh + 2bh$.

অতএব, আমরা সাধারণভাবে বলিতে পারি যে,

কোন ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে l, b এবং h দ্বারা সূচিত হইলে, ঐ ঘরের দেওয়াল চারিটির মোট কালি হইবে $2 \times l \times h + 2 \times b \times h$. ... ($H$)

অথবা, $2lh + 2bh$.

E, F, G এবং H-চিহ্নিত ফলগুলি হইতে আমাদের ঐ ফল সম্পর্কে কোন নির্দ্দিষ্ট ধারণা হইল না। শুধু সাধারণভাবে উহাদিগকে প্রকাশ করা গেল। কিন্তু, E-চিহ্নিত ফলে, a ও b এর মান, F-চিহ্নিত ফলে x ও y এর মান, G-চিহ্নিত ফলে l ও b এর মান এবং H-চিহ্নিত ফলে l, b ও h এর মান নির্দ্দিষ্টরূপে দেওয়া থাকিলে, ঐ ফলগুলিও নির্দ্দিষ্ট মানবিশিষ্ট হইবে। যথা—

E-চিহ্নিত ফলে, a এর মান 17, b এর মান 7 হইলে, ঐ বাগানে মোট গাছের সংখ্যা হইবে 17×7 (অথবা, 7×17) অর্থাৎ, **119** ;

F-চিহ্নিত ফলে, x এর মান 15 এবং y এর মান 10 হইলে, গাছে ফলের সংখ্যা হইবে 15×10 (অথবা, 10×15) অর্থাৎ, **150** ;

G-চিহ্নিত ফলে, l এর মান 25 এবং b এর মান 18 হইলে, আয়তের কালি হইবে 25×18 (অথবা, 18×25) অর্থাৎ, **450** ;

এবং H-চিহ্নিত ফলে, l এর মান 25, b এর মান 10 এবং h এর মান 15 হইলে, দেওয়ালগুলির মোট কালি হইবে $2 \times 25 \times 15 + 2 \times 10 \times 15$;

অর্থাৎ, $750 + 300$, বা **1050**.

আবার, পাটীগণিতে দেখা গিয়াছে যে,

$3 \times (5+7) = 3 \times 5 + 3 \times 7$;

$5 \times (10+11) = 5 \times 10 + 5 \times 11$;

তদ্রূপ, $7 \times (9+m) = 7 \times 9 + 7 \times m$;

অতএব, $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$;

অথবা, $a(b+c) = ab + ac$.

সুতরাং, a, b ও c যে কোন অখণ্ড ধন-সংখ্যা হইলেই, $a(b+c) = ab + ac$ হইবে।

8. পুনরায়, মনে কর যেন তোমার নিকট 22 টি টাকা আছে এবং উহা তুমি পাঁচজনকে এরূপে সমান ভাগ করিয়া দিবে যেন প্রত্যেকেই পূর্ণ-সংখ্যক টাকা পায়।

ঐরূপে ভাগ করিয়া দেখিতে পাইলে যে পাঁচজনের প্রত্যেকেই 4 টাকা করিয়া পাইল এবং তুইটি টাকা অবশিষ্ট থাকিল।

অর্থাৎ, পাঁচজনের প্রত্যেককে 4 টাকা করিয়া দিতে 20 টাকা ব্যয় হইল এবং আরও 2 টি টাকা থাকিয়া গেল।

কাজেই, 22 টাকা $= 5 \times 4$ টাকা $+ 2$ টাকা।

সুতরাং, পাটীগণিতের প্রক্রিয়া অনুসারে, $22 = 5 \times 4 + 2$

(অর্থাৎ, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ)।

তদ্রূপ, 37 কে 9 দ্বারা ভাগ করিলে দেখা যাইবে যে 4 ভাগফল হয় এবং 1 ভাগশেষ থাকে।

কাজেই, $37 = 9 \times 4 + 1$

(অর্থাৎ, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ)।

ইহা হইতে, সাধারণভাবে বলা যায় যে, D যদি ভাজ্য হয়, d যদি ভাজক হয় এবং ভাগ করার পর দেখা যায় যে, q ভাগফল এবং r ভাগশেষ হইয়াছে,

তাহা হইলে, $\boldsymbol{D \equiv d \times q + r}$.

এই ফলটি দ্বারা কোন নির্দ্দিষ্ট ভাগফল সম্পর্কে ধারণা হইল না। বস্তুতঃ ইহা ব্যাপকভাবে ভাজ্য, ভাজক, ভাগফল ও ভাগশেষ-এর ভিতর সাধারণভাবে সম্বন্ধ প্রতিপন্ন করিল।

অবশ্য, $d = 5$, $q = 9$, $r = 4$ হইলে, স্পষ্টতঃ $D = 5 \times 9 + 4 = 49$,

অর্থাৎ, উক্ত সাধারণ সূত্রের মধ্যে D, d, q ও r এর ভিতর যে কোন তিনটি দেওয়া থাকিলে, চতুর্থটিকে এই সূত্র হইতে নির্দ্দিষ্টরূপে পাওয়া যাইবে।

9. আবার, মনে কর, রাম, শ্যাম ও যত্ন একত্রে একটি দোকান খুলিল। উহাতে রাম দিল a-সংখ্যক টাকা, শ্যাম দিল b-সংখ্যক টাকা এবং যত্ন দিল c-সংখ্যক টাকা। তাহা হইলে ঐ কারবারের মোট মূলধন হইল '$a+b+c$'-সংখ্যক টাকা। এই মোট মূলধন, '$a+b+c$' টাকার মধ্যে, রামের টাকা হইল 'a', শ্যামের টাকা হইল 'b' এবং যত্নর টাকা হইল 'c'.

সুতরাং, ঐ দোকানে রামের অংশ হইল $\dfrac{a}{a+b+c}$;

" " শ্যামের " " $\dfrac{b}{a+b+c}$;

এবং " " যত্নর " " $\dfrac{c}{a+b+c}$.

যদি এক বৎসর পরে, তাহাদের বণ্টনীয় লাভ হয় m টাকা, তাহা হইলে ঐ লাভে,

$$\text{রামের অংশ হইবে } \frac{am}{a+b+c} \text{ টাকা ;}$$

$$\text{শ্যামের অংশ হইবে } \frac{bm}{a+b+c} \text{ টাকা ;}$$

$$\text{এবং যদুর অংশ হইবে } \frac{cm}{a+b+c} \text{ টাকা ।}$$

10. এই প্রকারে পাটীগণিতের বিভিন্ন রূপ প্রশ্ন আলোচনা করিয়া দেখান যাইতে পারে যে পাটীগণিতোক্ত ফলগুলি, বীজগণিতে ব্যবহৃত প্রতীক (symbol)-সাহায্যে সাধারণ ও ব্যাপকভাবে প্রকাশ করাই বীজগণিতের বৈশিষ্ট্য ।

লক্ষ্য করিবে যে বীজগণিতের প্রশ্নসমূহে, উহাতে ব্যবহৃত প্রতীক (symbol)-গুলির নির্দ্দিষ্ট মান লইয়া আলোচনা করিলেই, ঐ প্রশ্নটি পাটীগণিতের অনুরূপ প্রশ্নে পরিণত হয় ।

এই বিষয় পরিষ্কার করিয়া বুঝাইবার জন্য নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল ।

উদাহরণ 1. 1917 সালে মধু এবং 1922 সালে রাম জন্মগ্রহণ করিল। রামের বয়স যখন x বৎসর, তখন মধুর বয়স কত ? উহার পাঁচ বৎসর পূর্ব্বেই বা প্রত্যেকের বয়স কত ছিল ?

1922 সাল − 1917 সাল = 5 বৎসর ।

অতএব, মধু, রাম হইতে 5 বৎসরের বড়। কাজেই, রামের বয়স যখন যাহা হইবে, মধুর বয়স তাহা হইতে 5 বৎসর বেশী হইবে ।

সুতরাং, রামের বয়স যখন x বৎসর, মধুর বয়স তখন হইবে $(x+5)$ বৎসর ।

আবার, ইহার 5 বৎসর পূর্ব্বে, রামের বয়স উপরিউক্ত বয়সের পাঁচ বৎসর কম অর্থাৎ, রামের বয়স তখন $x-5$ বৎসর ।

অতএব, মধু রাম হইতে 5 বৎসরের বড় বলিয়া, ঐ সময়, মধুর বয়স ছিল $(x-5)+5$ বৎসর অর্থাৎ x বৎসর ।

টীকা । উপরিউক্ত উদাহরণে, $x=10$ হইলে (অর্থাৎ, রামের বয়স 10 বৎসর হইলে), মধুর বয়স ঐ সময় 10 + 5 অর্থাৎ 15 বৎসর। এবং ঐ সময়ের 5 বৎসর পূর্ব্বে, রামের বয়স 10 − 5 অর্থাৎ 5 বৎসর, এবং মধুর বয়স ছিল 10 বৎসর ।

উদাহরণ 2. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন একটি পাটীগণিতীয় সংখ্যার বামদিকের অঙ্কটি x দ্বারা এবং ডা'নদিকের অঙ্কটি y দ্বারা সূচিত হইলে, সংখ্যাটিকে কিরূপে লিখিবে ?

পাটীগণিতে দেখিয়াছ যে, বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া অঙ্ক দুইটি যথাক্রমে

4 ও 5 হইলে, সংখ্যাটি হয় $10 \times 4 + 5$ (4 দশক 5 একক)

5 ও 7 হইলে, সংখ্যাটি হয় $10 \times 5 + 7$ (5 দশক 7 একক)

8 ও 9 হইলে, সংখ্যাটি হয় $10 \times 8 + 9$ (8 দশক 9 একক)

সুতরাং, x ও y হইলে, সংখ্যাটি হয় $10 \times x + y = \mathbf{10x + y}$.

টীকা। পাটীগণিতে যেরূপ কতকগুলি অঙ্ক পাশাপাশি থাকিলে, সকলের ডা'ন-দিকেরটি ঐ অঙ্কনির্দ্দিষ্ট একক-সংখ্যা, উহার বামেরটি উক্ত অঙ্কনির্দ্দিষ্ট দশক-সংখ্যা, ইহার বামেরটি ঐ অঙ্কনির্দ্দিষ্ট **শতক-সংখ্যা** ইত্যাদিরূপ বুঝায়, বীজগণিতে কতকগুলি অক্ষর পাশাপাশি থাকিলে ঐরূপ বুঝায় না। [পরবর্ত্তী অধ্যায় দেখ]

প্রশ্নমালা 2

1. দুইটি সংখ্যার যোগফল 10 ; উহাদের একটি a হইলে, অপরটি কত ?
2. দুইটি সংখ্যার যোগফল 17 ; উহাদের একটি x হইলে, অপরটি কত ?
3. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল x ; উহাদের একটি 7 হইলে, অপরটি কত ?
4. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল y ; উহাদের একটি b হইলে, অপরটি কত ?
5. দুইটি সংখ্যার গুণফল 22 ; উহাদের একটি a হইলে, অপরটি কত ?
6. দুইটি সংখ্যার গুণফল 100 ; উহাদের একটি x হইলে, অপরটি কত ?
7. দুইটি সংখ্যার ভাগফল 5 ; উহাদের একটি p হইলে, অপরটি কত ?
8. দুইটি সংখ্যার ভাগফল 15 ; উহাদের একটি q হইলে, অপরটি কত ?
9. একটি লোক ঘণ্টায় a মাইল হিসাবে ভ্রমণ করিলে, b ঘণ্টায় সে কত মাইল যাইবে ?
10. একটি লোক ঘণ্টায় y মাইল হিসাবে গেলে z মাইল পথ সে কত ঘণ্টায় যাইবে ?
11. এক ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স a বৎসর হইলে, 15 বৎসর পূর্ব্বে তাহার কত বয়স ছিল ? 30 বৎসর পরেই বা তাহার কত বয়স হইবে ?
12. 20 বৎসর পূর্ব্বে এক ব্যক্তির বয়স $x - 5$ বৎসর হইলে, 15 বৎসর পরে তাহার কত বয়স হইবে ?
13. কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য a গজ এবং প্রস্থ b গজ হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত ?
14. কোন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল x বর্গফুট এবং উহার দৈর্ঘ্য y ফুট হইলে, উহার প্রস্থ কত হইবে ?

15. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার ডা'নদিকের অঙ্কটি 7 এবং উহার বামের অঙ্কটি 'b' হইলে, সংখ্যাটিকে কিরূপে লিখিবে ?

16. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার বামদিকেরটি 8 এবং ডা'নদিকেরটি a হইলে, সংখ্যাটিকে কিরূপে লিখিবে ?

17. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার সকলের বামদিকেরটি a, মধ্যমটি b এবং সকলের ডা'নদিকেরটি c হইলে, সংখ্যাটিকে কিরূপে লিখিবে ?

18. পূর্ব্বপ্রশ্নের অঙ্কগুলিকে বিপরীতক্রমে লইলে, যে সংখ্যাটি হয় তাহাকেই বা কিরূপে লিখিবে ?

19. চারি ব্যক্তির প্রত্যেকে 1000 টাকা করিয়া দিয়া একটি দোকান খুলিল। এক বৎসরে তাহাদের মোট লাভের পরিমাণ x টাকা হইলে, প্রত্যেকে কত পরিমাণ লাভের অংশ পাইবে ?

20. তিন ব্যক্তি যথাক্রমে 500 টাকা, 700 টাকা এবং x টাকা দিয়া একটি যৌথ কারবার আরম্ভ করিল এবং এক বৎসরের পর y টাকা লাভ করিল। প্রত্যেকের লাভের অংশ নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

ধনরাশি সংবলিত সাধারণ চারি নিয়ম (The Four Simple Rules involving Positive Quantities)

11. পূর্ব্বেই বলা হইয়াছে যে পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতও একটি সংখ্যা-বিজ্ঞান; কাজেই পাটীগণিতে ব্যবহৃত প্রক্রিয়াসূচক চিহ্নগুলি (signs of operation) অথবা ক্রিয়াসূচক সাঙ্কেতিক চিহ্নসমূহ (symbols of operation), পাটীগণিতে যেরূপে ও যে অর্থে ব্যবহৃত হইয়াছে, বীজগণিতেও ঠিক সেইরূপে বা সেই অর্থে ব্যবহৃত হয়।

$a, b, c, \ldots\ldots$ প্রভৃতি সংখ্যা-নির্দ্দেশক **অক্ষরসমূহ**, $+$, $-$, $\times$, $\div$ প্রভৃতি **প্রক্রিয়াসূচক চিহ্নসমূহ** এবং $\because$, $\therefore$, $=$, $>$, $<$ প্রভৃতি **ক্রিয়াসূচক সাঙ্কেতিক চিহ্নসমূহ**কে সাধারণভাবে **বীজগণিতীয় প্রতীক** (algebraical symbols) বলে। প্রক্রিয়াচিহ্ন বা সাঙ্কেতিক চিহ্নগুলি হইতে পার্থক্য দেখাইবার জন্য **অক্ষরসমূহ**কে **পরিমাণ প্রতীক** (symbols of quantity) বলা হয়।

নিম্নে, কেবলমাত্র ধনরাশি-নির্দ্দেশক বীজগণিতীয় অক্ষরসমূহ লইয়া যোগ, বিয়োগ, পূরণ ও ভাগ এই চারি নিয়মের প্রক্রিয়া প্রণালী পুনরায় পরিষ্কার করিয়া বুঝান যাইতেছে।

12. যোগ (Addition) ও যোগচিহ্ন (Plus sign) : তোমরা পূর্ব্বেই শিখিয়াছ যে, '+' এইরূপ চিহ্নকে যোগচিহ্ন বলে, এবং ইহা যে কোন দুইটি সংখ্যার মধ্যে থাকিলে, পরবর্ত্তী সংখ্যাটিকে উহার পূর্ব্ববর্ত্তী সংখ্যার সহিত যোগ করিতে হইবে, ইহা নির্দ্দেশ করে। যথা, $a+b$ (a যোগ b) দ্বারা বুঝা যাইতেছে যে, 'b' দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে a দ্বারা সূচিত সংখ্যাটির সহিত যোগ করিতে হইবে। অতএব, যদি $a=5$ এবং $b=3$ হয়, তবে $a+b=5+3=8$ হইবে। আবার, '$a+b+c$' দ্বারা বুঝা যাইতেছে যে, b দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে a দ্বারা সূচিত সংখ্যাটির সহিত যোগ করিয়া ঐ যোগফলের সহিত c দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে যোগ করিতে হইবে। সুতরাং a, b, c যথাক্রমে 5, 3 এবং 2 বুঝাইলে, '$a+b+c$' এর মান 10 হইবে।

13. বিয়োগ (Subtraction) ও বিয়োগচিহ্ন (Minus sign) : তোমরা জান যে, '−' এইরূপ চিহ্নকে বিয়োগচিহ্ন বলে, এবং ইহা দুইটি সংখ্যার মধ্যে থাকিলে বুঝিতে হইবে যে, পরবর্ত্তী সংখ্যাটিকে উহার পূর্ব্ববর্ত্তী সংখ্যা হইতে বিয়োগ করিতে হইবে। যথা, '$a-b$' (a বিয়োগ b) দ্বারা বুঝা যাইতেছে যে, b দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে a দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি হইতে বিয়োগ করিতে হইবে। অতএব, যদি $a=8$ এবং $b=3$

হয়, তবে $a-b=8-3=5$ হইবে। আবার, $a-b-c$ দ্বারা বুঝা যাইতেছে যে, b দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে a দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি হইতে বিয়োগ করিয়া, বিয়োগফল হইতে c দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে বিয়োগ করিতে হইবে। অতএব, a, b, c যথাক্রমে 8, 3, 1 বুঝাইলে, '$a-b-c$' এর মান 4 হইবে।

মন্তব্য। যদি কতকগুলি সংখ্যা যোগ ও বিয়োগ চিহ্ন দ্বারা পরস্পর যুক্ত থাকে, তবে বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া চিহ্ননির্দ্দিষ্ট প্রক্রিয়াগুলি ক্রমশঃ সম্পন্ন করিয়া যাইতে হয়। যথা, $a-b+c$ দ্বারা বুঝা যাইতেছে যে, প্রথমে b দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে a দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি হইতে বিয়োগ করিয়া পরে ঐ বিয়োগফলের সহিত c দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে যোগ করিতে হইবে।

14. গুণ (Multiplication) ও গুণচিহ্ন (Sign of multiplication) : পাটীগণিতে দেখিতে পাইয়াছ যে, '×' এইরূপ চিহ্নকে গুণ বা পূরণচিহ্ন বলে, এবং ইহা দুইটি সংখ্যার মধ্যে থাকিলে বুঝা যায় যে, উহার ডা'নদিকের সংখ্যাটিকে বামদিকের সংখ্যাটি দ্বারা গুণ করিতে হইবে। যথা, $a \times b$ (a গুণ বা পূরণ b) দ্বারা বুঝা যাইতেছে যে, b দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে a দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি দিয়া গুণ করিতে হইবে। অতএব, a ও b যথাক্রমে 5 ও 3 বুঝাইলে, '$a \times b$' দ্বারা 5×3 (অর্থাৎ তিনের পাঁচগুণ), অর্থাৎ 15 বুঝাইবে।

গুণচিহ্ন দ্বারা সম্বদ্ধ দুইটি সংখ্যার যদি (১) প্রত্যেকটিই অক্ষর হয়, বা (২) বামদিকেরটি অঙ্ক এবং ডা'নদিকেরটি অক্ষর হয়, তবে ঐ সংখ্যাদ্বয়ের মধ্যে গুণচিহ্ন সাধারণতঃ দেওয়া হয় না। যথা, '$a \times b$' এর পরিবর্ত্তে 'ab', এবং '$4 \times a$' এর পরিবর্ত্তে '$4a$' লেখা হইয়া থাকে।

মনে রাখিবে যে, গুণচিহ্ন দ্বারা সম্বদ্ধ অঙ্ক ও অক্ষরের মধ্যে অঙ্কটিকে বামে এবং অক্ষরটিকে ডা'নে লেখা হয়। **কোন সময়ই, অঙ্কটিকে ডা'নে লেখা হয় না।** যথা, '$4 \times a$' কে '$a4$' রূপে লেখা হয় না ; '$4a$' রূপেই লেখা হইয়া থাকে।

লক্ষ্য করিতে হইবে যে, '8×3' এর পরিবর্ত্তে 83 লেখা যায় না ; কারণ, পাটীগণিতের নিয়মানুসারে 83 এর অর্থ '$8 \times 10+3$' (8 দশক আর 3 একক)। কিন্তু, বীজগণিতে কতকগুলি অঙ্ক ও অক্ষর বা শুধু অক্ষর পাশাপাশি লেখা থাকিলে, উহা দ্বারা ঐ অঙ্ক বা অক্ষরসমূহের **গুণফলই** বুঝিতে হয়। যথা, $5c$, $10ab$, ইত্যাদি দ্বারা যথাক্রমে $5 \times c$, $10 \times a \times b$, ইত্যাদি রূপ বুঝায়। বীজগণিতে, কোন অক্ষরের **স্থানীয়মান** (local value) বলিয়া কিছু নাই।

আবার, কখন কখন গুণচিহ্নের পরিবর্ত্তে শুধু একটি বিন্দু (.) ব্যবহৃত হয়। যথা, $a \times b$, 5×4 প্রভৃতির পরিবর্ত্তে যথাক্রমে $a.b$, 5.4 প্রভৃতিও লেখা হয়।

দশমিক বিন্দু হইতে এই বিন্দুর পার্থক্য দেখাইবার জন্য ইহাকে কিছু নীচে বসান হয়; কারণ, দশমিক বিন্দুর স্থান কিছু উপরে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, '5.4' দ্বারা '5 গুণ 4 অর্থাৎ 4 এর 5 গুণ' বুঝায়; কিন্তু '5·4' দ্বারা '5 দশমিক 4' বুঝায়।

15. ভাগ (Division) ও ভাগচিহ্ন (Sign of division): পাটীগণিত হইতেই শিখিয়াছ যে, '÷' এইরূপ চিহ্নকে ভাগচিহ্ন বলে, এবং ইহা দুইটি সংখ্যার মধ্যে থাকিলে বুঝিতে হইবে যে, সংখ্যা দুইটির বামদিকেরটিকে ডা'নদিকেরটি দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। যথা, '$a \div b$' (a ভাগ b) দ্বারা বুঝা যায় যে, a দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে b দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি দিয়া ভাগ করিতে হইবে। অতএব, যদি $a=6$ এবং $b=3$ হয়, তবে '$a \div b$' এর মান $6 \div 3$ অর্থাৎ 2 হইবে। এইপ্রকার '$a \div b \div c$' দ্বারা বুঝা যাইতেছে যে, a দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে b দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি দিয়া ভাগ করিয়া, ঐ ভাগফলকে পুনরায় c দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি দিয়া ভাগ করিতে হইবে।

মন্তব্য। যদি কতকগুলি সংখ্যা গুণচিহ্ন এবং ভাগচিহ্ন দ্বারা পরস্পর যুক্ত থাকে, তাহা হইলে বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া চিহ্ননির্দ্দিষ্ট প্রক্রিয়াগুলি ক্রমশঃ সম্পন্ন করিয়া যাইতে হয়। যথা, '$a \times b \div c$' তে, প্রথমে a দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি দ্বারা b দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে গুণ করিলে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায়, তাহাকে তৎপরে c দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি দ্বারা ভাগ করিতে হইবে; এইরূপে, '$a \div b \times c$' তে, প্রথমে a দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে b দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি দ্বারা ভাগ করিয়া পরে ঐ লব্ধ ভাগফল দ্বারা c দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে গুণ করিতে হইবে।

টীকা। '$a \div b$' কে সচরাচর $\frac{a}{b}$ এইরূপ লেখা হইয়া থাকে; অতএব '$a \div b$' এবং $\frac{a}{b}$ উভয়ই একার্থবোধক।

16. বীজগণিতে '$\sim$' এই চিহ্নটিরও অনেক সময় ব্যবহার হইয়া থাকে; ইহাকে **পার্থক্য-চিহ্ন** (sign of difference) বলে।

ইহা দুইটি রাশির মধ্যে থাকিলে, উক্ত রাশিদ্বয়ের **বড়টি** হইতে **ছোটটির বিয়োগফল** বুঝায়। যথা,

$4 \sim 2 = 4 - 2 = 2$; $2 \sim 4 = 4 - 2 = 2$; $3 \sim 5 = 5 - 3 = 2$; ইত্যাদি।

সাধারণভাবে '$a \sim b$' এর অর্থ 'a' ও 'b' এর মধ্যে যেটির মান বড় সেইটি হইতে অপরটির বিয়োগফল।

17. রাশিমালা (Expression): পদ (term): প্রক্রিয়াচিহ্ন, অক্ষর ও অঙ্কসমূহের যে কোনরূপ অর্থবোধক বিন্যাসকে **বীজগণিতীয় রাশিমালা**

(algebraical expression) বলে; কখন কখন ইহাকে **বীজগণিতীয় রাশি** (algebraical quantity) বা সংক্ষেপে, শুধু **রাশি** (quantity)-ও বলা হয়।

রাশিমালার যে যে ভাগগুলি যোগ (+) বা বিয়োগ (−) চিহ্নদ্বারা পরস্পর-সম্বদ্ধ তাহাদের প্রত্যেকটিকেই ঐ রাশিমালার **পদ** (term) বলে। যথা, '$5a+ab\div c\times d-8c\times f\div g$' রাশিমালাটিতে $5a$, $ab\div c\times d$ এবং $8c\times f\div g$ এই তিনটি পদ আছে।

রাশিমালা দুই প্রকার: **সরল** (simple) এবং **মিশ্র** (compound)। যে রাশিমালাতে একটিমাত্র পদ থাকে (অর্থাৎ '+' বা '−' চিহ্নসংবলিত কোন অংশ থাকে না; যথা, $3ab$, $5cd\div e$, ইত্যাদি), তাহাকে **একপদ** (monomial) বা **সরল রাশি** বলে। একাধিক পদবিশিষ্ট রাশিমালাকে **মিশ্র রাশিমালা** বলে। যে রাশিমালাতে দুইটি পদ থাকে, তাহাকে **দ্বিপদ** (binomial), যথা, $2a+3b$; যাহাতে তিনটি পদ থাকে, তাহাকে **ত্রিপদ** (trinomial), যথা, $a+bc+8efg$; এবং তিনের অধিক পদবিশিষ্ট রাশিমালাকে **বহুপদ রাশিমালা** (polynomial or multinomial) বলে।

টীকা 1. '$a\div b\times c$' এবং '$a\div bc$' এই দুইটি রাশির মধ্যে পার্থক্য লক্ষ্য করিতে হইবে। প্রথমটি হইতে বুঝা যায় যে, a দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে b দ্বারা সূচিত সংখ্যাটি দ্বারা ভাগ করিয়া, ঐ ভাগফল দ্বারা c দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে গুণ করিতে হইবে। কিন্তু, দ্বিতীয় রাশিটি বুঝাইতেছে যে, a দ্বারা সূচিত সংখ্যাটিকে b ও c দ্বারা সূচিত সংখ্যা দুইটির গুণফল দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। অর্থাৎ, $a\div b\times c=\frac{a}{b}\times c$ অথবা, $=\frac{ac}{b}$; এবং $a\div bc=\frac{a}{bc}$.

অতএব, দেখা যাইতেছে যে, গুণ করণীয় (অর্থাৎ গুণ করিতে হইবে এইরূপ) সংখ্যাসমূহের মধ্যে যদি গুণচিহ্ন দেওয়া না থাকে, তবে ঐ সংখ্যাসমূহকে **একটি সংখ্যা** বলিয়া মনে করিতে হয়।

টীকা 2. কোন রাশিমালার মান নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে উহার ভিতর যতগুলি বিভিন্ন পদ (term) আছে, তাহাদের প্রত্যেকটির মান নির্ণয় করিয়া তৎপরে সমগ্র রাশিমালাটির মান নির্ণয় করিতে হইবে। যথা, '$a\times b-c\div d\times e+f\times g$' রাশিমালাটির মান নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে $a\times b$, $c\div d\times e$ এবং $f\times g$ এই পদ তিনটির মান নির্ণয় করিতে হইবে; তৎপরে, প্রথম পদের মান হইতে দ্বিতীয় পদের মান বিয়োগ করিয়া, বিয়োগফলের সহিত তৃতীয় পদের মান যোগ করিতে হইবে।

উপরিউক্ত নিয়মাবলী নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা পরিষ্কার করিয়া বুঝান যাইতেছে।

উদাহরণ

উদা. 1. $a=2, b=3, c=5$ হইলে, $5a+8b+7c$ এর মান নির্ণয় কর।

$$5a=5\times a=5\times 2=10;$$
$$8b=8\times b=8\times 3=24;$$
$$7c=7\times c=7\times 5=35.$$
$$\therefore\ 5a+8b+7c=10+24+35$$
$$=34+35=69.$$

উদা. 2. $a=8, b=5, c=2$ হইলে, $6a-5b+4c$ এর মান নির্ণয় কর।

$$6a=6\times a=6\times 8=48;$$
$$5b=5\times b=5\times 5=25;$$
$$4c=4\times c=4\times 2=8.$$
$$\therefore\ 6a-5b+4c=48-25+8$$
$$=23+8=31.$$

উদা. 3. $m=3,\ n=7,\ t=9$ ও $v=4$ হইলে, $7m\div 2n\times 8t\div 3v$ এর মান নির্ণয় কর।

যেহেতু প্রক্রিয়াগুলির ক্রম বামদিক হইতে ডা'নদিকে, স্থতরাং প্রথমে, $7m$ কে $2n$ দ্বারা ভাগ কর; তৎপরে, ভাগফল দ্বারা $8t$ কে গুণ কর; এবং সর্ব্বশেষে, এই গুণফলকে $3v$ দ্বারা ভাগ করিলেই নির্ণেয় মান পাওয়া যাইবে।

এখন (1) $7m\div 2n=\dfrac{7m}{2n}=\dfrac{7\times 3}{2\times 7}=\dfrac{3}{2};$

(2) $\frac{3}{2}\times 8t=\frac{3}{2}\times 8\times 9=3\times 4\times 9;$

(3) $3\times 4\times 9\div 3v=\dfrac{3\times 4\times 9}{3\times 4}=9.$

অতএব, নির্ণেয় মান $=9$.

উদা. 4. $a=1, b=2, c=3, d=6, e=5, f=0$ হইলে, $abc-d\div b\times a+def+b\div a\times c-d\div bc$ এর মান নির্ণয় কর।

নির্দ্দিষ্ট রাশিমালাটিতে পাঁচটি পদ আছে ; যথা, abc, $d \div b \times a$, def, $b \div a \times c$ এবং $d \div bc$.

এখন (1) $abc = a \times b \times c = 1 \times 2 \times 3 = 6$;

(2) $d \div b \times a = 6 \div 2 \times 1 = 3 \times 1 = 3$;

(3) $def = d \times e \times f = 6 \times 5 \times 0 = 0$;

(4) $b \div a \times c = 2 \div 1 \times 3 = 2 \times 3 = 6$;

(5) $d \div bc = \frac{d}{bc} = \frac{6}{2 \times 3} = 1$.

অতএব, নির্ণেয় মান $= 6 - 3 + 0 + 6 - 1$

$= 3 + 6 - 1 = 9 - 1 = 8$.

প্রশ্নমালা 3

$x = 8$, $y = 2$, $z = 4$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর (Find the values of) :

1. $y + z \times x$.
2. $x - y \times z$.
3. $x \div z \times y$.
4. $x \div zy$.
5. $x \div 3 \times y$.
6. $x \div 3y$.
7. $x - z \div y$.
8. $y + x \div z$.
9. $3x - 4z + 2y$.
10. $x - z \div y + x \div z$.
11. $x \div z \div 2 \times y$.
12. $x \div z \div 2y$.
13. $5x \div 2z$.
14. $5x \div 2 \times z$.
15. $4yz - x \div 4 \times y + z \div 2y$.
16. $80 \div z \times xy + 80 \div zx \times y$.
17. $3zx \div 16y + 5x \div 16 \times y - x \div 2z \times z \div y \times 4$.
18. $48x \div z \div y \times 6 \div 4z - 3x \div 2z \div 4 \times 3 \div y \times 8 + 6y \div x \div 2 \times z \div 3 \times 5$.

$a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 0$, $e = 7$, $f = 10$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর (Find the values of) :

19. $8a - 3c \div ab + d \times 3e + 5f \div 2 \times c$.
20. $f \times 6 \div 5a \times 8c \div 16b$.
21. $abe + 5df - 3f \div a \div 5b + 4e \div 3c \times 6a$.
22. $3 \times e \div 5 \times f \div 7 \times c - 8ef \div a \div 3 \times b \div 7c + 5a \div 2e \times 7$.
23. $4 \times \frac{b-a}{c} - 3 \times \frac{c-a}{b} + 2 \times \frac{c-b}{a}$.
24. $\frac{11e+b}{c+d} \times 2ca + \frac{14f+4b+2c}{fb+2}$.
25. $\frac{3a+2b}{d+c} - \frac{4c-3b}{d+e} + \frac{2c+3a}{d+a}$.

18. গুণফল (Product) : উৎপাদক (Factor) : দুই বা ততোধিক সংখ্যা পর পর গুণ করিলে যে সংখ্যা উৎপন্ন হয়, তাহাকে ঐ সংখ্যাগুলির **গুণফল** (product) বলে ; এবং সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটিকে ঐ গুণফলের **উৎপাদক** বা **গুণনীয়ক** (factor) বলে।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, যেহেতু $3 \times 5 \times 7 = 105$, অতএব, 105, '3, 5 ও 7' এর গুণফল ; এবং 3, 5 ও 7 এর প্রত্যেকটিই 105 এর উৎপাদক (বা গুণনীয়ক)। এইরূপ, 3, a, b, x এর প্রত্যেকে '$3abx$' এর উৎপাদক এবং '$3abx$' উক্ত উৎপাদকসমূহের গুণফল ; কারণ, $3abx = 3 \times a \times b \times x$.

19. সহগ (Coefficient) : কোন বীজগণিতীয় সরল রাশির পূর্ব্বে গুণকরূপে অবস্থিত অঙ্ক, অক্ষর বা উভয়কে ঐ রাশির পরবর্ত্তী অংশের **সহগ** বলে। যথা, $5abc$ সরল রাশিটিতে, '5' abc এর সহগ ; '$5a$' bc এর সহগ ; '$5ab$' c এর সহগ।

কোন সহগ শুধু অঙ্ক হইলে, উহাকে **সাংখ্য-সহগ** (numerical coefficient) বলে। যথা, $5abc$ সরল রাশিটির সাংখ্য-সহগ 5। কিন্তু, সহগটি শুধু অঙ্ক না হইলে, উহাকে **আক্ষরিক সহগ** (literal coefficient) বলে। যথা, $5abc$ রাশিটিতে, bc এর সহগ '$5a$', অথবা c এর সহগ '$5ab$', উভয়ই আক্ষরিক।

টীকা। যদি কোন সরল রাশির পূর্ব্বে কোন অঙ্ক গুণকরূপে বর্ত্তমান না থাকে, তবে 1-ই ঐ রাশিটির সাংখ্য-সহগ, এইরূপ মনে করিতে হইবে। যথা, 'a' কে '$1a$' এইরূপ মনে করিতে হইবে।

20. শক্তি (Power) : সূচক (Index or exponent) : কোন সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারাই বার বার গুণ করা হইলে, লব্ধ গুণফলকে ঐ সংখ্যার **শক্তি** (power) বলা হয়। যথা, $a \times a$, $a \times a \times a$, $a \times a \times a \times a$ প্রভৃতি 'a' এর ভিন্ন ভিন্ন **শক্তি**।

'$a \times a$' কে a এর **দ্বিতীয় শক্তি** বা **বর্গ** বলা হয়, এবং উহাকে a^2 লেখা হয় ;

'$a \times a \times a$' কে a এর **তৃতীয় শক্তি** বা **ঘন** বলা হয়, এবং উহাকে a^3 লেখা হয় ;

'$a \times a \times a \times a$' কে a এর **চতুর্থ শক্তি** বলা হয়, এবং উহাকে a^4 লেখা হয় ; ইত্যাদি।

এইরূপ, '$a \times a \times a \times a \times \cdots n$-সংখ্যক a পর্য্যন্ত'-কে a এর **n-তম শক্তি** বলা হয়, এবং উহাকে a^n লেখা হয়। সংখ্যার শক্তি লিখিবার উপরিউক্ত প্রণালী হইতে দেখা যায় যে, শক্তির ভিতর সংখ্যাটি যতবার আছে, তদ্জ্ঞাপক অঙ্ক বা অক্ষরটিকে, সংখ্যাটির

ডা'নদিকে কিছু উপরে সামান্য ছোট করিয়া লিখিয়া উহার শক্তি প্রকাশ করা হয়। [যেমন, a এর দ্বিতীয় শক্তি '$a \times a$' এর ভিতর, a দুইবার আছে বলিয়া উহাকে a^2 লেখা হইয়াছে ; অন্যগুলিও অনুরূপ।] সংখ্যার শক্তি-প্রকাশক এই ছোট অঙ্ক বা অক্ষরটিকে ঐ শক্তির **সূচক** (index বা exponent) বলা হয়। যেমন, a^2, a^3, a^5, a^m প্রভৃতি 'a' এর এই বিভিন্ন শক্তিগুলির "সূচক"-সমূহ যথাক্রমে 2, 3, 5, m প্রভৃতি।

টীকা। a^2 কে a এর বর্গ, a^3 কে a এর ঘন, a^4 কে a এর ৪র্থ শক্তি, ...a^n কে a এর n-তম শক্তি, ইত্যাদিরূপে পড়িতে হয়। 'a' কে a এর প্রথম শক্তি বলা হয় ; অতএব a কে a^1 মনে করিতে হইবে। সূচক 1 হইলে উহা লিখিত হয় না।

21. অক্ষর-সমন্বিত কোন গুণফলে, যতগুলি অক্ষর থাকে, তাহার প্রত্যেকটি অক্ষরই ঐ পদটির (অর্থাৎ গুণফলটির) একটি করিয়া **মাত্রা** (dimension) নির্দ্দেশ করে ; এবং উক্ত মাত্রাসমূহের **যোগফলকে** ঐ পদটির **মান** (degree) বলে। যথা, a^2x^5y এর আটটি মাত্রা আছে ; কারণ, ইহা $a \times a \times x \times x \times x \times x \times x \times y$ এর তুল্য ; অতএব, ইহার মানও 8 ; এবং ইহাকে একটি 'অষ্টমমানের রাশি' বলা হয়। এইপ্রকার, $ab^2c^4d^5$ এর দ্বাদশটি মাত্রা আছে, এবং ইহা একটি 'দ্বাদশমানবিশিষ্ট রাশি'। গুণফলের কোন সাংখ্য-সহগকে মাত্রারূপে ধরা হয় না। যেমন, $5ab^2c^3$ এবং ab^2c^3 উভয়েরই ছয় মাত্রা এবং ছয় মান।

বীজগণিতীয় রাশিমালার বিভিন্ন পদগুলি বিভিন্ন মাত্রাবিশিষ্ট হইলে, যে পদটির মাত্রা বৃহত্তম সেই পদটির মানকেই **রাশিমালার মান** (degree of the expression) বলা হয়। যথা, $x^4+3x^3+5ax^2+6cx+d$ রাশিমালাটিতে প্রথম পদের মান 4, দ্বিতীয় পদের মান 3, তৃতীয় পদের মান 3, চতুর্থ পদের মান 2 এবং পঞ্চম পদের মান 1, এই মানগুলির মধ্যে 4 ই সর্ব্বাপেক্ষা বড় বলিয়া, রাশিমালাটিকে **চতুর্থমানবিশিষ্ট** বলা হয়।

22. যে রাশিমালার সকল পদগুলিরই মান পরস্পর সমান, তাহাকে **সমমাত্র** (homogeneous) রাশিমালা বলে। যথা, $5a^3b-7a^2bc+8b^2c^2$ রাশিমালাটি সমমাত্র ; কারণ, ইহার প্রত্যেকটি পদই চারিমাত্রা ও চারিমানবিশিষ্ট।

23. অপেক্ষক (Function) : চল (Variable) : এক বা একাধিক অক্ষরবিশিষ্ট কোন বীজগণিতীয় রাশিমালা বা রাশিকে সেই অক্ষর বা অক্ষরসমূহের **অপেক্ষক** (function) বলে। যথা, x^3+5x+8, x এর অপেক্ষক ; a^2+ab+b^2, 'a এবং b' এর অপেক্ষক ; $a^3+b^3+c^3+2abc$, 'a, b এবং c' এর অপেক্ষক ; $5a^2bcd$, 'a, b, c এবং d' এর অপেক্ষক ; ইত্যাদি।

অপেক্ষকের অক্ষর বা অক্ষরসমূহকে **চল** (variable) বলে। যথা, $x^2+5xy+y^2$ একটি অপেক্ষক এবং x ও y ইহার 'চল'।

উদাহরণ

উদা. 1. $a=3$ হইলে, a^5-5a এর মান নির্ণয় কর।

এখন, $a^5=a\times a\times a\times a\times a$
$=3\times3\times3\times3\times3=243$;

এবং $5a=5\times a$
$=5\times3=15.$

অতএব, নির্ণেয় মান $=243-15=228.$

উদা. 2. $a=4$ হইলে, $2a^5-5a^2$ এর মান নির্ণয় কর।

এখন, $2a^5=2\times a\times a\times a\times a\times a$
$=2\times4\times4\times4\times4\times4=2048$;

এবং $5a^2=5\times a\times a=5\times4\times4=80.$

অতএব, নির্ণেয় মান $=2048-80=1968.$

উদা. 3. $a=2,\ b=3,\ c=4,\ d=5$ হইলে, $\dfrac{a^5b^3d}{c^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{a\times a\times a\times a\times a\times b\times b\times b\times d}{c\times c}$$
$$=\frac{2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3\times5}{4\times4}$$
$$=2\times3\times3\times3\times5=270.$$

প্রশ্নমালা 4

$a=8,\ b=12,\ c=4,\ m=7,\ n=6,\ x=2,\ y=3$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর (Find the values of) :

1. $3x^3.$ 2. $7a^2+b.$ 3. $2x^7-7n^2.$
4. $8cy^3-axy^2.$ 5. $5c^5+3a^3.$ 6. $7bx^3y^2+mn^4.$
7. $a^x+c^y.$ 8. $9a^3b^2c^4\div8n^2x^3y^2-b^2y+x.$
9. $2x^ab\div a^2b^x.$ 10. $3c^nx^b+a^my^3.$
11. $y=8$ হইলে, $y^6-65y^4+66y^2-21y+40$ এর মান নির্ণয় কর।
12. $x='75$ হইলে, $8x^4+6x^3+11x^2+13x+29$ এর মান নির্ণয় কর।
13. $a=\frac{4}{7}$ হইলে, $15a^3-34a^4+7a-4a^2+35a^5-3$ এর মান নির্ণয় কর।
14. $m=2{\cdot}6$ হইলে, $23+20m+78m^5-199m^6+25m^3$ এর মান নির্ণয় কর।

15. $y = 3{\cdot}4$ হইলে, $50y^7 - 51y^4 + 35y - 563y^5 - 19$ এর মান নির্ণয় কর।

16. $n = 1{\cdot}375$ হইলে, $64n^{10} - 55n^4 + 32n^6 - 121n^8 + 64n^2 - 4n^5 + 79$ এর মান নির্ণয় কর।

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ এর মান নির্ণয় কর :

17. যখন $a = 29, b = 24, c = 27$.

18. যখন $a = 5{\cdot}625, b = 3{\cdot}625, c = 4{\cdot}625$.

19. যখন $a = 44\frac{3}{7}, b = 51\frac{3}{7}, c = 58\frac{3}{7}$.

20. যখন $a = 1667, b = 1674, c = 1659$.

24. **মূল (Root) :** কোন সংখ্যার বর্গ (square) বা দ্বিতীয় শক্তি (2nd power), অপর একটি নির্দ্দিষ্ট সংখ্যা a এর সমান হইলে, প্রথমোক্ত সংখ্যাটিকে শেষোক্ত সংখ্যা a এর **বর্গমূল** (square-root) বলে, এবং $\sqrt[2]{a}$, বা সংক্ষেপে $\sqrt{a}$, এইরূপে লেখা হয়। যথা, $3 = \sqrt{9}$ (9 এর বর্গমূল), কারণ, $3^2 = 9$.

কোন সংখ্যার ঘন (cube) বা তৃতীয় শক্তি (3rd power), অপর একটি নির্দ্দিষ্ট সংখ্যা a এর সমান হইলে, প্রথমোক্ত সংখ্যাটিকে শেষোক্ত সংখ্যা a এর **ঘনমূল** (cube-root) বলে, এবং $\sqrt[3]{a}$, এইরূপে লেখা হয়। যথা, $2 = \sqrt[3]{8}$ (8 এর ঘনমূল), কারণ, $2^3 = 8$.

সাধারণভাবে বলা যায় যে, কোন সংখ্যার n-তম শক্তি (nth power) যদি অপর একটি নির্দ্দিষ্ট সংখ্যা a এর সমান হয়, তবে প্রথমোক্ত সংখ্যাটিকে শেষোক্ত সংখ্যা a এর n-তম মূল (nth-root) বলা হয়; a এর n-তম মূল, $\sqrt[n]{a}$ এইরূপে লিখিত হয় (বলা বাহুল্য, এখানে n একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা)। দৃষ্টান্তস্বরূপ, $2 = \sqrt[5]{32}$, কারণ, $2^5 = 32$; $3 = \sqrt[4]{81}$, কারণ, $3^4 = 81$; ইত্যাদি।

'$\sqrt{\ }$' এই চিহ্নটিকে সচরাচর **মূল-চিহ্ন** (radical sign) বলে। ইহা ইংরাজী শব্দ radix (মূল) এর প্রথম অক্ষর 'r' এর অপভ্রংশ বলিয়া কথিত।

টীকা। a এর বর্গমূল $\sqrt{a}$ কে 'বর্গমূল a' পড়িতে হয়।

25. **বন্ধনী (Brackets) :** তোমরা পাটীগণিতে বন্ধনী (brackets)-এর ব্যবহার শিখিয়াছ। বীজগণিতেও উহাদিগকে পাটীগণিতোক্ত অর্থেই ব্যবহার করিতে হয়। তোমরা জান যে, ( ), { }, [ ] এই তিন জোড়া চিহ্নকে বন্ধনী (brackets) বলে। পাটীগণিতে যেরূপ বন্ধনীর অন্তর্গত বহুপদ রাশিকেও, বন্ধনী-বহির্ভূত রাশির সম্পর্কে, একটি রাশি বলিয়া গণ্য করিতে হয়, বীজগণিতেও ঠিক সেইরূপ। যথা, $(a+b)x$ দ্বারা বুঝা যায় যে, x কে '$a+b$' দ্বারা গুণ করিতে হইবে; কিন্তু, $a+bx$ দ্বারা বুঝা যায় যে, x কে b দিয়া গুণ করিয়া গুণফলকে a এর সহিত যোগ করিতে হইবে।

অতএব, $d+(a+b)x$ একটি দ্বিপদ রাশি (binomial) ; কারণ, ইহাতে d এবং $(a+b)x$ এই দুইটিমাত্র পদ আছে।

এইরূপ, $c-\{d+(a+b)x\}$ও একটি দ্বিপদ রাশি ; কারণ, ইহাতে c এবং $d+(a+b)x$ এই দুইটিমাত্র পদ আছে। কিন্তু ঐই বন্ধনীগুলি না থাকিলে উহা c, d, a এবং bx এই চারিটি পদবিশিষ্ট একটি বহুপদ রাশি হইত।

কোন কোন সময়, রাশিমালার যে যে পদগুলিকে একটি রাশির অন্তর্ভূত বলিয়া গণ্য করিতে হইবে, তাহাদিগকে বন্ধনীর অন্তর্গত করার পরিবর্ত্তে ঐ পদগুলির উপরিভাগে একটি রেখা টানিয়া ঐ অর্থ বুঝান হয়। এইরূপে অঙ্কিত রেখাকে **রেখাবন্ধনী** (vinculum) বলে। যথা, $a-\overline{b-c}$ এবং $a-(b-c)$ উভয়ই একার্থবোধক।

দ্রষ্টব্য। উপরিউক্ত ব্যাখ্যা হইতে $\sqrt{a+b}$ বা $\sqrt{}(a+b)$ এবং $\sqrt{}a+b$ এর মধ্যে পার্থক্য লক্ষ করা সহজ। $\sqrt{a+b}$ বা $\sqrt{}(a+b)$ তে '$a+b$' এর বর্গমূল বুঝায় ; কিন্তু $\sqrt{}a+b$ তে 'a এর বর্গমূলের সহিত b যোগ করিতে হইবে' ইহাই নির্দ্দেশ করে। তদ্রূপ, $\sqrt{ab}$ বা $\sqrt{}(ab)$ তে 'ab' এর বর্গমূল বুঝায় ; কিন্তু $\sqrt{}ab$ তে 'a' এর বর্গমূল দ্বারা b কে গুণ করিতে হইবে' ইহাই প্রতিপন্ন করে।

টীকা। তোমরা পাটীগণিত হইতে জান যে, ( ), { } ও [ ] এই তিন প্রকার বন্ধনীকে যথাক্রমে **লঘুবন্ধনী** (parentheses), **ধনুর্ব্বন্ধনী** (braces) এবং **গুরুবন্ধনী** (crotchets বা square brackets) বলে।

উদাহরণ

উদা. 1. $a=2$, $b=4$, $c=9$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt{}cb+\sqrt{}b+5$, (ii) $\sqrt{cb}+\sqrt{}(b+5)$ এবং (iii) $\sqrt[3]{2b}+\sqrt{}4a$.

$$\text{(i)}\quad \sqrt{}cb+\sqrt{}b+5=\sqrt{}9\times4+\sqrt{}4+5$$
$$=3\times4+2+5$$
$$=12+2+5=19.$$

$$\text{(ii)}\quad \sqrt{cb}+\sqrt{}(b+5)=\sqrt{9\times4}+\sqrt{(4+5)}$$
$$=\sqrt{36}+\sqrt{}9=6+3=9.$$

$$\text{(iii)}\quad \sqrt[3]{2b}+\sqrt{}4a=\sqrt[3]{2\times4}+\sqrt{}4\times2$$
$$=\sqrt[3]{}8+2\times2$$
$$=2+4=6.$$

উদা. 2. $a=3,\ b=5,\ c=8,\ d=12,\ e=20$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিদ্বয়ের মানের পার্থক্য নির্ণয় কর :

$$a\{c+b^2-a(e-d)\} \text{ এবং } a\{c+\overline{b^2-a}(e-d)\}.$$

প্রথম রাশি $=3\times\{8+5^2-3\times(20-12)\}$
$=3\times\{8+25-3\times 8\}$
$=3\times\{8+25-24\}=3\times 9=27$;

এবং দ্বিতীয় রাশি $=3\times\{8+(5^2-3)\times(20-12)\}$
$=3\times\{8+22\times 8\}$
$=3\times\{8+176\}=3\times 184=552.$

অতএব, নির্ণেয় পার্থক্য $=552-27=525.$

উদা. 3. $m=10,\ n=8,\ p=2,\ q=12,\ r=15$ হইলে,
$[\{rm-2q-n(pq-m)\}\div p]\times(r-m-p)$
এবং $[\{rm-2.\overline{q-n}(pq-m)\}\div p]\times r-\overline{m-p}$ এর মানের পার্থক্য নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=[\{15\times 10-2\times 12-8\times(2\times 12-10)\}\div 2]\times(15-10-2)$
$=[\{150-24-8\times 14\}\div 2]\times 3$
$=[\{126-112\}\div 2]\times 3$
$=[14\div 2]\times 3=7\times 3=21$;

এবং দ্বিতীয় রাশি $=[\{15\times 10-2\times(12-8)(2\times 12-10)\}\div 2]\times 15-(10-2)$
$=[\{150-2\times 4\times 14\}\div 2]\times 15-8$
$=[\{150-112\}\div 2]\times 15-8=[38\div 2]\times 15-8$
$=19\times 15-8=285-8=277.$

অতএব, নির্ণেয় পার্থক্য $=277-21=256.$

প্রশ্নমালা 5

$a=7,\ b=3,\ c=8,\ d=9,\ e=4,\ f=0,\ m=5,\ n=2,\ p=1$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর (Find the values of) :

1. $\sqrt[3]{cen}.$ 2. $\sqrt[5]{ce}.$ 3. $\sqrt[3]{cb}.$ 4. $6\sqrt[6]{b^4d}.$
5. $4\sqrt[4]{4e}.$ 6. $4\sqrt[4]{e^4}.$ 7. $2\sqrt{4c^2}.$ 8. $2\sqrt{4}c^2.$
9. $m+n\sqrt{d}.$ 10. $\overline{m+n}\sqrt{d}.$ 11. $3\sqrt{p}+c.$ 12. $3\sqrt{c+p}.$

13. $\sqrt[3]{3(c+p)}$. 14. $3\sqrt[3]{8}(b+3c)$. 15. $3\sqrt[3]{8(b+3c)}$.

16. $f\sqrt{m}+d$. 17. $f\sqrt{a+d}$. 18. $3d-(2e-n)$.

19. $3d-2(e-n)$. 20. $3(d-2e)-n$. 21. $(3d-2)e-n$.

22. $(3d-2)\overline{e-n}$. 23. $3\{d-(2e-n)\}$. 24. $3(d-2)(e-n)$.

25. $7c-(b^2-n^2)$. 26. $(7c-b)^2-n^2$. 27. $7c-(b^2-n)^2$.

28. $7(c-b)^2-n^2$. 29. $\{7c-(b^2-n)\}^2$.

30. $\sqrt[3]{c+3p+4e}(p+b)^3$. 31. $\sqrt[3]{c}+3p+4e(p+b)^3$.

32. $\sqrt[3]{c}+\overline{3p+4e}(p+b)^3$. 33. $\sqrt[3]{c}+(3p+4e)p+b^3$.

34. $\sqrt[3]{c}+3\{(p+4)ep+b^3\}$.

$x=2,\ y=3,\ z=4,\ a=6,\ d=8,\ c=5,\ n=9,\ p=1$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিসমূহের মান নির্ণয় কর (Find the values of) :

35. $a(x+y)^2(a-\overline{c-z})^3$.

36. $4\{n-a(d-\overline{a+p})\} \sim 4\{\overline{n-a}(d-a)+p\}$.

37. $5\{c+\overline{x^2+y}(n-\overline{d-z})\} \sim 5\{(\overline{c+x^2}+y)\overline{n-d}-z\}$.

38. $[x+y^2\{ap-z(c-\overline{a-x})\}] \sim [\overline{x+y}^2\{(ap-z)c-a\}-x]$.

39. $\dfrac{x^x+y^y+z^z-7p^p}{3(x^2+p^2)+y^2+z^2}$.

40. $\sqrt{\left\{\dfrac{c^2+z^2+x^2}{c^2-(z^2+x^2)}-\dfrac{n(n^2-\overline{z^2+c^2})}{n^2+z^2-c^2}\right\}}$.

26. **সদৃশ ও অসদৃশ পদ (Like and unlike terms) :** যে সকল পদ বা সরলরাশির ভিতরে কোনরূপ পার্থক্য থাকে না, বা কেবলমাত্র সাংখ্য-সহগ (numerical coefficient) এ প্রভেদ থাকে, তাহাদিগকে **সদৃশ পদ** (like terms) বলে। যথা, $3ax^2y^5$ ও $5ax^2y^5$ এই পদ দুইটি সদৃশ। যে সকল পদ বা সরলরাশি সদৃশ নয়, তাহাদিগকে **অসদৃশ পদ** (unlike terms) বলে। যথা, $3ax^2y^5$ ও $5ax^2y^4$ পদ দুইটি অসদৃশ ; তদ্রূপ, abc, $5axbd$, $7a^2b^3$, c^2d^3x প্রভৃতি পদগুলিও অসদৃশ।

27. $>, <, \neq, \because, \therefore$ ঃ

'$>$' এই চিহ্নটি, দুইটি রাশির মধ্যে থাকিলে, 'রাশিদ্বয়ের বামদিকেরটি ডা'নদিকেরটি অপেক্ষা **বড়**' ইহা বুঝায়। যথা, $a+b > c+d$ এর অর্থ, $a+b$ এর মান $c+d$ এর মান অপেক্ষা বড়।

'$<$' এই চিহ্নটি, দুইটি রাশির মধ্যে থাকিলে, 'রাশিদ্বয়ের বামদিকেরটি ডা'নদিকেরটি অপেক্ষা **ছোট**' ইহা বুঝায়। যথা, $a+x < b+y$ এর অর্থ, $a+x$ এর মান $b+y$ এর মান অপেক্ষা ছোট।

'$\neq$' এই চিহ্নটি দুইটি রাশির মধ্যে থাকিলে, উক্ত রাশি দুইটি '**পরস্পর সমান নহে**' ইহা বুঝায়। যথা, $m \neq n$ দ্বারা 'm' ও 'n' সমান নয়, ইহাই বুঝায়।

'$\because$ ও $\therefore$' এই চিহ্ন দুইটি যথাক্রমে '**যেহেতু**' ও '**সুতরাং**' শব্দদ্বয়ের পরিবর্তে ব্যবহৃত হয়।

তৃতীয় অধ্যায়

ধন- ও ঋণ-রাশি এবং উহাদের লৈখিক দৃষ্টান্ত

(Positive and Negative Quantities through Graphical Illustration)

28. বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট সমজাতীয় রাশি (Quantities of the same class, but of opposite character): কোন অর্থের কথা বলিতে গেলে উহা 'লাভ' বা 'ক্ষতি' জনিত অথবা 'পাওনা' বা 'দেনা' জনিত, সেই সম্পর্কেই সাধারণতঃ কথা বলা হইয়া থাকে। স্পষ্টতঃই 'লাভ' বা 'পাওনা' যেমন পূর্ব্ব তহবিলকে বাড়াইয়া দেয়, 'ক্ষতি' বা 'দেনা' ঠিক তেমনই পূর্ব্ব তহবিলকে কমাইয়া দেয়। অধিকন্তু 'লাভ' এবং 'ক্ষতি' এরূপভাবে পরস্পর-সম্বদ্ধ যে, আমরা প্রথমে যদি কোন নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ 'লাভ' করিয়া তৎপরে ঠিক সমপরিমাণ ক্ষতিগ্রস্ত হই, তাহা হইলে আমাদের পূর্ব্ব তহবিলের কোনরূপ পরিবর্ত্তন হয় না। 'পাওনা' ও 'দেনা'র সম্বন্ধও অনুরূপ। অতএব, 'লাভ' বা 'পাওনা' জনিত অর্থ 'ক্ষতি' বা 'দেনা' জনিত অর্থের ঠিক বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট।

কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে দূরত্ব মাপিতে হইলে, উহা ঐ বিন্দুর দুই বিপরীত দিকের যে কোন একদিকে মাপা যায়; যথা, বিন্দুটি হইতে উত্তরে বা দক্ষিণে, পূর্ব্বে বা পশ্চিমে, উত্তর-পূর্ব্বে বা দক্ষিণ-পশ্চিমে, ইত্যাদি। স্পষ্টই, পূর্ব্বাভিমুখী দূরত্ব এবং পশ্চিমাভিমুখী দূরত্ব, নির্দ্দিষ্ট বিন্দুটির সম্পর্কে, এরূপভাবে পরস্পর-সম্বদ্ধ যে, আমরা যদি প্রথমে বিন্দুটি হইতে পূর্ব্বদিকে কতক পথ অগ্রসর হইয়া তথা হইতে পুনরায় পশ্চিমদিকে সমপরিমাণ পথ চলিয়া আসি, তাহা হইলে আমরা নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতেই পুনরায় উপনীত হইব। কাজেই কোন নির্দ্দিষ্ট দিকের দূরত্ব, উহার বিপরীত দিগ্বর্ত্তী দূরত্বের ঠিক বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট।

অতএব, প্রথম দৃষ্টান্তে, লাভ এবং ক্ষতি উভয়কেই অর্থের অংশ হিসাবে দেখিলে, উহারা একই জাতীয় রাশি বলিয়া পরিগণিত হইবে; কিন্তু লাভ ও ক্ষতি আমাদের তহবিলের সহিত ঠিক বিপরীতভাবে সম্বদ্ধ বলিয়া (লাভ তহবিলকে বাড়াইয়া দেয় এবং ক্ষতি তহবিলকে কমাইয়া দেয়) উহাদিগকে বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট বলা হয়। আবার, দূরত্বের দৃষ্টান্তটিতে, নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে উত্তরাভিমুখী দূরত্ব, বা দক্ষিণাভিমুখী দূরত্ব এই উভয়ই 'দূরত্বজ্ঞাপক' বলিয়া একই জাতীয় রাশি। কিন্তু ঐ দূরত্বকে নির্দ্দিষ্ট বিন্দুটির কোন্ দিকে (উত্তরে বা দক্ষিণে) লওয়া হইয়াছে, তাহা বিবেচনা করিলে দেখা যায় যে, উহারা বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট।

29. যোগ ও বিয়োগ চিহ্নের নূতন অর্থ : উপক্রমণিকাতে অবচ্ছিন্ন রাশি (concrete quantity) কে সংখ্যাদ্বারা কিরূপে নির্দ্দেশ করা যায়, তাহা দেখান হইয়াছে। এখন, একই জাতীয় বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট দুইটি রাশিকে কিরূপে সংখ্যাদ্বারা প্রকাশ করা যায়, তাহাই দেখিবার বিষয়।

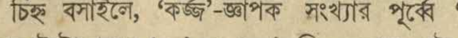
আমরা পাটীগণিতে দেখিয়াছি যে কোন রাশির সহিত তজ্জাতীয় অপর কোন রাশি **যোগ** করিলে রাশিটির পরিমাণ বৃদ্ধি পায় ; এবং ঐ রাশি হইতে ঐ জাতীয় অপর কোন রাশি **বিয়োগ** করিলে রাশিটির মান কমিয়া যায়। তাহা হইলেই দেখা যায় যে, **যোগ**-প্রক্রিয়া এবং **বিয়োগ**-প্রক্রিয়া বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট।

যোগ ও **বিয়োগ** প্রক্রিয়াদ্বয়ের এই কারকতা অবলম্বনেই, বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট দুইটি রাশির একটির সাংখ্যমানের পূর্ব্বে '+' চিহ্ন, এবং অপরটির সাংখ্যমানের পূর্ব্বে '−' চিহ্ন দিয়া রাশি দুইটিকে সংখ্যাদ্বারা প্রকাশ করা হয়। অবশ্য, উল্লিখিত রাশিদ্বয়ের সাংখ্যমানের যে কোনটির পূর্ব্বে '+' চিহ্ন এবং অপরটির পূর্ব্বে '−' চিহ্ন দেওয়া যাইতে পারে ; কিন্তু যে কোন একটির পূর্ব্বে একবার '+' চিহ্ন বা '−' চিহ্ন বসাইলে, উহার সহিত সম্বন্ধযুক্ত-প্রক্রিয়াসমূহের শেষ পর্য্যন্ত ঐ চিহ্নই বজায় রাখিতে হইবে। নিম্নলিখিত দৃষ্টান্তগুলিদ্বারা উপরিউক্ত নিয়মাবলীর সম্যক্ উপলব্ধি হইবে :

স্পষ্টতঃই, 'উপার্জ্জন' এবং 'কর্জ্জ' বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট। 'উপার্জ্জন'-জ্ঞাপক সংখ্যার পূর্ব্বে '+' চিহ্ন বসাইলে, 'কর্জ্জ'-জ্ঞাপক সংখ্যার পূর্ব্বে '−' চিহ্ন বসাইতে হইবে। অথবা, ইহার উল্টাভাবেও '+' ও '−' চিহ্ন বসান যাইতে পারে। অতএব, কোন প্রশ্নে যদি উপার্জ্জন বুঝাইতে '+' চিহ্ন এবং কর্জ্জ বুঝাইতে '−' চিহ্ন ব্যবহার করি এবং 'এক পাউণ্ড' যদি অর্থের একক হয়, তাহা হইলে, $+30$, $+45$ ও $+90$ এর অর্থ যথাক্রমে £30, £45 ও £90 পরিমিত 'উপার্জ্জন' এবং -30, -45 ও -90 এর অর্থ যথাক্রমে £30, £45 ও £90 পরিমিত 'কর্জ্জ'।

কিন্তু, 'উপার্জ্জন' ও 'কর্জ্জের' সাংখ্যমানের চিহ্ন ঠিক বিপরীতভাবে ধরা হইলে $+10$, $+25$ ও $+30$ যথাক্রমে £10, £25 ও £30 পরিমাণ 'কর্জ্জ' এবং -10, -25 ও -30 যথাক্রমে £10, £25 ও £30 পরিমাণ 'উপার্জ্জন' নির্দ্দেশ করিবে। সুতরাং, '$+a$' যদি কোন বস্তুর পরিমাণ নির্দ্দেশ করে, তাহা হইলে, '$-a$' উহার সমপরিমাণ কিন্তু বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট বস্তুর পরিমাণ নির্দ্দেশ করিবে।

30. লৈখিক উদাহরণ :



মনে কর, AB একটি সোজা রাস্তা। কোন এক ব্যক্তি O হইতে B অভিমুখে যাত্রা করিয়া C পর্য্যন্ত পৌছিয়া পুনরায় O তে প্রত্যাবর্ত্তন করিল। এক্ষেত্রে তাহার

অবস্থান, ভ্রমণের পূর্ব্বেও যেরূপ ছিল, পরেও ঠিক সেইরূপই হইয়াছে। অতএব, উপরি উক্ত দৃষ্টান্তে স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, 'বামদিক হইতে ডা'নদিকে অতিক্রান্ত পথ'টিকে 'ডা'নদিক হইতে বামদিকে অতিক্রান্ত পথ'টি দ্বারা নিরসন করা হইয়াছে। সুতরাং উহারা বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট। কাজেই, বামদিক হইতে ডা'নদিকে অতিক্রান্ত পথের সাংখ্যমানের পূর্ব্বে '+' চিহ্ন ব্যবহার করিলে, ডা'নদিক হইতে বামদিকে অতিক্রান্ত পথের সাংখ্যমানের পূর্ব্বে '−' চিহ্ন ব্যবহার করিতে হইবে। অবশ্য, ইহার ঠিক উল্টাভাবেও '+' ও '−' চিহ্ন প্রয়োগ করা যায়।

পক্ষান্তরে, যদি ডা'নদিক হইতে বামাভিমুখী দূরত্ব বুঝাইতে উহার সাংখ্যমানের পূর্ব্বে '+' চিহ্ন ব্যবহার করা যায়, তবে "O বিন্দু হইতে '-3' মাইল দূরত্ব" এর অর্থ "O বিন্দুর ডা'নদিকে 3 মাইল দূরত্ব"; আবার যদি O বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বস্থিত C ও D বিন্দুদ্বয় O হইতে যথাক্রমে 5 মাইল ও 4 মাইল দূরবর্ত্তী হয়, তবে এক মাইলকে দূরত্বের একক ধরিলে, OD, OC, CD এবং DC দূরত্বগুলি যথাক্রমে $+4$, -5, $+9$, -9 সংখ্যাগুলিদ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে।

উপরিউক্ত দৃষ্টান্তগুলি হইতে পরিষ্কাররূপে প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, '+' ও '−' চিহ্ন দুইটি যোগ ও বিয়োগের প্রক্রিয়া-চিহ্ন ব্যতীত, বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট দুইটি রাশির **প্রভেদ** বুঝাইবার চিহ্নরূপেও ব্যবহৃত হয়; এবং এইক্ষেত্রে চিহ্নদ্বয় উক্ত রাশি দুইটির সাংখ্যমানের সহিত অবিচ্ছেদ্যরূপে যুক্ত হইয়া থাকে। শেষোক্ত অর্থে ব্যবহৃত হইলে, উক্ত চিহ্নদ্বয়কে **বিভেদ-চিহ্ন** (signs of affection) বলা হয়।

31. ধনরাশি ও ঋণরাশি (Positive and Negative quantities) : '+' চিহ্নযুক্ত রাশিকে ধনরাশি এবং '−' চিহ্নযুক্ত রাশিকে ঋণরাশি বলে। ধনরাশি বুঝাইবার জন্য অনেক সময় '+' চিহ্ন ব্যবহৃত হয় না। দৃষ্টান্তস্বরূপ কোন 'একপদ রাশি' যদি ধনরাশি হয়, অথবা কোন রাশিমালার প্রথম পদ (অর্থাৎ, সর্ব্ববামের পদ) যদি ধনরাশি হয়, তবে তাহার পূর্ব্বে '+' চিহ্ন দেওয়া হয় না। যথা, $3ab$, $5a^2b$, $3a-5b+7c$ প্রভৃতির মধ্যে, $3ab$, $5a^2b$, $3a$ পদগুলিকে ধনরাশি বলিয়া বুঝিতে হইবে। কিন্তু ঋণরাশি বুঝাইতে হইলে উহার পূর্ব্বে '−' চিহ্ন সকল সময়ই দিতে হইবে। যথা, -4, -6, $-a$, $-b$, $-c$ ইহারা প্রত্যেকেই ঋণরাশি।

এইজন্য '+' ও '−' চিহ্নদ্বয়কে যথাক্রমে **ধনচিহ্ন** ও **ঋণচিহ্ন** বলে।

টীকা 1. পূর্ব্বোক্ত 'ধনরাশি ও ঋণরাশি' এর সংজ্ঞায় 'রাশি' শব্দ 'সংখ্যা' অর্থে ব্যবহৃত হইয়াছে। 29 নিয়মের ব্যাখ্যা মনে রাখিলে, 'ঋণসংখ্যা'র অর্থও উপলব্ধি করিতে কোনরূপ কষ্ট হইবে না।

টীকা 2. ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, এতদ্বিবেচনা নিরপেক্ষ কোন রাশির মানকে উহার **পরমমান** (absolute value) বলে। যথা, a যদি 5 হয় এবং b যদি 3 হয়, তবে $+(ab)$ অথবা $-(ab)$ উভয়েরই পরমমান 15.

দ্রষ্টব্য। '$-$£20 লাভ', '$-$8 ইঞ্চি উত্থান', 'উত্তরাভিমুখী $-$5 মাইল পরিমিত দূরত্ব' প্রভৃতির প্রকৃত অর্থ সর্ব্বদা মনে রাখা একান্ত দরকার। বস্তুতঃ উহারা যথাক্রমে '£20 ক্ষতি', '8 ইঞ্চি পতন', 'দক্ষিণাভিমুখী 5 মাইল পরিমিত দূরত্ব' প্রভৃতি বুঝাইতেছে।

প্রশ্নমালা 6

1. £4 কে একক ধরিলে, "A এর লাভ $= -25$" ; ইহার অর্থ কি ?

2. কোন ব্যবসায়ীর £30 ক্ষতি 30 দ্বারা নির্দ্দিষ্ট হইলে, £70 লাভ কত দ্বারা নির্দ্দেশ করা যাইবে ?

3. £60 উপার্জ্জন যদি 15 দ্বারা নির্দ্দিষ্ট হয়, তবে £100 কর্জ্জকে কত দ্বারা নির্দ্দেশ করা যাইবে ?

4. £100 কর্জ্জ 25 দ্বারা নির্দ্দিষ্ট হইলে, £400 উপার্জ্জনকে কত দ্বারা নির্দ্দেশ করা যাইবে ?

5. কোন বিন্দুর উত্তরদিকে 75 মাইল পরিমিত দূরত্ব 15 দ্বারা নির্দ্দিষ্ট হইলে, ঐ বিন্দুর দক্ষিণে 150 মাইল দূরত্ব কত দ্বারা নির্দ্দিষ্ট হইবে ?

6. কোন নদীর জল প্রথম দিনে 12 ইঞ্চি বাড়িল, পরের দিন 9 ইঞ্চি কমিল এবং তৃতীয় দিনে পুনরায় 15 ইঞ্চি বাড়িল। 3 ইঞ্চিকে একক ধরিয়া, বিভিন্ন দিনে জলের **বৃদ্ধিকে** কিরূপে সংখ্যাদ্বারা প্রকাশ করিবে ?

7. কোন ব্যক্তির প্রথম বৎসরে 30 টাকা লাভ, দ্বিতীয় বৎসরে 20 টাকা ক্ষতি, তৃতীয় বৎসরে 40 টাকা ক্ষতি এবং চতুর্থ বৎসরে 60 টাকা লাভ হইল ; 2 টাকাকে একক ধরিয়া বিভিন্ন বৎসরে তাহার **লাভ** কিরূপে প্রকাশ করিবে ?

8. পূর্ব্ব প্রশ্নে, তাহার বিভিন্ন বৎসরের **ক্ষতিই** বা কিরূপে প্রকাশ করিবে ?

চতুর্থ অধ্যায়

ধন- ও ঋণ-রাশি সমন্বিত সাধারণ চারি নিয়ম ও বন্ধনীর ব্যবহার (Four Simple Rules involving Positive and Negative Quantities : Use of Brackets)

1. যোগ বা সঙ্কলন (Addition)

32. সংজ্ঞা ঃ দুই বা ততোধিক রাশি একত্র করিলে যে রাশি উৎপন্ন হয়, তাহাকে ঐ রাশিগুলির **যোগফল** (sum) এবং ঐ রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে **যোজ্য-রাশি** বলে।

যোগফল নির্ণয় করার প্রণালীকে **যোগ** (addition) বলা হয়।

টীকা। পাটীগণিতে ঋণরাশির ব্যবহার না থাকায়, 'যোগ' শব্দের পাটীগণিতীয় ও বীজগণিতীয় অর্থের ভিতর পার্থক্য আছে।

বীজগণিতীয় যোগে, যোজ্যরাশিগুলির প্রত্যেকে ধনরাশি নাও হইতে পারে।

33. দুইটি ধনরাশির যোগফল-নির্ণয় ঃ

B′ A′ O A B

ধর, $B'B$ একটি সোজা রাস্তা; উহার বামদিক হইতে ডা'নদিক-অভিমুখী পথ ধনরাশিদ্বারা সূচিত হইতেছে।

মনে কর, O, A এবং B বিন্দু তিনটি রাস্তার উপর এরূপভাবে অবস্থিত যে, OA, 2 মাইল এবং AB, 3 মাইল দীর্ঘ; এখন, O, A এবং B এর অবস্থান উপরের চিত্রানুযায়ী হইলে এবং দূরত্বের একক 'এক মাইল' হইলে, OA এবং AB যথাক্রমে $+2$ এবং $+3$ দ্বারা সূচিত হইবে।

যদি কোন লোক O হইতে রওনা হইয়া প্রথম ঘণ্টায় A তে পৌছে এবং তৎপরবর্তী ঘণ্টায় A হইতে B তে যায়, তাহা হইলে দুই ঘণ্টা পরে, O হইতে ঐ ব্যক্তির দূরত্ব স্পষ্টতঃ OB; এবং এই দূরত্ব $+5$ দ্বারা সূচিত হইবে।

এখন যেহেতু (প্রথম ঘণ্টায় অতিক্রান্ত পথ) + (দ্বিতীয় ঘণ্টায় অতিক্রান্ত পথ) = (দুই ঘণ্টায় অতিক্রান্ত পথ); সুতরাং, $(+2)+(+3)=+5$;

অর্থাৎ, সাধারণভাবে বলিতে গেলে, $(+a)+(+b)=+(a+b)$;

অথবা সংক্ষেপে, $(a)+(b)=(a+b)$.

অতএব, দুইটি ধনরাশি যোগ করিলে, যোগফলও একটি ধনরাশি হইবে, এবং যোগফলের পরমমান, যোজ্যরাশিদ্বয়ের পরমমানের সমষ্টির সমান হইবে।

34. দুইটি ঋণরাশির যোগফল-নির্ণয় : 33 নিয়মের চিত্রে, মনে কর, O হইতে বামদিকে 2 মাইল দূরে A', এবং উহা হইতে বামদিকে 3 মাইল দূরে B', এই দুইটি বিন্দু লওয়া হইল; অতএব, $OA'=2$ মাইল এবং $A'B'=3$ মাইল। এখন, 'এক মাইল' কে দূরত্বের একক ধরিলে, অবশ্যই OA' ও $A'B'$ যথাক্রমে -2 ও -3 দ্বারা সূচিত হইবে।

এখন, কোন লোক যদি O হইতে রওনা হইয়া প্রথম ঘণ্টায় A' পর্য্যন্ত যায় এবং তৎপরবর্ত্তী ঘণ্টায় A' হইতে B' তে পৌঁছে, তাহা হইলে দুই ঘণ্টা পরে, O হইতে বামদিকে তাহার দূরত্বের পরিমাণ OB', এবং স্পষ্টই এই দূরত্ব -5 দ্বারা সূচিত হইবে।

এখন যেহেতু (প্রথম ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব) + (দ্বিতীয় ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব) = (দুই ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব);

অতএব, $(-2)+(-3)=-5$;

অর্থাৎ, সাধারণভাবে বলা যায় যে, $\boldsymbol{(-a)+(-b)=-(a+b)}$.

সুতরাং, দুইটি ঋণরাশি যোগ করিলে, যোগফলও একটি ঋণরাশি হইবে, এবং যোগফলের পরমমান, যোজ্যরাশিদ্বয়ের পরমমানের সমষ্টির সমান হইবে।

উদা. 1. $a=2,\ b=3,\ c=5$ হইলে, $-a,\ -bc,\ -a^2b$ এর যোগফলের মান নির্ণয় কর।

এখন, $a=2,\ bc=3\times5=15,\ a^2b=2^2\times3=4\times3=12.$

অতএব, $(-a)+(-bc)+(-a^2b)=(-2)+(-15)+(-12)$
$=-(2+15+12)=-29.$

উদা. 2. $a=3,\ b=-2,\ c=4,\ d=5,\ f=-6,\ g=-8$ হইলে, $(-3c)+(-a^3d)+(b+f+g)$ এর মান নির্ণয় কর।

এখন, $b+f+g=(-2)+(-6)+(-8)=-(2+6+8)=-16$;
$3c=3\times4=12$;
এবং $a^3d=3^3\times5=27\times5=135.$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা $=(-12)+(-135)+(-16)$
$=-(12+135+16)=-163.$

প্রশ্নমালা 7

1. $-2, -9$ এবং -11 এর যোগফল নির্ণয় কর।

2. $x=2, y=3, z=5$ হইলে, $-5x, -y$ এবং $-z$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

3. $x=-5$ এবং $y=-19$ হইলে, (i) $-7, x$ এবং y এর যোগফল নির্ণয় কর ; এবং (ii) সেই যোগফলের সহিত -10 যোগ করিলে ফল কত হইবে বল।

4. $a=-5, b=2, c=1$ হইলে, $2a-3(b+c)$ এর মান নির্ণয় কর।

5. $a=2, b=3, c=4$ হইলে, $(-a^2c^4)+(-a^4b^2)+\{-(c^2-a^2)\}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $a=1, b=2, c=3, d=-4, e=-5$ হইলে, $-3a^3b^3, d, e, -20c^2$ এবং $(d+e)$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

7. $a=2, b=5, c=4$ হইলে, $-a^4(b-c), -b^4(c-a)$ এবং $-c^4(b-a)$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

8. $a=3, b=5$ হইলে, $\{-(a^2-b^2)\}+\{-(a^3-b^3)\}+\{-(a^4-b^4)\}$ এর মান নির্ণয় কর।

9. $x=3, y=6, z=5$ হইলে, $-x^3(y^2-z^2)$, $-y^3(z^2-x^2)$ এবং $-z^3(y^2-x^2)$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

10. $a=60, b=4, c=2$ হইলে, $-\{a^4+b^4-c^4\}$, $-\{a^4+(b^4-c^4)\}$, $-\{a^4-b^4\times c^4\}$ এবং $-\{(a^4-b^4)\times c^4\}$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

35. একটি ঋণরাশি ও একটি ধনরাশির যোগফল-নির্ণয় : 33 নিয়মের চিত্রে, মনে কর, একজন লোক এক ঘণ্টায় O হইতে B পর্য্যন্ত যাইয়া তৎপরবর্ত্তী ঘণ্টায় A তে ফিরিয়া আসিল ; তাহা হইলে তাহার প্রথম ও দ্বিতীয় ঘণ্টায় অতিক্রান্ত পথের পরিমাণ অবশ্যই যথাক্রমে $+5$ ও -3 দ্বারা সূচিত হইবে ; কাজেই, O হইতে তাহার দুই ঘণ্টায় অতিক্রান্ত পথের পরিমাণ $(+5)+(-3)$ দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে। কিন্তু দুই ঘণ্টা পরে O হইতে তাহার দূরত্ব প্রকৃতপক্ষে OA, এবং ইহাকে $+2$ দ্বারা নির্দ্দেশ করিতে হইবে। অতএব, $(+5)+(-3)=+2$, অর্থাৎ $+(5-3)$.

আবার, লোকটি যদি প্রথম ঘণ্টায় O হইতে B পর্য্যন্ত যাইয়া তৎপরবর্ত্তী ঘণ্টায় বিপরীত দিকে চলিয়া A' তে উপনীত হয়, তাহা হইলে তাহার প্রথম ও দ্বিতীয় ঘণ্টায় অতিক্রান্ত পথের পরিমাণ যথাক্রমে $+5$ ও -7 দ্বারা সূচিত হইবে ; কাজেই দুই ঘণ্টা

পরে, O হইতে তাহার দূরত্ব $(+5)+(-7)$ দ্বারা নির্দ্দেশ করিতে হইবে। কিন্তু দুই ঘণ্টা পরে O হইতে তাহার দূরত্বের পরিমাণ (অর্থাৎ OA') -2 দ্বারা সূচিত হইবে।

অতএব, $(+5)+(-7)=-2$, অর্থাৎ, $-(7-5)$.

সাধারণভাবে বলিতে গেলে,

$(+a)+(-b)=+(a-b)$, যদি $a>b$ হয়,

অথবা, $=-(b-a)$, যদি $b>a$ হয়।

সুতরাং, একটি ঋণরাশি ও একটি ধনরাশি যোগ করিলে, যদি ঋণরাশির পরমমান ধনরাশির পরমমান অপেক্ষা **বড়** হয়, তবে যোগফল **ঋণরাশি**, এবং **ছোট** হইলে যোগফল **ধনরাশি** হইবে; এবং উভয় ক্ষেত্রেই, যোগফলের পরমমান যোজ্যরাশিদ্বয়ের পরমমানের বিয়োগফলের সমান হইবে।

অনুসি. 1. যেহেতু a অপেক্ষা b বড় হইলে, $a+(-b)=-(b-a)$; অতএব, $a=0$ হইলে, $+(-b)=-b$; অর্থাৎ, **'একটি ঋণরাশি যোগ করা'** অথবা, **'ঐ রাশির পরমমান বিয়োগ করা'** উভয়ই এক।

আবার, বিপরীতভাবে বলিলে, **'একটি ধনরাশি বিয়োগ করা'** এবং **'উহার সমান পরমমানবিশিষ্ট একটি ঋণরাশি যোগ করা'** উভয়ই এক।

টীকা। অতএব, a অপেক্ষা b বড় হইলেও '$a-b$' এর মান নির্ণয় করা সহজ ; কারণ, '$a-b$' সকল স্থলেই '$a+(-b)$' এর তুল্য ; কাজেই, এক্ষেত্রে $-(b-a)$ এর সমান। যথা, $3-8=3+(-8)=-(8-3)=-5$.

অনুসি. 2. প্রথম অনুসিদ্ধান্ত হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে, কতকগুলি রাশির যোগফল প্রকাশ করিতে হইলে, ঐ রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে স্ব স্ব চিহ্নযুক্ত করিয়া পর পর লিখিয়া যাইতে হয়। যথা, '$a+(-b)+c+(-d)$' এবং '$a-b+c-d$' উভয়ই একার্থবোধক।

উদা. 1. $a=2,\ b=4,\ c=3,\ d=1$ হইলে, $a-3b+2c-7d$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} a-3b+2c-7d &= a+(-3b)+2c+(-7d) \\ &= 2+(-12)+6+(-7) \\ &= -10+6+(-7) \\ &= -4+(-7)=-11. \end{aligned}$$

উদা. 2. $a=1, b=2, c=3, d=4$ হইলে, $a^2b-b^2c+c^2d-d^2a-bc^2$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(1^2\times 2)-(2^2\times 3)+(3^2\times 4)-(4^2\times 1)-(2\times 3^2)$

$=2-12+36-16-18=-10+36-16-18$

$=26-16-18=10-18=-8.$

প্রশ্নমালা 8

1. 117 ও -114 এর যোগফল নির্ণয় কর।

2. 218 ও -223 এর যোগফল নির্ণয় কর।

3. $x=8, y=25, z=13$ হইলে, $x-y+z$ এর মান নির্ণয় কর।

4. $x=2, y=5, z=1, u=3, v=-2$ হইলে, $3x, -6y, 2z, u$ এবং $14v$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

5. $m=4, n=6, q=2, r=-8$ হইলে, $3m-5n+6q+r$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $a=2, b=5, c=3, d=6$ হইলে, $-a^2c, bd^2, -cb^2$ এবং $-a^2d^2$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

7. $x=y=2$ হইলে, $2x^2y-3y^3x-5x^2y^2+x^3y^4$ এর মান নির্ণয় কর।

8. $a=3, b=5$ হইলে, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

9. $m=4, n=6$ হইলে, $m^5-5m^4n+10m^3n^2-10m^2n^3+5mn^4-n^5$ এর মান নির্ণয় কর।

10. $a=3, b=2$ হইলে, $a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$ এর মান নির্ণয় কর।

36. **রাশিসমূহের কোন নির্দিষ্ট ক্রমসন্নিবেশের উপর উহাদের যোগফল নির্ভর করে না** (অর্থাৎ, যোজ্যরাশিগুলি যে প্রকারেই সন্নিবেশিত হউক না কেন, যোগফল সকল ক্ষেত্রেই এক হইবে) :

মনে কর, একজন লোক কোন এক স্থান হইতে উত্তরে 6 মাইল পরিমিত পথ গমন করিয়া, পুনরায় সেই পথেই দক্ষিণদিকে 8 মাইল পথ পরিভ্রমণ করিল। ভ্রমণের পর অবশ্যই সে তাহার রওনা হওয়ার স্থান হইতে 2 মাইল দক্ষিণে আসিয়াছে।

অপরপক্ষে, সে যদি প্রথমে দক্ষিণে 8 মাইল পথ পরিভ্রমণ করিয়া তৎপরে সেই পথেই উত্তরে 6 মাইল পথ চলিয়া আসিত, তাহা হইলেও ভ্রমণের পর সে তাহার রওনা হওয়ার স্থান হইতে 2 মাইল দক্ষিণেই উপনীত হইত।

অতএব, দেখা যায় যে, $6+(-8)=(-8)+6,$

কারণ, প্রত্যেকেই -2 এর সমান;

অথবা সংক্ষেপে, $6-8=-8+6$; অন্যান্য ক্ষেত্রেও অনুরূপ ফলই পাওয়া যায়।

সুতরাং, সাধারণভাবে বলিতে গেলে,

$$a-b=-b+a.$$

আবার, যেহেতু $2-10+6=-8+6=-2,$

এবং $-10+6+2=-4+2=-2.$

সুতরাং, $2-10+6=-10+6+2$; এতাদৃশ সকল ক্ষেত্রেই অনুরূপ ফল পাওয়া যায়। ইহা হইতেই সাধারণভাবে বলা যায় যে, $a-b+c=-b+c+a.$

এইপ্রকারে দেখান যাইতে পারে যে,

$$\begin{aligned} a-b+c-d+e-f &= a+c+e-b-d-f \\ &= -b+e-d-f+c+a \\ &= \text{ইত্যাদি, ইত্যাদি।} \end{aligned}$$

37. কতকগুলি রাশির যোগফল নির্ণয় করিবার সময়ে, উহাদের কতক কতক এক এক ভাগে লইয়া রাশিসমূহকে বিভিন্ন বিভাগে (group এ) ভাগ করা যায়, এবং নির্ণেয় যোগফল ঐ বিভাগসমূহের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।

এখন, যেহেতু
$$\begin{aligned} & 3-7-8+6-4+2 \\ &= -4-8+6-4+2 \\ &= -12+6-4+2 \\ &= -6-4+2 \\ &= -10+2=-8; \end{aligned}$$

এবং
$$\begin{aligned} & (3-7)+(-8+6)+(-4+2) \\ &= -4+(-2)+(-2)=-8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3+(-7-8+6)+(-4+2) \\ &= 3+(-9)+(-2)=-8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3+(-7-8)+(6-4)+2 \\ &= 3+(-15)+2+2=-8. \end{aligned}$$

অতএব, $3-7-8+6-4+2$

$$=(3-7)+(-8+6)+(-4+2)$$
$$=3+(-7-8+6)+(-4+2)$$
$$=3+(-7-8)+(6-4)+2,$$ ইত্যাদি।

সকল ক্ষেত্রেই অনুরূপ ফল পাওয়া যাইবে।

সুতরাং, সাধারণভাবে বলা যায় যে, $a+b-c-d+e-f+g$ কে নিম্নলিখিত যে কোন প্রকারে প্রকাশ করা যায়ঃ

(1) $(a+b)+(-c-d)+e+(-f+g)$;

(2) $a+(b-c)-d+(e-f+g)$;

(3) $(a+b-c)+(-d+e-f)+g$;

(4) $a+(b-c-d)+e+(-f+g)$;

(5) $(a+b-c-d)+(e-f+g)$;

ইত্যাদি, ইত্যাদি।

অনুসি. 1. আবার, বিপরীতভাবে বলিলে, $(a+b)+(-c-d)+e+(-f+g)$ $=a+b-c-d+e-f+g$. অতএব, যোগের নিম্নলিখিত নিয়ম প্রবর্ত্তন করা যায়। যথা,

দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশিমালা যোগ করিতে হইলে, উহাদের পদগুলিকে স্ব স্ব চিহ্নযুক্ত করিয়া পর পর লিখিয়া উহাদের সমষ্টি নির্ণয় করিতে হয়।

অনুসি. 2. আবার যেহেতু $a-b+c-d+e-f$

$$=a+c+e-b-d-f \quad [\text{নিয়ম } 36]$$
$$=(a+c+e)+(-b-d-f).$$

সুতরাং, দেখা যায় যে,

কতকগুলি ধনরাশি ও কতকগুলি ঋণরাশির একত্র যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, ধনরাশিগুলিকে সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া (grouping together) এবং ঋণরাশিগুলিকেও সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া, এই সঙ্ঘ (group) দুইটির বীজগণিতীয় সমষ্টি লইলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়। যথা,

$$3-7+8-9+5-6$$
$$=(3+8+5)+(-7-9-6)$$
$$=16+(-22)$$
$$=-6.$$

উদাহরণ

উদা. 1. সরল কর : $5a-3b+2c-4a+2b-7c$.

প্রদত্ত রাশি $=5a-4a-3b+2b+2c-7c$ [নিয়ম 36]

$=(5a-4a)+(-3b+2b)+(2c-7c)$ [নিয়ম 37]

$=a+(-b)+(-5c)$

$=a-b-5c$.

উদা. 2. সরল কর :

$$3a^2b+5b^2c-6c^2a-10a^2b-7b^2c+8c^2a+4a^2b-b^2c+c^2a.$$

প্রদত্ত রাশি

$=3a^2b-10a^2b+4a^2b+5b^2c-7b^2c-b^2c-6c^2a+8c^2a+c^2a$

$=(3a^2b-10a^2b+4a^2b)+(5b^2c-7b^2c-b^2c)+(-6c^2a+8c^2a+c^2a)$

$=(-7a^2b+4a^2b)+(-2b^2c-b^2c)+(2c^2a+c^2a)$

$=(-3a^2b)+(-3b^2c)+(3c^2a)$

$=-3a^2b-3b^2c+3c^2a$.

টীকা। উপরিউক্ত প্রক্রিয়াতে লক্ষ্য করিবে যে, সদৃশ পদগুলির যোগফল নির্ণয় করার সময় প্রকৃতপক্ষে উহাদের সাংখ্য-সহগগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি লইয়া তাহার সহিত পদগুলির সাধারণ অক্ষরসমূহকে সংযুক্ত করা হইয়াছে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, $5b^2c-7b^2c-b^2c=-3b^2c$ পাওয়া গিয়াছে এবং স্পষ্টতঃ 5, -7 ও -1 এর বীজগণিতীয় যোগফল -3.

উদা. 3. সরল কর : $3a-2b+c$ ও $-5d+6e-f$; এবং $a=2$, $b=1$, $c=3$, $d=4$, $e=7$, $f=5$ হইলে, এই যোগফলের মান নির্ণয় কর।

নির্ণেয় যোগফল $=(3a-2b+c)+(-5d+6e-f)$

$=3a-2b+c-5d+6e-f$

$=6-2+3-20+42-5$

$=(6+3+42)+(-2-20-5)$

$=51+(-27)=24$.

38. মিশ্র রাশিসমূহের (Compound expression এর) যোগফল নির্ণয় করিবার সাধারণ নিয়ম : মিশ্র রাশিগুলিকে একটির নীচে একটি করিয়া এরূপভাবে সাজাও, যেন উহাদের সদৃশপদগুলি একই

স্তম্ভে (column এ) বসে; সর্ব্বনিম্ন রাশিটির নীচে একটি রেখা টানিয়া প্রত্যেক স্তম্ভের পদগুলির যোগফল ঐ রেখার নীচে লিখিয়া রাখিলেই নির্ণেয় যোগফল লেখা হইবে।

নিম্নলিখিত দৃষ্টান্ত দুইটি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী বুঝান যাইতেছে :

উদাহরণ

উদা. 1. যোগ কর : $3a-5b+7c-9d$, $-8c+5a-3d+7b$, $4d+2c-a$ এবং $2b-3c+6d$.

প্রথম রাশি $= 3a-5b+7c-9d$

দ্বিতীয় রাশি $= 5a+7b-8c-3d$ [নিয়ম 36]

তৃতীয় রাশি $= -a \quad +2c+4d$

চতুর্থ রাশি $= \quad 2b-3c+6d$

নির্ণেয় যোগফল $= 7a+4b-2c-2d$

উদা. 2. $a=498$, $b=3$, $c=2$, $d=19$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির যোগফলের মান নির্ণয় কর : $20a^2b^3-25b^3c^4+d^7$, $-22a^2b^3+19b^3c^4-3d^7$ এবং $2a^2b^3+7b^3c^4+2d^7$.

প্রথম রাশি $= 20a^2b^3-25b^3c^4+d^7$

দ্বিতীয় রাশি $= -22a^2b^3+19b^3c^4-3d^7$

তৃতীয় রাশি $= 2a^2b^3+7b^3c^4+2d^7$

যোগফল $= b^3c^4$

$= 3^3 \times 2^4 = 27 \times 16 = 432.$

প্রশ্নমালা 9

সরল কর (Simplify) :

1. $2x+3y-z-3x-2y+z.$
2. $9m^2-7n^2+5p^2+8n^2-4p^2-8m^2.$
3. $8a^2-5a^2b-7a^2+5c^2-2a^2+6a^2b-4c^2.$
4. $3abc-5c^2+6mnp^2-abc+7c^2-9mnp^2-2c^2.$
5. $-7a^3b-5b^2c^2+10a^3b-3b^2c^2+3df-a^3b-b^2c^2-5df.$

6. $8x^4y - 5xyz - 17x^4y + 20x^2y^2 - 2xyz - 35x^2y^2 + 3x^4y - 4xyz + 5x^2y^2$.

7. $9a^2bc - 7b^2ca + 5c^2ab + 3b^2ca - 5a^2bc - c^2ab$.

8. $20x^3mn - 33m^3nx + 14n^3xm - 37x^3mn - 47n^3xm + 54m^3nx - 8x^3mn + 13n^3xm - 15m^3nx + 20n^3xm$.

$a=9,\ b=10,\ c=12,\ d=5,\ k=2,\ m=3,\ n=4,\ x=6,\ y=7,\ z=8$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির সমষ্টির মান নির্ণয় কর :

9. $-k+3m+5n$ এবং $5d-4x-6y$.

10. $5m-2y-7b-8c$ এবং $3d+x-10a$.

11. $3k^2,\ -5m^2+7n^2,\ -2x+5b-c$ এবং $10d-7a$.

12. $-2k+3m-4n,\ -d-5x+6y$ এবং $3z-5a-3b+5c$.

13. $-km+az,\ bc-4md+y,\ -n^2-d^2+ab$ এবং $6kn-5y-7x+kmn$.

14. $k^3m-dnx,\ \ by^2-ckm-x^2d,\ \ -bz+3a^2-2m^4d$ এবং $5n^2-7bdz+2ak^2-3b^2d$.

15. $3m^4b-5a^2x-4b^2z,\ -13k^2b+4z^2d-7d^2n,\ -5c^2n+8b^2y+9d^3$ এবং $5az^2-7b^2c-4x^3b+8adn$.

যোগ কর (Add together) :

16. $a-2b+5c$ এবং $-7a+3b-8c$.

17. $-3x+5y-9z,\ 5x-3y+7z$ এবং $-2y+z$.

18. $x^3+3x^2-5x+4,\ \ 2x^3-6x^2+7x-8,\ \ -x^3+7x^2-2x+9$ এবং $5x^2+2$.

19. $3a-2b+7c-8d,\ \ 2c+6d-5a,\ \ 3b+d-10c,\ \ c-4b+a$ এবং $-7d+5b$.

20. $x^2+2xy+3y^2-x+y+2,\ \ -5x^2+y^2+2x-5,\ \ -3xy-7y^2+3y+1$ এবং $6x^2+xy-x-4y+2$.

$a=5,\ b=4,\ x=8,\ y=7$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

21. $(3x^3+5y^5-20a^2+49b^3)+(17a^2-27b^3-23x^3)+(-y^5+3b^3-3a^2)+(-23b^3-4y^5+7a^2+20x^3)$.

22. $(10a^2 - 26x^5y^4 + 30x^3b^5 + 17a^6y^7) + (35x^5y^4 + 16a^6y^7 - 304a^2 - 28x^3b^5) + (-8a^6y^7 - 9x^5y^4 - 7x^3b^5) + (5x^3b^5 - 25a^6y^7 + 289a^2)$.

23. $(2a^2 - 7b^2 + 9x^2 - 13y^2 + 15ab - 21xy) + (5y^2 + 8b^2 + 17xy - 6a^2 - 8ab - 20x^2) + (13x^2 - 20ab + 5a^2 - 16xy - 10y^2 - 2b^2) + (13ab - 2x^2 + 3b^2 + 23xy - a^2 + 18y^2)$.

24. $(29abx - 39bxy + 49xya - 59yab) + (29bxy + 49yab - 19abx - 39xya) + (2abx - 12xya + 6bxy + 24yab) + (3xya + 4bxy - 13abx - 14yab)$.

25. $(18a^2b^2 - 43b^2x^2 + 62x^2y^2 - 23abxy) + (39abxy + 28b^2x^2 - 25a^2b^2 - 42x^2y^2) + (19b^2x^2 + 37a^2b^2 - 25abxy + 35x^2y^2) + (9abxy - 29a^2b^2 - 55x^2y^2 - 4b^2x^2)$.

2. বিয়োগ বা ব্যবকলন (Subtraction)

39. সংজ্ঞা (Definition): কোন একটি রাশি b অপর কোন একটি রাশি a হইতে বিয়োগ করা হইয়াছে বলিলে ইহাই বুঝিতে হইবে যে, এমন একটি রাশি c পাওয়া গিয়াছে, যাহা b এর সহিত যোগ করিলে যোগফল a এর সমান হইবে। অর্থাৎ, **c যদি এরূপ হয় যে, $b + c = a$, তবে $c = a - b$.**

যে রাশি হইতে বিয়োগ করা হয়, তাহাকে **বিয়োজন** (minuend) এবং যে রাশি বিয়োগ করা হয়, তাহাকে **বিয়োজ্য** (subtrahend) বলে। একটি রাশি হইতে অপর একটি রাশি বিয়োগ করিলে যে রাশি পাওয়া যায়, তাহাকে রাশি দুইটির **বিয়োগফল** বা **অন্তরফল** (difference) বা **অবশিষ্ট** (remainder) বলে।

সুতরাং, $a - b = c$ হইলে, a কে বিয়োজন, b কে বিয়োজ্য এবং c কে বিয়োগফল বলা হয়।

40. কোন রাশি হইতে একটি ধনরাশি বিয়োগ করা, অথবা, উহার সহিত সমান পরমমান (absolute value)-বিশিষ্ট একটি ঋণরাশি যোগ করা, উভয়ই এক; এবং কোন এক রাশি হইতে একটি ঋণরাশি বিয়োগ করা, অথবা, প্রথম রাশির সহিত দ্বিতীয় রাশির সমান পরমমানবিশিষ্ট একটি ধনরাশি যোগ করা, উভয়ই এক।

যেহেতু $3 + 4 = 7$, সুতরাং, $7 - 3 = 4 = 7 + (-3)$;
এবং $6 + (-2) = 4$, সুতরাং, $4 - 6 = -2 = 4 + (-6)$.

সুতরাং, সাধারণভাবে প্রকাশ করিলে, $a-b=a+(-b)$; অর্থাৎ, কোনও রাশি হইতে একটি ধনরাশি বিয়োগ করা, বা উহার সহিত সমান পরমমানবিশিষ্ট একটি ঋণরাশি যোগ করা, উভয়ই এক।

আবার, যেহেতু $(-3)+5=2$,

সুতরাং, সংজ্ঞানুসারে, $2-(-3)=5=2+3$;

তদ্রূপ, যেহেতু $(-6)+(-4)=-10$,

সুতরাং, $(-10)-(-6)=-4=(-10)+6$.

সাধারণভাবে প্রকাশ করিলে, যেহেতু $(-b)+(a+b)=a$,

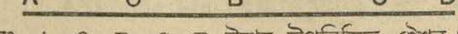
সুতরাং, $a-(-b)=a+b$;

অর্থাৎ, কোন একটি রাশি হইতে অপর একটি ঋণরাশি বিয়োগ করা, বা প্রথম রাশির সহিত দ্বিতীয় রাশির সমান পরমমানবিশিষ্ট একটি ধনরাশি যোগ করা, উভয়ই এক।

টীকা। $a-b$ একটি ধনরাশি হইলে, a কে b অপেক্ষা বৃহত্তর বলা হয়। অতএব, -4, -5 অপেক্ষা বড় ; কারণ, $(-4)-(-5)=-4+5=1$.

তদ্রূপ, $-5>-7$, $-10>-20$ ইত্যাদি। সুতরাং, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8 ইত্যাদি এই সংখ্যা-শ্রেণীতে যে কোন একটি সংখ্যা তাহার পূর্ব্ববর্ত্তী যে কোন একটি সংখ্যা অপেক্ষা ছোট।

41. লৈখিক দৃষ্টান্ত : মনে কর, AD পশ্চিম হইতে পূর্ব্বাভিমুখী



একটি রেলপথ, এবং A, O, B, C, D ইহার উপরিস্থিত ষ্টেশন। উহারা এরূপভাবে অবস্থিত যে, $AO=OB=20$ মাইল, $BC=30$ মাইল এবং $CD=10$ মাইল। মনে কর, কোন লোক দুই দিনে O হইতে C তে আসিয়া পৌছিয়াছে। তাহা হইলে (প্রথম দিনে অতিক্রান্ত পথ) + (দ্বিতীয় দিনে অতিক্রান্ত পথ) = 50 মাইল ; সুতরাং, 50 মাইল − (প্রথম দিনে অতিক্রান্ত পথ) = দ্বিতীয় দিনে অতিক্রান্ত পথ।

এখন, (i) যদি লোকটি প্রথম দিনে O হইতে B পর্য্যন্ত যায়, অর্থাৎ O হইতে পূর্ব্বদিকে 20 মাইল পথ অতিক্রম করে, তাহা হইলে দ্বিতীয় দিনে তাহাকে B হইতে C পর্য্যন্ত পূর্ব্বদিকে 30 মাইল পথ অতিক্রম করিতে হইয়াছে। অতএব, দেখা যাইতেছে যে, (50 মাইল) − (20 মাইল) = 30 মাইল।

আবার, (ii) যদি প্রথম দিনে লোকটি O হইতে A পর্য্যন্ত যাইত, অর্থাৎ পশ্চিমদিকে 20 মাইল পথ অতিক্রম করিত, তাহা হইলে দ্বিতীয় দিনে তাহাকে A হইতে C পর্য্যন্ত পূর্ব্বদিকে 70 মাইল পথ অতিক্রম করিতে হইত। অতএব, দেখা যাইতেছে যে, (50 মাইল) − (−20 মাইল) = 70 মাইল।

আবার, (iii) যদি প্রথম দিনে লোকটি O হইতে D পর্য্যন্ত যাইত, অর্থাৎ **পূর্ব্বদিকে** 60 মাইল পথ অতিক্রম করিত, তাহা হইলে দ্বিতীয় দিনে তাহাকে D হইতে C পর্য্যন্ত **পশ্চিমদিকে** 10 মাইল পথ অতিক্রম করিতে হইত। অতএব, দেখা যাইতেছে যে, (50 মাইল) − (60 মাইল) = − 10 মাইল।

সুতরাং, 'এক মাইল' কে দূরত্বের একক ধরিলে, উপরিউক্ত দৃষ্টান্তগুলি হইতে দেখিতে পাওয়া যায় যে,

$$\left.\begin{array}{l} 50 - \quad 20 = \quad 30 \\ 50 - (-20) = \quad 70 \\ \text{এবং } 50 - \quad 60 = -10 \end{array}\right\}$$

উদা. 1. যদি $a=5,\ b=-2,\ c=-3$ হয়, তবে $a-b+c$ এর মান কত ?

$$a-b+c=5-(-2)+(-3)$$
$$=5+2-3=4.$$

উদা. 2. যদি $a=-2,\ b=-3,\ c=-4$ হয়, তবে $-a-(-b)+c$ এর মান কত ?

$$-a-(-b)+c=-a+b+c$$
$$=-(-2)+(-3)+(-4)$$
$$=2-3-4=-5.$$

প্রশ্নমালা 10

$a=3,\ b=-5,\ c=-6,\ d=-8$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর (Find the values of) :

1. $-a+b-c+d.$ 2. $a+(-b)+c-d.$ 3. $c-d-(-b)-a.$
4. $c-(-d)+b-a.$ 5. $-(-a)+b-(-c)-d.$

$m=-47,\ n=50,\ x=-154,\ y=-234$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর (Find the values of) :

6. $n-m-(-x)+y.$ 7. $-(-m)+y-(-n)-x.$
8. $-(-x)+m-y-(-n).$ 9. $-(-y)-m-x-(-n).$
10. $-(-n)-y-(-x)-m.$

42. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$a-(b+c)=a-b-c,$$

এবং $$a-(b-c)=a-b+c.$$

যেহেতু $(b+c)+(a-b-c)=a,$

সুতরাং, সংজ্ঞানুসারে, $a-(b+c)=a-b-c.$

আবার, যেহেতু $(b-c)+(a-b+c)=a,$

$$\therefore \quad a-(b-c)=a-b+c.$$

অনুসি.। একটি বীজগণিতীয় রাশিমালা হইতে অপর একটি বীজগণিতীয় রাশিমালা বিয়োগ করিবার নিয়ম, নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় :

বিয়োজ্য রাশিমালার প্রত্যেকটি পদের চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিয়া (অর্থাৎ '+' কে '−' এবং '−' কে '+' করিয়া) পদগুলিকে বিয়োজনের পদগুলির পর একে একে লিখিয়া গেলে যে রাশিমালা পাওয়া যায়, তাহাই বিয়োগফল হইবে। যথা,

$a-2b+c$ হইতে $2a+3b-5c$ বিয়োগ করিলে,

বিয়োগফল $=a-2b+c-2a-3b+5c$

$=-a-5b+6c.$

উদা. 1. $2a+b-8c$ হইতে $-3a+2b-5c$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=2a+b-8c+3a-2b+5c$

$=(2a+3a)+(b-2b)+(-8c+5c)$

$=5a+(-b)+(-3c)$

$=5a-b-3c.$

উদা. 2. $-3a^2+2ab-4b^2$ হইতে $2a^2+3ab-5b^2$ বিয়োগ কর।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=-3a^2+2ab-4b^2-2a^2-3ab+5b^2$

$=(-3a^2-2a^2)+(2ab-3ab)+(-4b^2+5b^2)$

$=-5a^2-ab+b^2.$

43. কোন একটি মিশ্র রাশি হইতে অপর একটি মিশ্র রাশি বিয়োগ করিবার সাধারণ নিয়ম : বিয়োজ্য রাশিটিকে বিয়োজন রাশির নীচে এরূপভাবে স্থাপন কর, যেন রাশিদ্বয়ের সদৃশপদগুলি একই স্তম্ভে বসে। পরে, বিয়োজ্যের নীচে একটি রেখা টান। এখন, বিয়োজ্যের প্রত্যেকটি পদের চিহ্ন মনে মনে পরিবর্ত্তিত করিয়া, প্রত্যেক স্তম্ভের যোগফল নির্ণয় করিয়া রেখাটির নীচে লেখ। তাহা হইলে, রেখাটির নীচে লিখিত রাশিটিই নির্ণেয় বিয়োগফল হইবে।

উদা. 1. $x^2-2xy+3y^2$ হইতে $-2x^2+3xy-y^2$ বিয়োগ কর।

বিয়োজন $= \quad x^2-2xy+3y^2$

বিয়োজ্য $= -2x^2+3xy-y^2$

$\therefore$ বিয়োগফল $= \quad 3x^2-5xy+4y^2$

টীকা। লক্ষ্য করিতে হইবে যে, বিয়োজ্যের পদগুলির চিহ্ন কার্য্যতঃ পরিবর্ত্তিত করিয়া লিখিত হইতেছে না; এই চিহ্নগুলিকে পরিবর্ত্তন করিয়া স্ব স্ব স্তম্ভস্থিত পদগুলির যোগসাধন করা, মানসিক প্রক্রিয়া মাত্র।

উদা. 2. $3x^2+2y^2-7a^2$ হইতে $a^2-3ab+5x^2-y^2$ বিয়োগ কর।

বিয়োজন $= \quad 3x^2+2y^2-7a^2$

বিয়োজ্য $= \quad 5x^2-y^2+a^2-3ab$

$\therefore$ বিয়োগফল $= -2x^2+3y^2-8a^2+3ab$

প্রশ্নমালা 11

বিয়োগ কর (Subtract):

1. $3a+2b-c$ হইতে $a-b+c$.
2. $-a-2b+8c$ হইতে $2a-5b+4c$.
3. $2x+3y-4z$ হইতে $-x+y-z$.
4. $7m^2-8m-1$ হইতে $5m^2-6m+3$.
5. $3x^2-y^2+2z^2$ হইতে $x^2-2y^2+3z^2$.
6. $2y^2-3xy+x^2$ হইতে $4y^2+4xy-2x^2$.
7. $a^2-5ab-8b^2$ হইতে $-3a^2+2ab-7b^2$.
8. $5bc-c^2+2xy$ হইতে $-2bc+6c^2-8xy$.
9. x^3-3x^2+6x+7 হইতে $2x^3-4x^2+7x+5$.

কত যোগ করিলে (What is to be added to):

10. $x+2y+z$, z তে পরিণত হইবে?
11. $-2x+5y-4z$, $x+y+z$ তে পরিণত হইবে?
12. $3m^2+5m-6$, m^2 তে পরিণত হইবে?
13. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, a^3+b^3 তে পরিণত হইবে?
14. $a^4-2a^2b^2+b^4$, a^4+b^4 তে পরিণত হইবে?
15. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল a^3-b^3 হইবে?

44. বন্ধনী-অপসারণ (Removal) ও স্থাপন (Insertion) :

(ক) বন্ধনী-অপসারণের নিয়মাবলী :

(১) বন্ধনীর পূর্ব্বে '+' চিহ্ন থাকিলে, উহার অন্তর্ব্বর্ত্তী রাশিমালার পদগুলির চিহ্ন পরিবর্ত্তন না করিয়াই বন্ধনী অপসারণ করা যাইতে পারে (যেন বন্ধনীর অস্তিত্বের কোন মূল্যই নাই) ;

(২) বন্ধনীর পূর্ব্বে '−' চিহ্ন থাকিলে, উহার অন্তর্ব্বর্ত্তী রাশিমালার প্রত্যেকটি পদের চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিয়া (অর্থাৎ '+' চিহ্নকে '−' চিহ্নে এবং '−' চিহ্নকে '+' চিহ্নে পরিবর্ত্তন করিয়া) বন্ধনী অপসারণ করিতে হয়।

ইহার কারণ এই যে, বন্ধনীর পূর্ব্বে '+' চিহ্ন থাকিলে, বন্ধনীর মধ্যবর্ত্তী রাশিমালাকে উহার পূর্ব্ববর্ত্তী রাশির সহিত যোগ করিতে হয়, এবং বন্ধনীর পূর্ব্বে '−' চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীর মধ্যগত রাশিমালাকে উহার পূর্ব্ববর্ত্তী রাশি হইতে বিয়োগ করিতে হয়।

যথা,

$$a-b+(c-d+e)=a-b+c-d+e\,;$$

কিন্তু, $a-b-(c-d+e)=a-b-c+d-e.$

(খ) বন্ধনী-স্থাপনের নিয়মাবলী :

(১) বন্ধনীর পূর্ব্বে '+' চিহ্ন দিয়া, স্ব স্ব চিহ্নযুক্ত যে কোন সংখ্যক পদকে বন্ধনীর অন্তর্ব্বর্ত্তী করা যায় ;

(২) বন্ধনীর পূর্ব্বে '−' চিহ্ন দিয়াও যে কোন সংখ্যক পদকে বন্ধনীর অন্তর্ব্বর্ত্তী করা যায় ; কিন্তু এক্ষেত্রে সকল পদগুলির চিহ্নই পরিবর্ত্তন করিয়া লইতে হয়। যথা,

$$a-b+c-d+e-f=a-b-(-c+d-e+f).$$

টীকা। আমরা অনেক সময় বন্ধনীর ভিতরেও বন্ধনীর ব্যবহার দেখিতে পাই। যথা, $2a-[3b-\{4c-(5d-6e)\}]$; ইহার অর্থ এই যে, { } (ধনুর্ব্বন্ধনীর) ভিতরের রাশিটিকে $3b$ হইতে বিয়োগ করিতে হইবে এবং এই বিয়োগফল $2a$ হইতে বাদ দিতে হইবে। আবার, { } (ধনুর্ব্বন্ধনীর) ভিতরের রাশিটি নির্ণয় করিতে হইলে, লঘুবন্ধনীর ভিতরের রাশি '$5d-6e$' কে $4c$ হইতে বিয়োগ করিতে হইবে।

এইপ্রকার একাধিক বন্ধনীসংযুক্ত রাশির বন্ধনী অপসারণ করিতে হইলে, শিক্ষার্থিগণের পক্ষে প্রথমে সর্ব্বমধ্যস্থিত বন্ধনী, তৎপরে তাহার বহির্ব্বর্ত্তী বন্ধনী, তৎপরে তাহার বহির্ব্বর্ত্তী বন্ধনী, ইত্যাদিক্রমে অপসারণ করাই সুবিধাজনক।

উদা. 1. সরল কর : $a-\{b-(c-d)\}$.

$$a-\{b-(c-d)\}=a-\{b-c+d\}$$
$$=a-b+c-d.$$

উদা. 2. সরল কর : $a-[b-\{c-(d-e)\}-f]$.

$$\begin{aligned} a-[b-\{c-(d-e)\}-f] &= a-[b-\{c-d+e\}-f] \\ &= a-[b-c+d-e-f] \\ &= a-b+c-d+e+f. \end{aligned}$$

উদা. 3. সরল কর : $a+[-b-\{c-(d-\overline{e-f})-g\}-h]$.

$$\begin{aligned} a+[-b-\{c-(d-\overline{e-f})-g\}-h] &= a+[-b-\{c-(d-e+f)-g\}-h] \\ &= a+[-b-\{c-d+e-f-g\}-h] \\ &= a+[-b-c+d-e+f+g-h] \\ &= a-b-c+d-e+f+g-h. \end{aligned}$$

উদা. 4. সরল কর : $2a-[3a+\{4b-(2a-b)+5a\}-7b]$.

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= 2a-[3a+\{4b-2a+b+5a\}-7b] \\ &= 2a-[3a+\{5b+3a\}-7b] \\ &= 2a-[3a+5b+3a-7b] \\ &= 2a-[6a-2b] \\ &= 2a-6a+2b \\ &= -4a+2b. \end{aligned}$$

উদা. 5. $a-[-b-\{c-(d-\overline{e-f})\}]$ কে প্রথমে [ ], তৎপরে { }, তৎপরে ( ), এবং সর্ব্বশেষে '—' অপসারণ করিয়া সরল কর :

$$\begin{aligned} a-[-b-\{c-(d-\overline{e-f})\}] &= a+b+\{c-(d-\overline{e-f})\} \\ &= a+b+c-(d-\overline{e-f}) \\ &= a+b+c-d+\overline{e-f} \\ &= a+b+c-d+e-f. \end{aligned}$$

টীকা। [ ] এই বন্ধনীর মধ্যে দুইটি পদ আছে; যথা, $-b$ এবং $-\{c-(d-\overline{e-f})\}$. এখন যেহেতু [ ] এই বন্ধনীর পূর্ব্বে '$-$' চিহ্ন আছে, অতএব ইহাকে অপসারণ করিতে হইলে উভয় পদেরই চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিতে হইবে; কাজেই এই বন্ধনী অপসারণ করিয়া $a+b+\{c-(d-\overline{e-f})\}$ রাশিটি পাওয়া গেল। অন্যান্য বন্ধনী-অপসারণের যুক্তিও অনুরূপ। লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, এক সময় কেবলমাত্র একটি বন্ধনীই অপসারণ করিতে হয়।

উদা. 6. সরল কর : $[a-\{b-(c-d)\}]-[2a-\{3b+(2c-4d)\}]$.

এখন, $a-\{b-(c-d)\}=a-\{b-c+d\}=a-b+c-d$;

এবং $2a-\{3b+(2c-4d)\}=2a-\{3b+2c-4d\}$

$=2a-3b-2c+4d$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=[a-b+c-d]-[2a-3b-2c+4d]$

$=a-b+c-d-2a+3b+2c-4d$

$=-a+2b+3c-5d$.

উদা. 7. প্রতিক্ষেত্রেই বন্ধনীর পূর্ব্বে '−' চিহ্ন দিয়া $a+b-c+d-e-f$ রাশিমালার প্রথম তিনটি পদ এক বন্ধনীর মধ্যে এবং শেষের তিনটি পদ আর এক বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন কর; এবং এই বন্ধনীদ্বয়ের প্রত্যেকটির মধ্যস্থিত তিনটি পদের শেষের দুইটিকে আর এক অন্তর্ব্বর্ত্তী বন্ধনীর ভিতর স্থাপন কর; এই শেষোক্ত বন্ধনীর পূর্ব্বেও যেন '−' চিহ্ন থাকে।

নির্দ্দেশ অনুসারে,

$$a+b-c+d-e-f=-\{-a-b+c\}-\{-d+e+f\}$$
$$=-\{-a-(b-c)\}-\{-d-(-e-f)\}.$$

প্রশ্নমালা 12

সরল কর (Simplify) :

1. $2a-3b-(4a-6b)+(-2a+5b)$. **2.** $x+(-y+4x)-(-2x+3y)$.

3. $-(5x-y)+(-3x+y)-(2y-6x)$. **4.** $3a-\{6a-(2b-a)\}$.

5. $-a-\{2b-(6a+4b)\}$. **6.** $2a-\{5b-\overline{7b-2a}\}$.

7. $3-\{5-(6-\overline{7-9})\}$. **8.** $-2-[-3-\{-4-(-5-6)\}]$.

9. $-a-[-3b-\{-2a-(-a-4b)\}]$.

10. $a-[2b-\{3c-(a-\overline{2b-3c})\}]$.

11. $3x-[5y-\{10z-(5x-\overline{10y-3z})\}]$.

12. $-a-[-b-\{-c-(-\overline{a-b-c})\}]$.

বিপরীতক্রমে বন্ধনী অপসারণ করিয়া (অর্থাৎ প্রথমে বহির্ব্বন্ধনী এবং সর্ব্বশেষে অন্তর্ব্বন্ধনী অপসারণ করিয়া) (Removing the brackets in the reverse order) নিম্নলিখিত রাশিগুলি সরল কর :

13. $2x-[5y-\{9x-(10y-4x)\}]$. **14.** $-5a-[3b-\{6a-(5b-7a)\}]$.

15. $-7m-[3n-\{8m-(4n-10m)\}]$.

16. $-2a-[-4b-\{-6c-(-8a-\overline{-10b-12c})\}]$.

17. $-3x-[-5y-\{-7z-(-9x-\overline{-11y-13z})\}]$.

18. $-2x-[-4y-\{-6z-(-3x-\overline{-5y-7z})\}]$.

19. $-x-[-3y+\{-5z-(-2x+\overline{-4y-6z})\}]$.

20. $-2a+[-5b-\{-8c+(-3a-\overline{-6b+9c})\}]$.

21. $-x+[-5y-\{-9z+(-3x-\overline{-7y+11z})\}]$.

সরল কর (Simplify) :

22. $\{2a-(3b-5c)\}-[a-\{2b-(c-4a)\}-7c]$.

23. $[x-\{y-(z-x)\}-(y-z)]-[z-\{x-(y-z)\}]$.

24. $[2a-(b-c)-\{3b-(2a-c)\}-\{-2a+(c-4b)\}]$
$$-[-3b-(2a-4c)+\{6c-(2b-3a)\}-\{-5c+(6a-7b)\}].$$

'$a-b-c+d-m+n-x+y-z$' রাশিমালার :

25. পূর্ব্বে '−' চিহ্ন থাকে, এরূপ এক বন্ধনীর ভিতর ২য়, ৩য় ও ৪র্থ পদকে স্থাপন কর ; এবং পূর্ব্বে '+' চিহ্ন থাকে, এরূপ এক বন্ধনীর ভিতর ৫ম, ৬ষ্ঠ ও ৭ম পদকে স্থাপন কর।

26. প্রথম পদ ব্যতীত সকল পদগুলিকে, পূর্ব্বে '−' চিহ্ন থাকে, এরূপ এক বন্ধনীর ভিতর স্থাপন কর ; এবং বন্ধনীর মধ্যস্থিত পদগুলির শেষের চারিটি পদকে, পূর্ব্বে '+' চিহ্ন থাকে, এরূপ এক বন্ধনীর ভিতর স্থাপন কর।

27. পূর্ব্বে কোন চিহ্ন না থাকে, এরূপ এক বন্ধনীর ভিতর প্রথম পাঁচটি পদ এবং পূর্ব্বে '−' চিহ্ন থাকে, এরূপ এক বন্ধনীর ভিতর শেষের চারিটি পদ স্থাপন কর, এবং এই বন্ধনীদ্বয়ের প্রত্যেকটির মধ্যস্থিত পদগুলির শেষের তিনটিকে, পূর্ব্বে '−' চিহ্ন থাকে, এরূপ এক বন্ধনীর ভিতর স্থাপন কর।

28. পূর্ব্বে '−' চিহ্ন থাকে, এরূপ এক একটি বন্ধনীর ভিতর, প্রথম হইতে তিনটি তিনটি করিয়া পদ স্থাপন কর ; এবং এই বন্ধনীগুলির প্রত্যেকটির মধ্যস্থিত পদ তিনটির শেষের দুইটিকে, পূর্ব্বে '−' চিহ্নবিশিষ্ট বন্ধনীর ভিতর স্থাপন কর।

3. গুণন (Multiplication)

45. **সংজ্ঞা :** যে প্রক্রিয়া দ্বারা 1 (unity) কে কোন একটি নির্দ্দিষ্ট সংখ্যায় পরিণত করা হয়, সেই প্রক্রিয়া অন্য একটি নির্দ্দিষ্ট সংখ্যার উপর প্রয়োগ করিলে, শেষোক্ত সংখ্যাটিকে প্রথমোক্ত সংখ্যাটি দ্বারা গুণ করা হইল, বলা হয়। যথা,

যেহেতু $4=1+1+1+1$,

অতএব, $4\times x$ বা $4x=x+x+x+x$.

তদ্রূপ,

$$\left.\begin{aligned} 4\times 5&=5+5+5+5 &&= 20\\ 3\times 6&=6+6+6 &&= 18\\ 5\times 3&=3+3+3+3+3 &&= 15\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad \text{I}$$

$$\left.\begin{aligned} 3\times(-5)&=(-5)+(-5)+(-5) &&=-15\\ 4\times(-3)&=(-3)+(-3)+(-3)+(-3) &&=-12\\ 5\times(-4)&=(-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4) &&=-20\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad \text{II}$$

আবার যেহেতু $-4=-1-1-1-1$,

অতএব, $(-4)\times x=-x-x-x-x$.

তদ্রূপ,

$$\left.\begin{aligned} (-4)\times 5&=-5-5-5-5 &&=-20\\ (-3)\times 6&=-6-6-6 &&=-18\\ (-5)\times 3&=-3-3-3-3-3 &&=-15\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad \text{III}$$

আবার,

$$\left.\begin{aligned} (-3)\times(-5)&=-(-5)-(-5)-(-5)\\ &=5+5+5 &&= 15\\ (-4)\times(-3)&=-(-3)-(-3)-(-3)-(-3)\\ &=3+3+3+3 &&= 12\\ (-5)\times(-4)&=-(-4)-(-4)-(-4)-(-4)-(-4)\\ &=4+4+4+4+4 &&= 20\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad \text{IV}$$

উপরিউক্ত I, II, III ও IV এ প্রতিপন্ন নিয়মসমূহ নিম্নলিখিত লৈখিক-দৃষ্টান্তটি হইতে পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইবে।

মনে কর, একখানা মোটর-গাড়ী, A, একটি সোজা রাস্তা ধরিয়া পশ্চিমদিক হইতে পূর্ব্বদিকে ঘণ্টায় 30 মাইল গতিতে চলিতে চলিতে দিবা ঠিক 12 টার সময় উক্ত রাস্তার উপরিস্থিত কোন একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু 'O' অতিক্রম করিয়া গেল; এবং অপর একখানি মোটর-গাড়ী, B, পূর্ব্বদিক হইতে পশ্চিমদিকে ঘণ্টায় 30 মাইল গতিতে উক্ত রাস্তা ধরিয়া চলিতে চলিতে দিবা 12 টার সময় উক্ত 'O' বিন্দু অতিক্রম করিল।

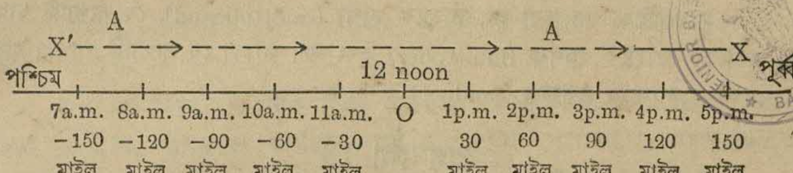
বেলা 5 টার সময় O বিন্দু হইতে গাড়ী দুইখানির দূরত্ব কত তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। সকাল 7 টার সময়ই বা উহারা O বিন্দু হইতে কত দূরে ছিল, তাহাও নির্ণয় করিতে হইবে।

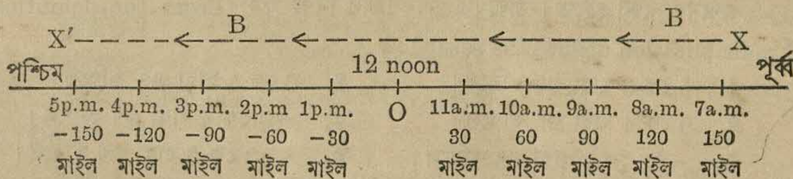
মনে রাখিবে যে, সকল ক্ষেত্রেই,

গতিবেগ × অতিবাহিত সময় = অতিক্রান্ত পথ।

মনে কর, "পশ্চিম হইতে পূর্ব্বাভিমুখী গতি"কে "ধনাত্মক গতি" এবং দিবা 12 টার পরবর্ত্তী সময়"কে "ধনাত্মক সময়" কল্পনা করা হইল; তাহা হইলে, উহাদের বিপরীত প্রকৃতিবিশিষ্ট গতি ও সময়কে, অর্থাৎ, "পূর্ব্ব হইতে পশ্চিমাভিমুখী গতি"কে এবং "দিবা 12 টার পূর্ব্ববর্ত্তী সময়"কে "ঋণাত্মক-গতি" ও "ঋণাত্মক-সময়" বলিয়া গণ্য করিতে হইবে। তাহা হইলে, O হইতে পূর্ব্বাভিমুখী দূরত্ব (অতিক্রান্ত পথ) কে 'ধনাত্মক' এবং O হইতে পশ্চিমাভিমুখী দূরত্ব (অতিক্রান্ত পথ) কে "ঋণাত্মক" ধরিতে হইবে।

স্পষ্টতঃ, বেলা 5 টার সময় (অর্থাৎ, 12 টার পর 5 ঘণ্টা অতিবাহিত হইলে),





A-গাড়ীখানি X বিন্দুতে উপনীত হইবে; এবং X বিন্দুর দূরত্ব O বিন্দুর পূর্ব্বদিকে 150 মাইল; অতএব, উহা 'ধনাত্মক'।

কাজেই, A-গাড়ীর সম্পর্কে,

(+30 মা. গতিবেগ) × (+5 ঘ. সময়) = +150 মাইল; ··· (i)

আবার, B-গাড়ীখানি বেলা 5 টার সময় (অর্থাৎ, 12 টার পর 5 ঘণ্টা অতিবাহিত হইলে), X' বিন্দুতে উপনীত হইবে। O হইতে X' বিন্দুর দূরত্ব 150 মাইল; এবং X' বিন্দু O বিন্দুর পশ্চিমে অবস্থিত বলিয়া, উক্ত দূরত্ব 'ঋণাত্মক'।

কাজেই, B-গাড়ীর সম্পর্কে,

(−30 মা. গতিবেগ) × (+5 ঘ. সময়) = −150 মাইল; ··· (ii)

তদ্রূপ, সকাল 7 টার সময় (অর্থাৎ, 12 টার, 5 ঘণ্টা পূর্ব্ববর্ত্তী সময় অথবা 12 টার '−5' ঘণ্টা পরবর্ত্তী সময়), A-গাড়ী ও B-গাড়ী যথাক্রমে X' এবং X বিন্দুতে ছিল।

সুতরাং, O বিন্দু হইতে সকাল 7 টার সময় A-গাড়ীর দূরত্ব,

(+30 মা. গতিবেগ) × (−5 ঘ. সময়) = −150 মাইল, ··· (iii)

এবং O বিন্দু হইতে সকাল 7 টার সময় B-গাড়ীর দূরত্ব,

$$(-30 \text{ মা. গতিবেগ}) \times (-5 \text{ ঘ. সময়}) = +150 \text{ মাইল।} \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

(i), (ii), (iii) ও (iv) হইতে, স্পষ্টতঃ দেখা যায় যে,

$$(+30) \times (+5) = +150\ ;$$
$$(-30) \times (+5) = -150\ ;$$
$$(+30) \times (-5) = -150\ ;$$
$$(-30) \times (-5) = +150.$$

যে সংখ্যাটিকে গুণ করা হয়, তাহাকে **গুণ্য** (multiplicand), যে সংখ্যাটি দ্বারা গুণ করা হয়, তাহাকে **গুণক** (multiplier) এবং গুণ করিয়া যে সংখ্যাটি পাওয়া যায়, তাহাকে ঐ সংখ্যাদ্বয়ের **গুণফল** (product) বলে।

প্রশ্নমালা 13

গুণনের সংজ্ঞা হইতে নিম্নলিখিত গুণফলগুলি নির্ণয় কর (From the definition of multiplication deduce the result) :

1. 5 কে 3 দ্বারা গুণ করিলে।
2. 6 কে 3 দ্বারা গুণ করিলে।
3. 9 কে 4 দ্বারা গুণ করিলে।
4. -8 কে 4 দ্বারা গুণ করিলে।
5. -15 কে 3 দ্বারা গুণ করিলে।
6. -13 কে 6 দ্বারা গুণ করিলে।
7. 8 কে -3 দ্বারা গুণ করিলে।
8. 7 কে -5 দ্বারা গুণ করিলে।
9. 15 কে -3 দ্বারা গুণ করিলে।
10. -9 কে -4 দ্বারা গুণ করিলে।
11. -12 কে -5 দ্বারা গুণ করিলে।
12. -16 কে -4 দ্বারা গুণ করিলে।

46. গুণনে চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়ম (Law of Signs in multiplication) : পূর্ব্বোক্ত (অর্থাৎ 45) নিয়মের ব্যাখ্যা হইতে পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইতেছে যে, a এবং b দুইটি অখণ্ড সংখ্যা (whole number) হইলে,

$$\left.\begin{aligned}(+a) \times (+b) &= +(ab)\\ (+a) \times (-b) &= -(ab)\\ (-a) \times (+b) &= -(ab)\\ (-a) \times (-b) &= +(ab)\end{aligned}\right\}$$

অতএব, দুইটি অখণ্ড সংখ্যার গুণফলে, গুণ্য ও গুণকের চিহ্ন সদৃশ হইলে গুণফলে ধনচিহ্ন (+), এবং অসদৃশ হইলে গুণফলে ঋণচিহ্ন (−), হইবে।

সংখ্যা দুইটি অখণ্ড না হইয়া ভগ্নাংশ হইলেও অনুরূপ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যাইবে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, যেহেতু $-\frac{2}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$, অর্থাৎ যেহেতু 1 (unity) এর তিন

ভাগের এক ভাগকে পর পর দুইবার বাদ দিলে $-\frac{2}{3}$ বাদ দেওয়া হয়; অতএব, 'কোন একটি সংখ্যা x কে $-\frac{2}{3}$ দ্বারা গুণ করা'এর অর্থ 'x এর তিন ভাগের এক ভাগ পর পর দুইবার বাদ দেওয়া'।

$$\therefore \quad (-\tfrac{2}{3}) \times x = -\frac{x}{3} - \frac{x}{3} = -\frac{2x}{3}.$$

অতএব, $(-\frac{2}{3}) \times \frac{4}{5} = -\frac{4}{15} - \frac{4}{15} = -\frac{8}{15}$,

তদ্রূপ, $(-\frac{2}{3}) \times (-\frac{4}{5}) = -(-\frac{4}{15}) - (-\frac{4}{15})$

$= \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$; ইত্যাদি।

অতএব, গুণনের চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়ম আরও ব্যাপকভাবে নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায়। যথা,

গুণ্য ও গুণকের সদৃশ চিহ্ন হইলে, গুণফলে ধনচিহ্ন এবং অসদৃশ চিহ্ন হইলে, গুণফলে ঋণচিহ্ন হইবে; অথবা সংক্ষেপে, সদৃশ চিহ্নদ্বয় গুণফলে '+' এবং অসদৃশ চিহ্নদ্বয় গুণফলে '−' চিহ্ন উৎপন্ন করে।

অনুসি.। যেহেতু $(-x) \times (-x) = x^2$ এবং $(+x) \times (+x) = x^2$, অতএব, x^2 এর বর্গমূল '$+x$', বা, '$-x$,' উভয়ই হইতে পারে। অতএব, প্রত্যেক বীজগণিতীয় রাশিরই দুইটি বর্গমূল (square-root) থাকে, যাহাদের পরমমান সমান কিন্তু যাহারা বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট।

উদা.। $a = -2, b = -3, c = -4$ এবং $d = 5$ হইলে, $(a^2b - cd)(c^2 - d^2)$ রাশিটিকে সরল কর।

যেহেতু $a^2b = (-2)^2 \times (-3) = 4 \times (-3) = -12$,

এবং $cd = (-4) \times 5 = -20$;

$\therefore \quad a^2b - cd = -12 - (-20) = -12 + 20 = 8. \quad \cdots$ (ক)

আবার যেহেতু $c^2 = (-4)^2 = 16$,

এবং $d^2 = (5)^2 = 25$;

$\therefore \quad c^2 - d^2 = 16 - 25 = -9. \quad \cdots \quad \cdots$ (খ)

অতএব, (ক) ও (খ) হইতে,

$$(a^2b - cd)(c^2 - d^2) = 8 \times (-9) = -72.$$

প্রশ্নমালা 14

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর (Find the values of) :

1. $ab - cd$, যখন $a = -2, b = -3, c = -8, d = 6$.

2. $(x^2 - y^2)b - axy$, যখন $a = 1, b = -3, x = 4, y = -5$.

3. $3x^2y - 3xy^2 + xyz$, যখন $x = -1, y = -2, z = -7$.

4. $(-a)b^2 - cd^2 + b(-c)^2$, যখন $a = 5, b = -7, c = 4, d = -3$.

5. $-x^2(-c) + b^2(-y) + 4a^3$, যখন $a = -2,\ b = -3,\ c = -1,\ x = 5,\ y = 6$.

6. $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$, যখন $a = -2, b = -5, c = -7$.

7. $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)$, যখন $x = -3, y = 8, z = -5$.

8. $p^3(q^2 - r^2) + q^3(r^2 - p^2) + r^3(p^2 - q^2)$, যখন $p = -3,\ q = -5,\ r = -7$.

9. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, যখন $a = -12, b = -13, c = -15$.

10. দেখাও যে, $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, যখন $a = 3, b = -5$.

47. প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a \times b = b \times a$, অর্থাৎ a কে b দ্বারা গুণ করা এবং b কে a দ্বারা গুণ করা উভয়ই এক।

(1) প্রথমে, মনে কর, a ও b দুইটি অখণ্ড ধনরাশি (positive integers).

b-সংখ্যক 1 কে এক সারিতে (horizontal row এ) সাজাও এবং a-সংখ্যক এইরূপ সারি একটির নীচে একটি করিয়া এরূপভাবে স্থাপন করিয়া যাও, যেন প্রত্যেক সারিরই অনুরূপ স্থানের 1 গুলি এক স্তম্ভে (vertical column এ) বসে। যথা,

1	1	1	1	1	.	.	.	b-সংখ্যক 1 পর্য্যন্ত
1	1	1	1	1	.	.	.	„ „ „
1	1	1	1	1	.	.	.	„ „ „
.	.	.	.	.	.	.	.	„ „ „
.	.	.	.	.	.	.	.	„ „ „

a-সংখ্যক সারি পর্য্যন্ত।

এইরূপ করা হইলে স্পষ্টই দেখা যাইবে যে, মোটের উপর ইহাতে a-সংখ্যক 1-বিশিষ্ট b-সংখ্যক স্তম্ভ (column) আছে।

এখন মোটের উপর কতগুলি 1 লেখা হইল, দেখা যাউক।

যেহেতু a-সংখ্যক সারির প্রত্যেক সারিতে b-সংখ্যক 1 আছে,

অতএব, মোট 1 এর সংখ্যা = (প্রথম সারির সংখ্যা) + (দ্বিতীয় সারির সংখ্যা) + ··· + (a-তম সারির সংখ্যা) = $b + b + b + \cdots$ a-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত $= a \times b$ ··· (1)

আবার যেহেতু b-সংখ্যক স্তম্ভের প্রত্যেক স্তম্ভে a-সংখ্যক 1 আছে,

অতএব, মোট 1 এর সংখ্যা = (প্রথম স্তম্ভের সংখ্যা) + (দ্বিতীয় স্তম্ভের সংখ্যা) $+\cdots+$ (b-তম স্তম্ভের সংখ্যা) $= a+a+a+\cdots$ b-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত $= b\times a$ ⋯ (2)

অতএব, (1) ও (2) হইতে, $\boldsymbol{a\times b=b\times a}$,*

অর্থাৎ, a গুণ $b=b$ গুণ a.

(2) এখন মনে কর, a ও b দুইটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ (positive fractions) ;

ধর, $a=\frac{m}{n}$ এবং $b=\frac{p}{q}$ এবং m, n, p, q প্রত্যেকে অখণ্ড ধনরাশি।

তাহা হইলে, $a\times b=\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}=m\times\left\{\left(\frac{p}{q}\right)\div n\right\}=m\times\frac{p}{nq}=\frac{mp}{nq}$ ⋯ (I)

এবং $b\times a=\frac{p}{q}\times\frac{m}{n}=p\times\left\{\left(\frac{m}{n}\right)\div q\right\}=p\times\frac{m}{qn}=\frac{pm}{qn}$. ⋯ (II)

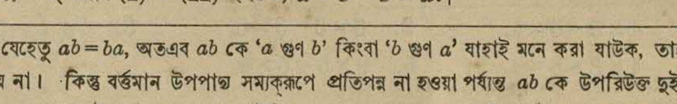
এখন, যেহেতু p, q, m, n প্রত্যেকে অখণ্ড ধনরাশি, অতএব, $mp=pm$, এবং $nq=qn$. সুতরাং (I) ও (II) হইতে, $\boldsymbol{a\times b=b\times a}$.†

---

* যেহেতু $ab=ba$, অতএব ab কে 'a গুণ b' কিংবা 'b গুণ a' যাহাই মনে করা যাউক, তাহাতে কিছু আসে যায় না। কিন্তু বর্ত্তমান উপপাদ্য সম্যক্‌রূপে প্রতিপন্ন না হওয়া পর্য্যন্ত ab কে উপরিউক্ত দুই প্রকারের যে কোন এক প্রকারেই সর্ব্বদা ব্যাখ্যা করা উচিত। কারণ, কোন প্রথম শিক্ষার্থীকে যদি $7a$ কে '7 গুণ a' কিন্তু '7×4' কে '4×7' বলিয়া পড়িতে শিখান হয়, তাহা হইলে সে 'ab' এবং 'ba' কে দ্বিধাশূন্য হইয়া সর্ব্বদা একার্থবোধকই মনে করিবে এবং ইহা প্রতিপন্ন করিবার যে কোনরূপ আবশ্যকতা আছে, ইহার কোন ধারণাই তাহার থাকিবে না। এই ত্রুটির প্রতিরোধকল্পে আমি সকল সময়ই '$a\times b$' কে, 'a গুণ b' বা 'b কে a দ্বারা গুণ করা হইয়াছে', বলিয়া ব্যাখ্যা করিয়াছি।

† a ও b ভগ্নাংশ হইলে, '$a\times b=b\times a$' কে আমরা নিম্নোক্ত দৃষ্টান্ত দ্বারা প্রতিপন্ন করিতে পারি। ধর, আমাদের প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$.

'$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$' এর অর্থ এই যে, কোন বস্তুর $\frac{4}{5}$ অংশকে তিন ভাগ করিয়া উহার দুই ভাগ লওয়া হইয়াছে, এবং '$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$' এর অর্থ এই যে, কোন বস্তুর $\frac{2}{3}$ অংশকে পাঁচ ভাগ করিয়া উহার চারি ভাগ লওয়া হইয়াছে।



মনে কর, AB একটি 15 ইঞ্চি লম্বা সরলরেখা। এই রেখার $\frac{4}{5}$ অংশ অবশ্যই 12 ইঞ্চি, এবং ইহার $\frac{2}{3}$ ভাগ লইলে 8 ইঞ্চি লম্বা রেখাটি পাওয়া যায়। আবার, যেহেতু AB রেখাটির $\frac{2}{3}$ অংশ 10 ইঞ্চি লম্বা, ইহার $\frac{4}{5}$ ভাগ লইলেও 8 ইঞ্চি লম্বা রেখা পাওয়া যায়।

অতএব, রেখাটির '$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$' অংশ = রেখাটির '$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$' অংশ ; অর্থাৎ, $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$. অন্যান্য ক্ষেত্রেও অনুরূপ দৃষ্টান্ত দেওয়া যায়।

অতএব, দেখা যায় যে, a ও b ধনরাশি হইলেই, $\boldsymbol{a \times b = b \times a}$. ... (ক)

(3) 46 নিয়ম হইতে দেখা যায় যে, $x \times (-y) = -(xy)$,

এবং $(-y) \times x = -(yx)$; কিন্তু $xy = yx$.

$\therefore \quad x \times (-y) = (-y) \times x.$ ... ... (খ)

(4) 46 নিয়ম হইতে দেখা যায় যে, $(-x) \times (-y) = +xy$,

এবং $(-y) \times (-x) = +yx$; কিন্তু $xy = yx$.

$\therefore \quad (-x) \times (-y) = (-y) \times (-x).$ ... ... (গ)

অতএব, (ক), (খ) ও (গ) হইতে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পারি যে, a ও b যে কোন দুইটি রাশি হউক না কেন, সকল সময়েই $\boldsymbol{a \times b = b \times a}$.

প্রশ্নমালা 15

প্রমাণ কর (Prove that):

1. $4 \times 5 = 5 \times 4$.
2. $6 \times 3 = 3 \times 6$.
3. $7 \times 5 = 5 \times 7$.
4. $4 \times 8 = 8 \times 4$.
5. $9 \times 5 = 5 \times 9$.

48. প্রমাণ করিতে হইবে যে, $(ab) \times c = a \times (bc)$, অথবা $b \times (ac)$; অর্থাৎ c কে a ও b এর গুণফল দ্বারা গুণ করাও যে কথা, c কে b ও a এর যে কোনটির দ্বারা প্রথমে গুণ করিয়া ঐ গুণফলকে পুনরায় অপরটির দ্বারা গুণ করাও সেই কথা।

এরূপ b-সংখ্যক বন্ধনী এক সারিতে (horizontal row তে) স্থাপন কর, যেন বন্ধনীগুলির প্রত্যেকটিতে c-সংখ্যক একক থাকে; এবং a-সংখ্যক এইরূপ সারি একটির নীচে একটি করিয়া এমনভাবে সাজাইয়া যাও, যেন প্রত্যেক সারির অনুরূপ অবস্থানবিশিষ্ট বন্ধনীগুলি ঠিক একই স্তম্ভে (vertical column এ) বসে; যথা,

[c] [c] [c]... ... b-সংখ্যক বন্ধনী পর্য্যন্ত;
[c] [c] [c]... ... " " " ";
[c] [c] [c]... ... " " " ";
. . . .
. . . .

a-সংখ্যক সারি পর্য্যন্ত।

এখন ইহাও বলা যাইতে পারে যে, আমাদের b-সংখ্যক স্তম্ভ আছে; এবং প্রতি স্তম্ভে c-সংখ্যক এককবিশিষ্ট a-সংখ্যক বন্ধনী আছে।

এখন, যেহেতু আমাদের $a \times b$-সংখ্যক বন্ধনী এবং প্রত্যেক বন্ধনীতে c-সংখ্যক একক আছে, অতএব মোট একক-সংখ্যা $= (ab) \times c$. ... ... (α)

আবার, যেহেতু আমাদের a-সংখ্যক সারি এবং প্রতি সারিতে c-সংখ্যক একক-বিশিষ্ট b-সংখ্যক বন্ধনী আছে, অতএব মোট একক-সংখ্যা $= a \times (bc)$. ... (β)

পুনরায়, যেহেতু আমাদের b-সংখ্যক স্তম্ভ এবং প্রতি স্তম্ভে c-সংখ্যক এককবিশিষ্ট a-সংখ্যক বন্ধনী আছে, অতএব মোট একক-সংখ্যা $= b \times (ac)$. ... (γ)

স্বতরাং (α), (β) এবং (γ) হইতে, $(ab) \times c = a \times (bc) = b \times (ac)$.

অনুসি.। 47 ও 48 নিয়মের সিদ্ধান্ত হইতে দেখা যায় যে, $abc = bca = cab$; কারণ, 48 নিয়মানুসারে, $abc = a \times (bc)$, এবং 47 নিয়মানুসারে, $a \times (bc) = (bc) \times a = bca$; অতএব $abc = bca$, তদ্রূপ, $bca = cab$. ইহা হইতে সিদ্ধান্ত করা যায় যে,

উৎপাদকগুলিকে যে কোন ক্রমেই লওয়া হউক না কেন, গুণফলের মান সকল ক্ষেত্রেই এক থাকে, অর্থাৎ উৎপাদকগুলির ক্রমপরিবর্ত্তনের জন্য গুণফলের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না।

টীকা 1. যদিও গুণফলের উৎপাদকগুলিকে যে কোন ক্রমেই লেখা যাইতে পারে, তথাপি উহাদের মধ্যে অঙ্ক থাকিলে উহাকেই সর্ব্বপ্রথমে লিখিয়া তৎপরে বর্ণমালার ক্রমানুসারে অক্ষরগুলিকে লেখাই স্থবিধাজনক। যথা, $c^3 \times d \times 7 \times b \times a^4$ কে $7a^4bc^3d$ লিখিতে হয়।

টীকা 2. আমরা এখন 19 নিয়মে বর্ণিত 'সহগ' এর সংজ্ঞা কিছু পরিবর্ত্তিত আকারে লিখিতে পারি। যথা, কোন গুণফলের উৎপাদকগুলির মধ্যে এক বা একাধিক উৎপাদককে অবশিষ্ট উৎপাদক বা উৎপাদকগুলির 'সহগ' (coefficient) বলা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ, $7abcd$ তে $7ac$ কে bd এর সহগ বলা যায়; কারণ, $7abcd$ কে $7acbd$ রূপে লেখা যাইতে পারে।

49. m ও n দুইটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে,

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

[**দ্রষ্টব্য।** 47 নিয়মে দেখান হইয়াছে যে, '×' চিহ্নদ্বারা সম্বদ্ধ রাশি দুইটির যে কোনটিকে গুণ্য এবং অপরটিকে গুণক বলা যাইতে পারে। কাজেই '$a \times b$' এর অর্থ এ পর্য্যন্ত যতটা সীমাবদ্ধ করা হইয়াছিল, এখন আর তাহার কোন আবশ্যকতা নাই।]

যেহেতু $a^2 = aa$, এবং $a^3 = aaa$,

অতএব, $a^2 \times a^3 = (aa) \times (aaa) = a \times a \times a \times a \times a = a^5 = a^{2+3}$.

আবার, যেহেতু $a^4 = aaaa$, এবং $a^6 = aaaaaa$,

অতএব, $a^4 \times a^6 = (aaaa) \times (aaaaaa) = aaaaaaaaaa = a^{10} = a^{4+6}$.

সাধারণভাবে, যেহেতু $a^m = aaaa$ ... ... m-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত,

এবং, $a^n = aaaaa$ ... ... n- " " "

অতএব, $a^m \times a^n = (aaaa........m$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত $) \times$

$(aaaaa......n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত $)$

$= aaaaaaaaa.....(m+n)$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$= a^{m+n}$.

অনুসি. 1. m, n, p এর প্রত্যেকেই একটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে,

$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$.

কারণ, $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

সুতরাং $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n} \times a^p$

$= a^{(m+n)+p} = a^{m+n+p}$.

অনুসি. 2. m ও n এর প্রত্যেকে একটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে,

$(a^m)^n = a^{mn}$.

কারণ, $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$= a^{m+m+m+\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত}}$

$= a^{mn}$.

অনুসি. 3. m যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে,

$(ab)^m = a^m b^m$.

কারণ, $(ab)^m = (ab).(ab).(ab)......m$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$= (a\,a.a\,......m$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত $)$

$\times (b.b.b\,......m$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত $)$

$= a^m b^m$.

50. পূর্ব্ববর্ত্তী নিয়মাবলীর প্রয়োগ :

উদা. 1. দেখাও যে, $(-ab)^2 = a^2b^2$.

$(-ab)^2 = (-ab) \times (-ab)$

$= (ab) \times (ab)$ [নিয়ম 46]

$= a \times b \times a \times b$ [নিয়ম 48]

$= a \times a \times b \times b$ [নিয়ম 48, অনুসি.]

$= (aa) \times (bb)$ [নিয়ম 48]

$= a^2b^2$. [নিয়ম 49]

উদা. 2. গুণ কর : $-5a^3b^2$ কে $4a^5b^4$ দ্বারা।

$(-5a^3b^2)\times(4a^5b^4) = -\{(5a^3b^2)\times(4a^5b^4)\}$ [নিয়ম 46]

$= -\{5\times a^3\times b^2\times 4\times a^5\times b^4\}$ [নিয়ম 48]

$= -\{5\times 4\times a^3\times a^5\times b^2\times b^4\}$ [নিয়ম 48, অনুসি.]

$= -\{20\times(a^3a^5)\times(b^2b^4)\}$ [নিয়ম 48]

$= -20a^8b^6.$ [নিয়ম 49]

উদা. 3. সরল কর : $(-2x^5y^4z)\times(4x^2y^7z^2)\times(-6xy^3z^4)$.

$$
\begin{aligned}
(-2x^5y^4z)\times(4x^2y^7z^2) &= -\{(2x^5y^4z)\times(4x^2y^7z^2)\}\\
&= -\{2\times x^5\times y^4\times z\times 4\times x^2\times y^7\times z^2\}\\
&= -\{2\times 4\times x^5\times x^2\times y^4\times y^7\times z\times z^2\}\\
&= -\{8\times(x^5x^2)\times(y^4y^7)\times(zz^2)\}\\
&= -8x^7y^{11}z^3.
\end{aligned}
$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$
\begin{aligned}
&=(-8x^7y^{11}z^3)\times(-6xy^3z^4)=(8x^7y^{11}z^3)\times(6xy^3z^4)\\
&=8\times x^7\times y^{11}\times z^3\times 6\times x\times y^3\times z^4\\
&=8\times 6\times x^7\times x\times y^{11}\times y^3\times z^3\times z^4\\
&=48\times(x^7x)\times(y^{11}y^3)\times(z^3z^4)=48x^8y^{14}z^7.
\end{aligned}
$$

প্রশ্নমালা 16

দেখাও যে (Show that) :

1. $(-a)\times 6b = -6ab.$
2. $(4a)\times(-2b) = -8ab.$
3. $-7x^7\times 8x^8 = -56x^{15}.$
4. $(-2b)\times(-10a) = 20ab.$
5. $(-7c)\times(-3ab) = 21abc.$
6. $10\times 35 = 25\times 14.$
7. $15\times 75 = 5^3\times 3^2.$
8. $(-a)^3 = -a^3.$
9. $(-ab)^3 = -a^3b^3.$
10. $(a^4b^2)^3 = a^{12}b^6.$
11. $(-a^3b^5)^2 = a^6b^{10}.$
12. $(-x)^5 = -x^5.$
13. $(-4x^2y^4)^2 = 16x^4y^8.$

গুণ কর (Multiply) :

14. $2x^2y$ কে $-3x^5y^4$ দ্বারা।
15. $-7a^2b^3c$ কে $-3abc^2$ দ্বারা।

16. $-5x^{12}y^3$ কে $-8x^5y^{13}$ দ্বারা।

17. $-12x^3y^3z^2$ কে $13x^7y^6z^4$ দ্বারা।

18. $-14xy^5z^8$ কে $-10x^5y^2z^{12}$ দ্বারা।

সরল কর (Simplify) :

19. $(-x)^3 \times (-2xy^2)^3 \times (x^2y)^3$.

20. $(-2a^2) \times (7a^4b^7) \times (5a^9b^5)$.

21. $(-6x^5y^2z) \times (2z^4x^3y^5) \times (-4y^3z^2x^8)$.

22. $(-3x^2y) \times (4zy^2x) \times (-x^3z^5y^4) \times (2zxy)$.

51. পূর্ব্ববর্ত্তী নিয়মে প্রদর্শিত পদ্ধতি অনুসারেই সরলরাশিসমূহের গুণফল নির্ণয় করিতে হয়। কিন্তু, অপেক্ষাকৃত জটিল গুণনের সময় ঐ সকল প্রক্রিয়া সাধারণতঃ মৌখিকই সম্পন্ন করিতে হয়। শিক্ষার্থিগণ যাহাতে এইরূপ মৌখিক গুণনে ভালরূপ অভ্যস্ত হইতে পারে, সেইজন্য নিম্নে একটি প্রশ্নমালা দেওয়া হইল।

উদা. 1. $3x^2$ এবং $-5xy$ এর গুণফল লিখ।

$(3x^2) \times (-5xy) = 3 \times (-5).(x^2.x).y = -15x^3y.$

উদা. 2. $-5a^2b$ এবং $-8ab^2$ এর গুণফল লিখ।

$(-5a^2b) \times (-8ab^2) = [(-5) \times (-8)].(a^2.a).(b.b^2) = 40a^3b^3.$

প্রশ্নমালা 17

নিম্নলিখিতের গুণফল লিখ (Write down the product of) :

1. $-2x^3$ এবং $5x^4$.
2. $5a^3b$ এবং $-4ab^5$.
3. $-3m^2n^5$ এবং $-7n^3m^5$;
4. $3x^3y^5$ এবং $-6xy^2$.
5. $-a^3b^2$ এবং $-3a^4b^8$.
6. $5mn^6$ এবং $-8m^7n$.
7. $-10xyz^2$ এবং $-5xy^2z$.
8. $4x^3y^3z$ এবং $-6xyz^3$.
9. $-6x^2y^3z^4$ এবং $-8x^3y^2z$.
10. $-5a^3b^5c^7$ এবং $-5a^2b^4c^6$.
11. $3x^2yz^4$ এবং $-8xy^2z$.
12. $-4abxy$ এবং $-8a^2xby^2$.
13. $-7a^2b^2z^3$ এবং $-5abz$.
14. $5a^4x^2y$ এবং $-12x^5y^4a^2$.
15. $-14xy^4$ এবং $-5x^4yz$.
16. $2abc^5$ এবং $-9a^7b^5c$.
17. $-7a^3x^5y$ এবং $-9x^3ya^6$.
18. $-8x^6y^2z^5$ এবং $-20y^5z^2x^8$.
19. $-13a^8b^{13}c^{15}$ এবং $-5bc^5a^2$.
20. $-7a^7x^8y^6z^2$ এবং $-16z^5x^2a^6y^3$.

52. প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a(b+c)$* $=ab+ac$.

b ও c যে কোন রাশিই হউক না কেন, a একটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে,

$$a(b+c)=(b+c)+(b+c)+(b+c)+\cdots\cdots a\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত},$$
$$=(b+b+b+\cdots\cdots a\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত})$$
$$+(c+c+c+\cdots\cdots a\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত})$$
$$=ab+ac. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

অতএব, বিপরীতভাবে, $\frac{ab+ac}{a}=b+c=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}$; অর্থাৎ, p ও q যে কোন রাশিই হউক না কেন, r একটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে, $\frac{p+q}{r}=\frac{p}{r}+\frac{q}{r}$. ... (A)

এখন মনে কর, a একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ (positive fraction); ধর, $a=\frac{m}{n}$, এবং m ও n উভয়ই অখণ্ড ধনরাশি।

তাহা হইলে, $$\frac{m}{n}(b+c)=m\times\frac{b+c}{n}$$
$$=\frac{m(b+c)}{n}=\frac{mb+mc}{n}=\frac{mb}{n}+\frac{mc}{n} \qquad [(A) \text{ অনুসারে}]$$
$$=\frac{m}{n}b+\frac{m}{n}c. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

অতএব, (1) ও (2) হইতে দেখা যায় যে, a যে কোন ধনরাশি হইলে,

$$a(b+c)=ab+ac. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

তারপর মনে কর, a একটি ঋণরাশি এবং $-x$ এর সমান; সুতরাং, x অবশ্যই একটি ধনরাশি। তাহা হইলে,

$$(-x).(b+c)=-[x(b+c)]$$
$$=-(xb+xc)$$
$$=-xb-xc$$
$$=(-x).b+(-x).c;$$

অতএব, দেখা যায় যে, a যে কোন একটি ঋণরাশি হইলে,

$$a(b+c)=ab+ac. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

সুতরাং, (3) ও (4) হইতে দেখা যায় যে, a যে কোন রাশিই হউক না কেন,

$$\mathbf{a(b+c)=ab+ac.}$$

---

* প্রত্যেক দ্বিপদরাশিকেই '$b+c$' রূপে লেখা যাইতে পারে; দৃষ্টান্তস্বরূপ $2x^2$ কে b এবং $-3y^2$ কে c ধরিলে, $2x^2-3y^2$ কে, অর্থাৎ $(2x^2)+(-3y^2)$-কে, অবশ্যই $b+c$ বলিয়া কল্পনা করা যায়।

অনুসি. 1. বিপরীতক্রমে, $ab + ac = a(b + c)$;

তদ্রূপ, $xya^2 + xyb^2 = xy(a^2 + b^2)$.

অনুসি. 2. যেহেতু $b - c = b + (-c)$,

অতএব, $a(b - c) = a[b + (-c)]$

$= ab + a(-c) = ab - ac$.

বিপরীতক্রমে, $ab - ac = a(b - c)$.

তদ্রূপ, $2ax - 2ay = 2a(x - y)$.

অনুসি. 3. $a(b + c + d) = a\{b + (c + d)\} = ab + a(c + d)$

$= ab + ac + ad$.

তদ্রূপ, $\boldsymbol{a(b+c+d+e+f+\cdots) = ab+ac+ad+ae+af+\cdots}$

অতএব, কোন বহুপদরাশি (multinomial) কে একটি সরলরাশি (monomial) দ্বারা গুণ করিতে হইলে বহুপদরাশিটির প্রত্যেক পদকে সরলরাশিটির দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলগুলিকে যোগ করিতে হয়।

বিপরীতক্রমে, $ab + ac + ad + ae + \cdots = a(b + c + d + e + \cdots)$.

উদা. 1. $2ab - 3b^2$ কে $5ab$ দ্বারা গুণ কর।

$$5ab(2ab - 3b^2) = 5ab\{2ab + (-3b^2)\}$$
$$= 5ab \times 2ab + 5ab \times (-3b^2)$$
$$= 10a^2b^2 - 15ab^3.$$

উদা. 2. $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 4$ কে $-6x^2$ দ্বারা গুণ কর।

$$(-6x^2)(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 4)$$
$$= (-6x^2)\{x^4 + (-3x^3) + 5x^2 + (-6x) + 4\}$$
$$= (-6x^2).x^4 + (-6x^2)(-3x^3) + (-6x^2).5x^2$$
$$+ (-6x^2)(-6x) + (-6x^2).4$$
$$= -6x^6 + 18x^5 - 30x^4 + 36x^3 - 24x^2.$$

দ্রষ্টব্য। প্রথম শিক্ষার্থিগণের পক্ষে, উপরিপ্রদর্শিত পদ্ধতিতেই প্রত্যেক প্রশ্নের সমাধান করা উচিত; কিছু অভ্যস্ত হইলে নিম্নলিখিত উদাহরণানুযায়ী একসঙ্গেই ফল লিখিয়া দেওয়া যাইতে পারে।

উদা. 3. $-4a^4+5a^3b-6a^2b^2-8ab^3+9b^4$ কে $-3a^2b^2$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{l} -4a^4+5a^3b-6a^2b^2-8ab^3+9b^4 \\ -3a^2b^2 \\ \hline 12a^6b^2-15a^5b^3+18a^4b^4+24a^3b^5-27a^2b^6 \end{array}$$

উদা. 4. সরল কর : $2x^2(3x-2)+2x(2x+3)-6(x-3)$.

এখন, $2x^2(3x-2)=6x^3-4x^2$,

$2x(2x+3)=4x^2+6x$,

$6(x-3)=6x-18$.

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $=(6x^3-4x^2)+(4x^2+6x)-(6x-18)$

$=6x^3-4x^2+4x^2+6x-6x+18$

$=6x^3+18$.

উদা. 5. সরল কর : $3a(2a-5)-3a(a-6)$.

$2a-5$ এর পরিবর্তে x এবং $a-6$ এর পরিবর্তে y লিখিলে,

$3a(2a-5)-3a(a-6)=3ax-3ay=3a(x-y)$

$=3a\{(2a-5)-(a-6)\}$

$=3a(a+1)=3a^2+3a$.

প্রশ্নমালা 18

গুণ কর (Multiply) :

1. $2x-y$ কে $-x$ দ্বারা।
2. $a-2b+3c$ কে $-5a$ দ্বারা।
3. $2x-3y$ কে $4xy$ দ্বারা।
4. $2a^2-3b^2-c^2$ কে abc দ্বারা।
5. $x^2y-2xy^2-y^3$ কে $-3xy$ দ্বারা।
6. $3a^2b^2-ab^2-5a^3+a^2b$ কে $7b^2$ দ্বারা।
7. $3a^2x-4ax^2+5ax$ কে $-2a^2$ দ্বারা।
8. $-2m^3+3m^2n-5mn^2$ কে $4mn$ দ্বারা।
9. $a^2bc-b^2ca+c^2ab$ কে $-abc$ দ্বারা।
10. $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ কে xyz দ্বারা।
11. $-2c^2d+3d^3c-5cd^2-4c^2d^2$ কে $-6c^2d^4$ দ্বারা।
12. $8a^4-6a^3b+5a^2b^2-4ab^3$ কে $-2a^3b^3$ দ্বারা।

সরল কর (Simplify) :

13. $7x^3(x-2)-2x^2(x-3)-8x^2(1-2x)$.

14. $x^2(y^2-z^2)+y^2(z^2-x^2)+z^2(x^2-y^2)$.

15. $9x^3(x^3-2y^2)+5y^2(3x^3+y^2)+3y^2(x^3-10y^2)$.

16. $x^3(x^3+2x^2+2x)-2x^2(x^3+2x^2+2x)+2x(x^3+2x^2+2x)$.

17. $a^6b^3(a^6b^3-2a^4b^2+2a^2b)+2a^4b^2(a^6b^3-2a^4b^2+2a^2b)$
$+2a^2b(a^6b^3-2a^4b^2+2a^2b)$.

18. $2a^9b^6(2a^9b^6+6a^6b^4+9a^3b^2)-6a^6b^4(2a^9b^6+6a^6b^4+9a^3b^2)$
$+9a^3b^2(2a^9b^6+6a^6b^4+9a^3b^2)$.

19. $a^2(2x-3y)+a^2(3x+4y)-a^2(5x-2y)$.

20. যদি $a=x^2-yz$, $b=y^2-zx$ এবং $c=z^2-xy$ হয়, তবে
(i) $ax+by+cz$; (ii) $cx+ay+bz$ এর মান নির্ণয় কর।

4. ভাগ (Division)

53. সংজ্ঞা : যে কোন তিনটি রাশি a, b এবং c যদি এইরূপভাবে পরস্পর সম্বদ্ধ হয় যে, $a=b\times c$, তাহা হইলে 'a রাশিটি b রাশিটি দ্বারা বিভাজ্য (divisible)' এইরূপ বলা হয় ; অথবা সংক্ষেপে, $a=b\times c$ হইলে, $a\div b=c$, বলা হয়।

এইরূপ, $x=y\times z$ হইলে, $x\div y=z$ এবং $x\div z=y$.

যে রাশিটিকে ভাগ করা হয়, তাহাকে **ভাজ্য** (dividend), যে রাশিটি দ্বারা ভাগ করা হয়, তাহাকে **ভাজক** (divisor) এবং ভাগ করার ফলে যে রাশিটি পাওয়া যায়, তাহাকে **ভাগফল** (quotient) বলে।

টীকা। a কে b দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগফল পাওয়া যায়, তাহাকে সাধারণতঃ $\frac{a}{b}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

54. মূল প্রতিজ্ঞা (Fundamental Propositions) :

(1) প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a\div b\times b=a$.

যদি '$a\div b$' x দ্বারা সূচিত হয়, তাহা হইলে সংজ্ঞানুসারে,

$$x\times b=a.$$

$$\therefore\ a\div b\times b=x\times b=a.$$

(2) **প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a \div b \div c = a \div bc$.**

$$(a \div b \div c) \times bc = \{(a \div b) \div c\} \times c \times b$$
$$= [\{(a \div b) \div c\} \times c] \times b$$
$$= (a \div b) \times b = a.$$

অতএব, সংজ্ঞানুসারে, $a \div b \div c = a \div bc$;

অর্থাৎ, কোন একটি রাশিকে অন্য দুইটি রাশিদ্বারা পর পর ভাগ করা, এবং পূর্ব্বোক্ত রাশিটিকে শেষোক্ত রাশিদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করা, একই কথা।

অনুসি.। স্পষ্টই $a \div b \div c = a \div c \div b$; কারণ, প্রত্যেকেই $a \div bc$ এর সমান।

(3) **প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a \div b = a \times \frac{1}{b}$.**

এখন, $\frac{1}{b} \times b = 1 \div b \times b = 1$;

অতএব, $a \times \frac{1}{b} \times b = a \times \left(\frac{1}{b} \times b\right) = a \times 1 = a$;

অর্থাৎ $\left(a \times \frac{1}{b}\right) \times b = a.$

সুতরাং, সংজ্ঞানুসারে, $a \div b = a \times \frac{1}{b}$.

কাজেই, কোন একটি রাশিকে অপর একটি রাশিদ্বারা ভাগ করা, অথবা পূর্ব্বোক্ত রাশিটিকে শেষোক্ত রাশিটির **অন্যোন্যক** (reciprocal) দ্বারা গুণ করা, উভয়ই এক।

[দুইটি রাশির গুণফল 1 হইলে, উহাদের একটিকে অপরটির **অন্যোন্যক** (reciprocal) বলে।]

অনুসি.। $a \div b \times c = a \times c \div b$;

কারণ, $a \div b \times c = a \times \frac{1}{b} \times c = a \times c \times \frac{1}{b} = a \times c \div b.$

55. ভাগে চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়ম :

যেহেতু $a \times (-b) = -ab$,

সুতরাং, সংজ্ঞানুসারে, $\left.\begin{array}{l}(-ab) \div a = -b \\ (-ab) \div (-b) = a\end{array}\right\}$ ... (I)
এবং

আবার, যেহেতু $(-a) \times (-b) = ab$,

সুতরাং, $\left.\begin{array}{l}ab \div (-a) = -b \\ ab \div (-b) = -a\end{array}\right\}$ ... (II)
এবং

আবার, ইহাও সুস্পষ্ট যে, $\left.\begin{array}{l}ab \div a = b \\ ab \div b = a\end{array}\right\}$ ... (III)
এবং

অতএব (I), (II) ও (III) হইতে ভাগের চিহ্নসম্বন্ধীয় নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া যায়। যথা, ভাজ্য ও ভাজকের চিহ্নদ্বয় একই হইলে, ভাগফলে ধনচিহ্ন, এবং বিপরীত হইলে, ভাগফলে ঋণচিহ্ন হইবে; অর্থাৎ একই চিহ্ন ধনাত্মক এবং বিপরীত চিহ্ন ঋণাত্মক ভাগফল উৎপন্ন করে।

56. একটি সরলরাশিকে অপর একটি সরলরাশি দ্বারা ভাগ:

কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রসম্বন্ধে আলোচনা করা যাইতেছে :

(1) যেহেতু $3a^2b \times 5a^3b^2c = 15a^5b^3c$,

অতএব, $(15a^5b^3c) \div (5a^3b^2c) = 3a^2b$.

কাজেই, ভাজ্য $= 15a^5b^3c = 3 \times 5 \times a^3 \times a^2 \times b^2 \times b \times c$,
এবং ভাজক $= 5a^3b^2c$ হইলে,
ভাগফল $= 3a^2b$. ... (I)

প্রক্রিয়া-প্রণালী :

$$\text{ভাগফল} = \frac{15a^5b^3c}{5a^3b^2c} = \frac{3 \times 5}{5} \cdot \frac{a^3.a^2}{a^3} \cdot \frac{b^2.b}{b^2} \cdot \frac{c}{c} = 3.a^2.b = 3a^2b.$$

(2) যেহেতু $(-2a^{10}b^2cd) \times (-3a^5c^2) = 6a^{15}b^2c^3d$,

অতএব, $(6a^{15}b^2c^3d) \div (-2a^{10}b^2cd) = -3a^5c^2$.

কাজেই, ভাজ্য $= 6a^{15}b^2c^3d = 2 \times 3 \times a^{10} \times a^5 \times b^2 \times c \times c^2 \times d$,
এবং ভাজক $= -2a^{10}b^2cd$ হইলে,
ভাগফল $= -3a^5c^2$. (II)

প্রক্রিয়া-প্রণালী :

$$\text{ভাগফল} = \frac{6a^{15}b^2c^3d}{-2a^{10}b^2cd} = \frac{(-3)(-2)}{-2} \cdot \frac{a^{10}.a^5}{a^{10}} \cdot \frac{b^2}{b^2} \cdot \frac{c^2.c}{c} \cdot \frac{d}{d}$$
$$= (-3).a^5.c^2 = -3a^5c^2.$$

(3) যেহেতু $(-5a^8b^5c^2d) \times (4b^3c^4) = -20a^8b^8c^6d$,

অতএব, $(-20a^8b^8c^6d) \div (-5a^8b^5c^2d) = 4b^3c^4$.

কাজেই, ভাজ্য $= -20a^8b^8c^6d = (-5) \times 4 \times a^8 \times b^5 \times b^3 \times c^2 \times c^4 \times d$,
এবং ভাজক $= -5a^8b^5c^2d$ হইলে,
ভাগফল $= 4b^3c^4$. ...(III)

প্রক্রিয়া-প্রণালী :

$$\text{ভাগফল} = \frac{-20a^8b^8c^6d}{-5a^8b^5c^2d} = \frac{(-5)\times 4}{-5}\cdot\frac{a^8}{a^8}\cdot\frac{b^5.b^3}{b^5}\cdot\frac{c^2.c^4}{c^2}\cdot\frac{d}{d}$$
$$= 4.b^3.c^4 = 4b^3c^4.$$

(I), (II) এবং (III) হইতে, একটি সরলরাশিকে অপর একটি সরলরাশি দ্বারা ভাগ করিবার, নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া যায় :

যে সকল উৎপাদক দ্বারা ভাজক উৎপন্ন হইয়াছে, ভাজ্য হইতে সেই সকল উৎপাদক অপসারণ করিয়া উহার অবশিষ্ট উৎপাদকগুলির সহিত, ভাজ্য ও ভাজকের চিহ্নদ্বয় একই হইলে, ভাগফলে ধনচিহ্ন এবং বিপরীত হইলে, ভাগফলে ঋণচিহ্ন, যুক্ত করিলেই নির্ণেয় ভাগফল পাওয়া যায়।

এখন, $a^{12} \div a^7 = (a^5 \times a^7) \div a^7 = a^5 [= a^{12-7}]$.

তদ্রূপ, $a^{20} \div a^9 = a^{11}$; $a^{21} \div a^{14} = a^7$; ইত্যাদি।

অতএব, সাধারণভাবে, m এবং n দুইটি অখণ্ড ধনরাশি এবং $m > n$ হইলে,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

উদা. 1. $18m^3n^2p$ কে $-6m^2n^2p$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য $= 18m^3n^2p = (-6)\times(-3)\times m^2 \times m \times n^2 \times p.$

ভাজক $= -6m^2n^2p.$

$\therefore$ ভাগফল $= -3m.$

প্রক্রিয়া-প্রণালী :

$$\text{ভাগফল} = \frac{18m^3n^2p}{-6m^2n^2p} = \frac{(-6)(-3)}{-6}\cdot\frac{m^3}{m^2}\cdot\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{p}{p} = (-3).m^{3-2}$$
$$\left[\because \frac{n^2}{n^2} = 1 \text{ এবং } \frac{p}{p} = 1\right] = -3m.$$

উদা. 2. $-24a^7b^3c$ কে $-6a^4bc$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য $= -24a^7b^3c$

$= (-6)\times 4 \times a^4 \times a^3 \times b \times b^2 \times c.$

ভাজক $= -6a^4bc.$

$\therefore$ ভাগফল $= 4a^3b^2.$

প্রক্রিয়া-প্রণালী :

$$\text{ভাগফল} = \frac{-24a^7b^3c}{-6a^4bc} = \frac{(-6)(4)}{(-6)}\cdot\frac{a^7}{a^4}\cdot\frac{b^3}{b}\cdot\frac{c}{c} = 4.a^{7-4}.b^{3-1}$$

$$\left[\because\ \frac{c}{c}=1\right] = 4a^3b^2.$$

প্রশ্নমালা 19

ভাগ কর (Divide) :

1. $16x^4$ কে $-4x$ দ্বারা।
2. $-18x^6$ কে $6x^2$ দ্বারা।
3. $-20a^7x^5$ কে $-5a^3x^2$ দ্বারা।
4. $36x^{10}y^9$ কে $12x^5y^4$ দ্বারা।
5. $-14a^4b^3c$ কে $-7a^2bc$ দ্বারা।
6. $-20p^{12}q^8r^2$ কে $10p^{10}q^6r^2$ দ্বারা।
7. $-70x^{16}y^9z$ কে $-14x^{10}y^5$ দ্বারা।
8. $64a^{12}b^7c^5$ কে $-8a^9b^7c^3$ দ্বারা।
9. $-81m^{13}n^{14}p^5$ কে $27m^8n^8p^4$ দ্বারা।
10. $-69a^7b^4c^9$ কে $-23a^5b^4c^7$ দ্বারা।
11. $25x^{20}y^3z^8$ কে $-5x^{16}yz^8$ দ্বারা।
12. $-42a^{23}x^{23}y^9z^3$ কে $-14a^{17}x^{18}y^5z$ দ্বারা।
13. a^{101} কে a^{57} দ্বারা।
14. $28x^{205}$ কে $-4x^{157}$ দ্বারা।
15. $56m^{307}$ কে $-8m^{289}$ দ্বারা।
16. $-91a^{138}b^{209}$ কে $13a^{97}b^{89}$ দ্বারা।

57. একটি বহুপদরাশিকে একটি সরলরাশি দ্বারা ভাগ :

52 নিয়মের তৃতীয় অনুসিদ্ধান্ত হইতে দেখা যায় যে,

$$a(b+c+d+e+f+\cdots\cdots) = ab+ac+ad+ae+af+\cdots\cdots$$

অতএব, $(ab+ac+ad+ae+af+\cdots\cdots)\div a$

$$= b+c+d+e+f+\cdots\cdots$$

$$= (ab\div a)+(ac\div a)+(ad\div a)+(ae\div a)+(af\div a)+\cdots$$

সুতরাং, একটি বহুপদরাশিকে একটি সরলরাশি দ্বারা ভাগ করিতে হইলে, ভাজ্যের প্রত্যেকটি পদকে ভাজক দ্বারা ভাগ করিয়া, লব্ধ ভাগফলগুলির সমষ্টি লইলেই নির্ণেয় পূর্ণ ভাগফল পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. $4a^3x^2-6a^2x^3+10ax^4$ কে $-2ax$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\text{নির্ণেয় ভাগফল} = \frac{4a^3x^2-6a^2x^3+10ax^4}{-2ax}$$
$$= \frac{4a^3x^2}{-2ax}+\frac{-6a^2x^3}{-2ax}+\frac{10ax^4}{-2ax}$$
$$= -2a^2x+3ax^2-5x^3.$$

উদা. 2. $9x^5-4x^4a-2x^3a^2$ কে $3x^3$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\text{নির্ণেয় ভাগফল} = \frac{9x^5-4x^4a-2x^3a^2}{3x^3}$$
$$= \frac{9x^5}{3x^3}+\frac{-4x^4a}{3x^3}+\frac{-2x^3a^2}{3x^3}$$
$$= 3x^2-\tfrac{4}{3}xa-\tfrac{2}{3}a^2.$$

টীকা। কিছু অভ্যস্ত হইলে মধ্যবর্তী প্রক্রিয়াগুলি না দেখাইয়া একেবারেই ভাগফল লিখিয়া দেওয়া যায়।

প্রশ্নমালা 20

ভাগ কর (Divide) :

1. $3a^3b^2-2a^2b^3$ কে a^2b^2 দ্বারা। **2.** $2a^3b-3ab^3$ কে $-ab$ দ্বারা।

3. $6a^4b^2-9a^2b^4$ কে $3a^2b^2$ দ্বারা।

4. $12x^4y^2-9x^5y$ কে $-3x^3y$ দ্বারা।

5. $14x^7y^5-21x^5y^7$ কে $-7x^5y^5$ দ্বারা।

6. $4mn^3-12m^2n^2+16m^3n$ কে $4mn$ দ্বারা।

7. $-3a^3x^4+6a^2x^5-9a^4x^3$ কে $-3a^2x^3$ দ্বারা।

8. $12x^5-8x^3a^2+20ax^4$ কে $-4x^3$ দ্বারা।

9. $10m^5n^4-15m^7n^2-20m^3n^6$ কে $5m^3n^2$ দ্বারা।

10. $8p^4q^2-5p^3q^3-3p^2q^4$ কে $-8p^2q^2$ দ্বারা।

11. $-14x^8y^5+21x^{10}y^3-28x^7y^6$ কে $7x^7y^3$ দ্বারা।

12. $15a^4x^8-30a^7x^5-45a^6x^6$ কে $20a^4x^5$ দ্বারা।

13. $-60x^4a^5-75x^3a^6+80x^5a^4$ কে $-20x^3a^4$ দ্বারা।

14. $125m^6n^4p^2-175m^4n^6p^2-200m^2n^2p^8$ কে $25m^2n^2p^2$ দ্বারা।

15. $-a^2b^4c^4x^4y^4z^2+2a^4b^2c^4x^2y^4z^4-3a^4b^4c^2x^4y^2z^4$ কে $-a^2b^2c^2x^2y^2z^2$ দ্বারা।

পঞ্চম অধ্যায়

সরল সূত্রাবলী ও তাহাদের প্রয়োগ

(Simple Formulæ and their Application)

58. সংজ্ঞা : বীজগণিতীয় প্রতীকের (algebraical symbols) সাহায্যে সাধারণভাবে প্রকাশিত কোন সিদ্ধান্তকে **বীজগণিতীয় সূত্র** (algebraical formula) বা সংক্ষেপে, শুধু **সূত্র** (formula) বলা হয়। সূত্রের সাহায্যে সংখ্যাসম্বন্ধীয় যে কোন সিদ্ধান্ত অত্যন্ত সাধারণভাবে প্রকাশ করা যায়।

59. সূত্র : $\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$.

$$[\ (a+b)^2=(a+b)(a+b)$$
$$=a(a+b)+b(a+b)$$
$$=a^2+ab+ba+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2. \quad (\because \quad ab=ba.)$$

সুতরাং, <u>দুইটি রাশির সমষ্টির বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে, রাশি দুইটির বর্গদ্বয়ের সহিত উহাদের গুণফলের দ্বিগুণ যোগ করিতে হয়।</u>

অনুসি.। $a^2+b^2=(a^2+2ab+b^2)-2ab$
$$=\boldsymbol{(a+b)^2-2ab}.$$

উদা. 1. $2x+3y$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(2x+3y)^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$$
$$=4x^2+12xy+9y^2.$$

উদা. 2. $5x+4$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(5x+4)^2=(5x)^2+2(5x)(4)+4^2$$
$$=25x^2+40x+16.$$

উদা. 3. $4a^3+7b^4$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(4a^3+7b^4)^2=(4a^3)^2+2(4a^3)(7b^4)+(7b^4)^2$$
$$=16a^6+56a^3b^4+49b^8.$$

উদা. 4. $a+b+c$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(a+b+c)^2=\{a+(b+c)\}^2 \quad [\ (b+c) \text{ কে একটি পদ ধরিয়া}\ ]$$
$$=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$
$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$
$$=\mathbf{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.}$$

উদা. 5. $a+b+c+d$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(a+b+c+d)^2=\{(a+b)+(c+d)\}^2 \quad [\ (a+b) \text{ কে একটি এবং } (c+d) \text{ কে আর একটি পদ ধরিয়া}\ ]$$
$$=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$$
$$=(a^2+2ab+b^2)+2(ac+ad+bc+bd)+(c^2+2cd+d^2)$$
$$=\mathbf{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.}$$

উদা. 6. সরল কর :

$$(a+b-c)^2+2(a+b-c)(a-b+c)+(a-b+c)^2.$$

$(a+b-c)$ এর পরিবর্তে x এবং $(a-b+c)$ এর পরিবর্তে y ধরিলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$
$$=\{(a+b-c)+(a-b+c)\}^2=(2a)^2=4a^2.$$

উদা. 7. $x=15$, $y=-9$ হইলে, $9x^2+30xy+25y^2$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(3x)^2+2(3x)(5y)+(5y)^2=(3x+5y)^2.$

কিন্তু $3x+5y=3\times15+5\times(-9)=45-45=0.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=0.$

প্রশ্নমালা 21

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর (Find the square of) :

1. $x+4.$ **2.** $3a+2.$ **3.** $x+2y.$ **4.** $2x+7y.$

5. $3a+4b.$ **6.** $5a+7b.$ **7.** $ay+3bx.$ **8.** $a^2+2bc.$

9. $3x^2+2y^2.$ **10.** $4x^2+y^3.$ **11.** $a+2b+3c.$

12. $ab+bc+ca.$ **13.** $2p+3q+4r.$ **14.** $x^2+y^2+z^2.$

15. $2x+3y+4z.$ **16.** $x^2+y^3+z^4.$ **17.** $x+y+2a+3b.$

18. $3a+4b+c+2d.$ **19.** $2a+x+4y+3z.$ **20.** $4m+3n+3p+2q.$

সরল কর (Simplify) :

21. $(x+y)^2+2(x+y)(x-y)+(x-y)^2$.

22. $(x-y+z)^2+(y+z-x)^2+2(x-y+z)(y+z-x)$.

23. $(2a-3b+4c)^2+(2a+3b-4c)^2+2(2a-3b+4c)(2a+3b-4c)$.

24. $(5a-7b)^2+2(5a-7b)(9b-4a)+(9b-4a)^2$.

25. $(2x-5y-3z)^2+(6y+3z-x)^2+2(2x-5y-3z)(6y+3z-x)$.

মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

26. $9x^2+12x+4$, যখন $x=-1$.

27. $16x^2+64x+64$, যখন $x=-2$.

28. $25m^2+40mn+16n^2$, যখন $m=-18$ এবং $n=23$.

29. $49a^2+56ab+16b^2$, যখন $a=-7$ এবং $b=13$.

30. $64a^2+16ac+c^2$, যখন $a=6$ এবং $c=-49$.

31. $81x^2+18xz+z^2$, যখন $x=7$ এবং $z=-67$.

32. $36p^2+132pq+121q^2$, যখন $p=12$ এবং $q=-7$.

33. $m+\frac{1}{m}=4$ হইলে, দেখাও যে, $m^2+\left(\frac{1}{m}\right)^2=14$.

60. সূত্র : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

$$[\,(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a(a-b)-b(a-b)$$
$$=a^2-2ab+b^2.\,]$$

অর্থাৎ, দুইটি রাশির অন্তরফলের বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদের বর্গদ্বয়ের সমষ্টি হইতে রাশি দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ বিয়োগ করিতে হয়।

টীকা। এই সূত্রটি প্রকৃতপক্ষে পূর্ব্ব সূত্রেরই অন্তর্ভুক্ত ; কারণ,

$$(a-b)^2=\{a+(-b)\}^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

অনুসি. 1. $a^2+b^2=(a^2-2ab+b^2)+2ab=(a-b)^2+2ab$.

অনুসি. 2. যেহেতু $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ... (1)

এবং $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ... (2)

অতএব, $\mathbf{(a+b)^2=(a-b)^2+4ab}$;

এবং $\mathbf{(a-b)^2=(a+b)^2-4ab}$.

আবার, (1) এর সহিত (2) যোগ করিয়া,

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2);$$

এবং (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$$

উদা. 1. $3a-4b$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(3a-4b)^2=(3a)^2-2(3a)(4b)+(4b)^2$$
$$=9a^2-24ab+16b^2.$$

উদা. 2. $x-y-z$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(x-y-z)^2=\{x-(y+z)\}^2$$
$$=x^2-2x(y+z)+(y+z)^2$$
$$=x^2-2xy-2xz+y^2+2yz+z^2$$
$$=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz.$$

উদা. 3. $2x-3y-4z$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(2x-3y-4z)^2=\{2x-(3y+4z)\}^2$$
$$=(2x)^2-2(2x)(3y+4z)+(3y+4z)^2$$
$$=4x^2-2(6xy+8xz)+\{(3y)^2+2(3y)(4z)+(4z)^2\}$$
$$=4x^2-12xy-16xz+9y^2+24yz+16z^2$$
$$=4x^2+9y^2+16z^2-12xy-16xz+24yz.$$

উদা. 4. $a-b-c+d$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(a-b-c+d)^2=\{(a-b)-(c-d)\}^2$$
$$=(a-b)^2-2(a-b)(c-d)+(c-d)^2$$
$$=(a^2-2ab+b^2)-2(ac-ad-bc+bd)+(c^2-2cd+d^2)$$
$$=a^2-2ab+b^2-2ac+2ad+2bc-2bd+c^2-2cd+d^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2ac+2ad+2bc-2bd-2cd.$$

উদা. 5. সরল কর :

$$(ax-by+cz)^2+(ax-by-cz)^2-2(ax-by+cz)(ax-by-cz).$$

$(ax-by+cz)$ এর পরিবর্তে m এবং $(ax-by-cz)$ এর পরিবর্তে n ধরিয়া,

প্রদত্ত রাশি $=m^2+n^2-2mn=(m-n)^2$

$$=\{(ax-by+cz)-(ax-by-cz)\}^2$$
$$=(2cz)^2=4c^2z^2.$$

উদা. 6. $a=15$ এবং $b=6$ হইলে, $9a^2-48ab+64b^2$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(3a)^2-2(3a)(8b)+(8b)^2$

$=(3a-8b)^2$

$=(45-48)^2=(-3)^2=9.$

প্রশ্নমালা 22

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর (Find the square of) :

1. $x-3.$ **2.** $2x-5.$ **3.** $3x-5y.$

4. $ax-by.$ **5.** $8m-3n.$ **6.** $pm-qn.$

7. $p^2-mn.$ **8.** $x^2y-xy^2.$ **9.** $x^3-2xz.$

10. $3a^3-5b^3.$ **11.** $-xyz-abc.$ **12.** $x^2yz-y^2zx.$

13. $a^2x^4-b^2y^4.$ **14.** $a-2b-2c.$ **15.** $2x-3y-4z.$

16. $3m-4n-5q.$ **17.** $a^2-3b^2-5c^2.$ **18.** $x-y-a-b.$

19. $a-2x-3b-4y.$ **20.** $90-1.$ **21.** $120-3.$

22. $500-2.$ **23.** $1000-7.$

সরল কর (Simplify) :

24. $(a+3b)^2-2(a+3b)(a-3b)+(a-3b)^2.$

25. $(2a-4b+5c)^2+(2a+4b+5c)^2-2(2a-4b+5c)(2a+4b+5c).$

26. $(3a+5b+7c)^2+(7c-4a+5b)^2-2(3a+5b+7c)(7c-4a+5b).$

27. $(2x^2-y^2-5z^2)^2-2(2x^2-y^2-5z^2)(6z^2+2x^2-y^2)$
$+(6z^2+2x^2-y^2)^2.$

28. $(ab-bc+ca)^2+(ab+4bc+2ca)^2-2(ab-bc+ca)(ab+4bc+2ca).$

মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

29. $a^2b^2-12abc+36c^2$, যখন $a=4$, $b=7$ এবং $c=5.$

30. $x^2y^2-24xyz+144z^2$, যখন $x=7$, $y=9$ এবং $z=6.$

31. $25(x+y)^2+z^2-10z(x+y)$, যখন $x=47$, $y=-22$ এবং $z=129.$

32. $9c^2-42c(a+b)+49(a+b)^2$, যখন $a=-37$, $b=57$ এবং $c=45.$

33. $64(7p-5q)^2-96(7p-5q)r+36r^2$, যখন $p=28$, $q=32$ এবং $r=46.$

34. $c-\frac{1}{c}=4$ হইলে, দেখাও যে, $c^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2=18.$

61. **সূত্র ঃ** $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$$[\ (a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)$$
$$=a^2-ab+ba-b^2$$
$$=a^2-b^2\ ;\ \text{কারণ, } ab=ba.\ ]$$

অর্থাৎ, দুইটি রাশির সমষ্টি ও বিয়োগফলের গুণফল, রাশি দুইটির বর্গদ্বয়ের বিয়োগফলের সমান।

টীকা। বিপরীতভাবে প্রকাশ করিলে, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. সুতরাং, a^2-b^2 এর আকারে প্রকাশ করা যায় এরূপ যে কোন রাশিকে, রাশিদ্বয়ের সমষ্টি ও বিয়োগফল—এই দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

[কোন একটি রাশি, অন্য দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হইলে, শেষোক্ত রাশিসমূহের প্রত্যেকটিকে পূর্ব্বোক্ত রাশিটির **উৎপাদক** বা **গুণনীয়ক** (factor) বলে।]

উদা. 1. $3x+5y$ কে $3x-5y$ দ্বারা গুণ কর।

$$(3x+5y)(3x-5y)=(3x)^2-(5y)^2$$
$$=9x^2-25y^2.$$

উদা. 2. $a+b-c$ কে $a-b+c$ দ্বারা গুণ কর।

$$(a+b-c)(a-b+c)=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$$
$$=a^2-(b-c)^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)$$
$$=a^2-b^2+2bc-c^2.$$

উদা. 3. x^2+xy+y^2 কে x^2-xy+y^2 দ্বারা গুণ কর।

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^3+y^2)-xy\}$$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$
$$=x^4+x^2y^2+y^4.$$

উদা. 4. সরল কর ঃ $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\{(a^2+ab+b^2)+(a^2-ab+b^2)\}$$
$$\times\{(a^2+ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)\}$$
$$=(2a^2+2b^2)\times 2ab$$
$$=2(a^2+b^2)\times 2ab=4ab(a^2+b^2).$$

উদা. 5. $(9726854)^2-(9726849)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=(9726854+9726849)(9726854-9726849)$

$=19453703\times 5=97268515.$

উদা. 6. $(a+b)^2-(c-d)^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

'$a+b$' কে x এবং '$c-d$' কে y ধরিলে,

প্রদত্ত রাশি $=x^2-y^2$

$=(x+y)(x-y)$; [সূত্র 61 এর টীকা দেখ।]

$=\{(a+b)+(c-d)\}\{(a+b)-(c-d)\}$

$=(a+b+c-d)(a+b-c+d).$

উদা. 7. $16a^4-81x^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=(4a^2)^2-(9x^2)^2$

$=(4a^2+9x^2)(4a^2-9x^2).$ [সূত্র 61 এর টীকা দেখ।]

আবার, $4a^2-9x^2=(2a)^2-(3x)^2=(2a+3x)(2a-3x).$

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=(4a^2+9x^2)(2a+3x)(2a-3x).$

প্রশ্নমালা 23

গুণ কর (Multiply) :

1. $x+3$ এবং $x-3$.
2. $5x+13$ এবং $5x-13$.
3. $x+2a$ এবং $x-2a$.
4. $ax+by$ এবং $ax-by$.
5. $am+n^2$ এবং $am-n^2$.
6. $xy+yz$ এবং $xy-yz$.
7. x^2-2yz এবং x^2+2yz.
8. x^2y+xy^2 এবং xy^2-x^2y.
9. $x+1, x-1$ এবং x^2+1.
10. a^2+b^2, a^2-b^2 এবং a^4+b^4.
11. $a+b+c$ এবং $a+b-c$.
12. $a+b+c$ এবং $a-b-c$.
13. m^2+mn+n^2 এবং m^2-mn+n^2.
14. $x^2+2xy+2y^2$ এবং $x^2-2xy+2y^2$.
15. $ax-by+cz$ এবং $ax+by-cz$.
16. $-ax+by+cz$ এবং $ax+by+cz$.
17. $b^2m-c^2n+a^2p$ এবং $b^2m+c^2n-a^2p$.
18. $a^3-8b^3+27c^3$ এবং $a^3+8b^3-27c^3$.
19. $a^2x^2-2ax+2$ এবং $a^2x^2+2ax+2$.

20. $a^4x^4 - a^2x^2 + 1$ এবং $a^4x^4 + a^2x^2 + 1$.

21. $m^2 + \sqrt{2}.mn + n^2$ এবং $m^2 - \sqrt{2}.mn + n^2$.

22. $x^2 - \sqrt{2}x + 1$, $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ এবং $x^4 - 1$.

সরল কর (Simplify) :

23. $(a+b-c)^2 - (a-b+c)^2$. **24.** $(a-2b+3c)^2 - (a+2b-3c)^2$.

25. $(x^2+xy+y^2)^2 - (x^2-xy+y^2)^2$.

26. $(x+y-a+b)^2 - (x-y+a-b)^2$.

27. $(2a+3b-5c+7d)^2 - (2a-3b+5c-7d)^2$.

মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

28. $2345 \times 2345 - 2343 \times 2343$. **29.** $(53497)^2 - (53487)^2$.

30. $498567 \times 498567 - 498562 \times 498562$.

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

31. $25x^2 - 36$. **32.** $9a^2 - 16c^2$. **33.** $16m^2 - 49n^2$.

34. $4p^2 - 81q^2$. **35.** $a^2x^2 - 64b^2$. **36.** $36x^4 - 121y^4$.

37. $49 - 64d^2$. **38.** $144c^2 - 25d^2$. **39.** $(a+b)^2 - c^2$.

40. $(a+2b)^2 - 25c^2$. **41.** $4x^2 - (3a-4b)^2$.

42. $a^2 - (2b-3c)^2$. **43.** $a^4 - 81b^4$.

44. $(x-y)^2 - (a-b)^2$. **45.** $81x^4 - 625y^4$.

46. $(4a+7b)^2 - (3a-8b)^2$. **47.** $(3x+5y)^2 - (2x-7y)^2$.

48. $(a+2b-3c)^2 - (a+b-c)^2$. **49.** $(2m+3n-5p)^2 - (2n+3p)^2$.

50. $(3x-4y+7z)^2 - (2x-3y+5z)^2$.

সরল সমীকরণ-বিষয়ক সহজ প্রশ্নাবলীর সমাধান

(Solution of Simple Problems leading to Simple Equations)

62. বীজগণিতীয় প্রতীক (algebraical symbol) সাহায্যে পাটীগণিতীয় প্রশ্নাবলী কিরূপ সুচারুরূপে সমাধান করা যায়, তাহা নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিদ্বারা পরিষ্কাররূপে বুঝান যাইতেছে।

উদা. 1. তুমি কিছু টাকা লইয়া বাজারে গেলে। বাজারে 10 টাকা খরচ হওয়ার পর দেখিতে পাইলে যে তোমার নিকট আর 13 টাকা আছে। তুমি কত টাকা লইয়া বাজারে গিয়াছিলে ?

দেখ, তুমি যত টাকা লইয়া বাজারে গিয়াছিলে, তাহা হইতে 10 টাকা খরচ হওয়ার পর (অর্থাৎ, তাহা হইতে 10 টাকা বাদ দেওয়ার পর) তোমার নিকট 13 টাকা থাকিল। ঐ 10 টাকা খরচ না করিলে, নিশ্চয়ই তোমার নিকট **13 আর 10** (অর্থাৎ, 13 + 10) টাকা থাকিত। কাজেই, তুমি **13 + 10** অর্থাৎ 23 টাকা লইয়া বাজারে গিয়াছিলে।

বীজগণিতের প্রক্রিয়া অনুসারে :—

ধর, তুমি x টাকা লইয়া বাজারে গেলে এবং উহা হইতে 10 টাকা খরচ করিলে। তাহা হইলে, তোমার নিকট রহিল, $x-10$ টাকা। কিন্তু, ইহার পরিমাণ গণিয়া দেখিতে পাইলে 13 টাকা।

অতএব, $(x-10)$ টাকা = 13 টাকা ; অর্থাৎ, $x-10=13$ ... ... (A)

উভয় পক্ষেই 10 যোগ করিলে, $x-10+10=13+10$.

অথবা, $x=13+10=23$.

সুতরাং, তুমি 23 টাকা লইয়া বাজারে গিয়াছিলে।

উদা. 2. রাম ও শ্যামের একত্রে মাসিক আয় 240 টাকা ; শ্যামের মাসিক আয় 80 টাকা হইলে, রামের মাসিক আয় কত ?

বস্তুতঃ, উহাদের মোট আয় 240 টাকা হইতে শ্যামের আয় 80 টাকা বাদ দিলেই, রামের আয়ের পরিমাণ পাওয়া যাইবে। অর্থাৎ, রামের আয় হইল **240 − 80** টাকা অর্থাৎ **160** টাকা।

বীজগণিতের প্রক্রিয়া অনুসারে :—

মনে কর, রামের মাসিক আয় x টাকা।

তাহা হইলে, x টাকা + 80 টাকা, অর্থাৎ, $(x+80)$ টাকা = 240 টাকা।

অথবা, $x+80=240$; ... ... (B)

উভয় পক্ষ হইতে 80 বিয়োগ করিয়া,

$$x+80-80=240-80;$$

অথবা, $x=240-80=160.$

স্থতরাং, রামের মাসিক আয় = 160 টাকা।

উদা. 3. তোমার মা, তোমাদের 5 ভাইবোনকে ভাগ করিয়া দিবার জন্য, তোমাকে কতকগুলি সন্দেশ দিলেন ; তুমি প্রত্যেককে 4 টি করিয়া দিয়া দেখিলে যে সব শেষ হইয়াছে। তোমাকে তোমার মা কতগুলি সন্দেশ দিয়াছিলেন ?

ধর, নির্ণেয় সন্দেশের সংখ্যা x ; তাহা হইলে, x-সংখ্যক সন্দেশ সমান 5 ভাগ করিয়া প্রত্যেক ভাগে 4 টি করিয়া পাওয়া গেল। অর্থাৎ, $(x \div 5)$ সন্দেশ = 4 সন্দেশ ;

অথবা, $\frac{x}{5}=4$; ... ... (C)

উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\frac{x}{5}\times 5=4\times 5;$$

অথবা, $x=4\times 5=20.$

স্থতরাং, তোমার মা তোমাকে 20 টি সন্দেশ দিয়াছিলেন।

উদা. 4. তিনটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার যোগফল 120 হইলে, সংখ্যা তিনটির মান নির্ণয় কর।

সংখ্যা তিনটি ক্রমিক (consecutive) এবং অখণ্ড (integral) বলিয়া, মধ্যম সংখ্যাটি হইতে উহার পূর্ব্বেরটি 1 কম এবং উহার পরেরটি 1 বেশী হইবে। কাজেই, মধ্যমটিকে x ধরিলে, উহার পূর্ব্বেরটি $x-1$ এবং উহার পরেরটি $x+1$ হইবে।

স্থতরাং, $(x-1)+x+(x+1)=120$ ... ... (D)

অথবা, $3x=120$;

উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{3x}{3}=\frac{120}{3};$$

অথবা, $x=\frac{120}{3}=40.$

কাজেই, $x-1=40-1=39$ এবং $x+1=40+1=41.$

স্থতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা তিনটি যথাক্রমে 39, 40 ও 41 হইবে।

অন্যথায় : ধর, সংখ্যা তিনটি যথাক্রমে n, $n+1$ এবং $n+2$.

তাহা হইলে, $n+(n+1)+(n+2)=120$; ... ... (E)

অথবা, $3n+3=120$;

অথবা, $3n=120-3=117.$ [উভয় পক্ষ হইতে 3 বাদ দিয়া]

স্থতরাং, $\frac{3n}{3}=\frac{117}{3}$; [উভয় পক্ষকে 3 দিয়া ভাগ করিয়া]

$\therefore\ n=\frac{117}{3}=39,$

অতএব, $n+1=39+1=40,$

$n+2=39+2=41.$

কাজেই, সংখ্যা তিনটি হইল 39, 40 ও 41.

63. উপরিউক্ত উদাহরণগুলি হইতে দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেকটি প্রশ্নেরই নির্ণেয় রাশিটি একটি অজ্ঞাত মানবিশিষ্ট অক্ষর দ্বারা সূচিত করিলে, এক একটি বীজগণিতীয় বাক্য (algebraical expression) দ্বারা প্রদত্ত সর্তগুলি প্রকাশ করা যায়। যথা, উদা. 1 এ (A)-চিহ্নিত বাক্যটি দ্বারা, উদা. 2 এ (B)-চিহ্নিত বাক্যটি দ্বারা, উদা. 3 এ (C)-চিহ্নিত বাক্যটি দ্বারা, উদা. 4 এ (D) অথবা (E)-চিহ্নিত বাক্যদ্বয়ের যে কোনটি দ্বারা। এই বাক্যগুলির প্রত্যেকটিকেই একটি **সমীকরণ** (equation) বলে।

লক্ষ্য করিবে যে, প্রত্যেকটি সমীকরণেই, তুইটি রাশি একটি সমতা-চিহ্ন (=) (sign of equality) দ্বারা সম্বদ্ধ হইয়াছে। সমতা-চিহ্নের উভয় পার্শ্বের রাশিদ্বয়কে উহার **পক্ষ** (member) বা পার্শ্ব (side) বলে। বামদিকের রাশিটিকে **বামপক্ষ** (left hand member) বা বাম পার্শ্ব (left hand side) এবং ডা'নদিকের রাশিটিকে **ডা'ন পক্ষ** (right hand member) বা **ডা'ন পার্শ্ব** (right hand side) বলে। আবার, সমীকরণস্থিত অজ্ঞাত রাশিটির মান (value)-টিকে সমীকরণের **বীজ** (root) বলে। বস্তুতঃ, সমীকরণের বীজটিকে, সমীকরণে, উহার অজ্ঞাত রাশিটির পরিবর্তে বসাইলে দেখা যায় যে সমীকরণের উভয় পক্ষ একই সংখ্যায় পরিণত হয়। উদাহরণস্বরূপ, উদা. 1 এ (A)-চিহ্নিত $x-10=13$, সমীকরণটিতে, অজ্ঞাত রাশি x এর পরিবর্তে, উহার প্রাপ্ত মান 23 বসাইলে, $23-10=13$; অথবা, $13=13$; অর্থাৎ, উভয় পক্ষ একই সংখ্যায় পরিণত হয় ; এবং এইরূপ হইলে, ঐ সমীকরণটি (the equation) উক্ত বীজদ্বারা **সিদ্ধ** (satisfied) হইয়াছে বলা হয়।

তাহা হইলে দেখা যায় যে, **সমীকরণস্থিত অজ্ঞাত রাশির যে মানটি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে, সেই মানটিই ঐ সমীকরণের বীজ।**

কোন সমীকরণ সমাধান করার অর্থ হইল, উক্ত সমীকরণস্থিত অজ্ঞাত রাশিটির মান নির্ণয় করা।

উপরিউক্ত উদাহরণগুলি হইতে দেখা যায় যে, কোন সমীকরণ হইতে উহার বীজ নির্ণয় করার প্রক্রিয়াতে সাধারণতঃ নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধ চারিটির প্রয়োগ করিতে হয়।

স্বতঃসিদ্ধ চারিটি :—

(1) সমান সমান বস্তুর সহিত সমান সমান বস্তু যোগ করিলে, যোগফলগুলি পরস্পর সমান হইবে। [উদা. 1]

(2) সমান সমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে, বিয়োগফলগুলি পরস্পর সমান হইবে। [উদা. 2]

(3) সমান সমান বস্তুকে সমান সমান সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে, গুণফলগুলি পরস্পর সমান হইবে। [উদা. 3]

(4) সমান সমান বস্তুকে সমান সমান সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফলগুলি পরস্পর সমান হইবে। [উদা. 4]

বিষয়টি আরও পরিষ্কার করিয়া বুঝাইবার জন্য নিম্নে আরও কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

[সমীকরণ-সম্পর্কে অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যবস্তুর বিষয়-হিসাবে পরে বিস্তৃতভাবে আলোচনা করা হইবে।]

উদা. 5. কোন্ সংখ্যার সহিত 15 যোগ করিলে, উক্ত সংখ্যার দ্বিগুণ হইতে 10 বিয়োগ করার সমান হয় ?

ধর, নির্ণেয় সংখ্যাটি x ; ইহার সহিত 15 যোগ করিলে, $x+15$ হইল ; আবার, ইহার দ্বিগুণ হইতে 10 বিয়োগ করিলে, $2x-10$ পাওয়া গেল।

তাহা হইলে প্রদত্ত সর্ত অনুসারে, $x+15=2x-10$ ... ... (1)

উভয় পক্ষে 10 যোগ করিয়া,

$$x+15+10=2x-10+10\ ;$$

অথবা, $x+15+10=2x\ ;$

[**সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া** হইল :—ডা'ন পক্ষের '-10' বাম পক্ষে '$+10$' হইয়া যুক্ত হইল।]

উভয় পক্ষ হইতে x বিয়োগ করিয়া,

$$x+15+10-x=2x-x;$$

অথবা, $15+10=2x-x$;

[**সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া** হইল :—বাম পক্ষের '$+x$' ডা'ন পক্ষে '$-x$' হইয়া যুক্ত হইল।]

অথবা, $25=x$.

অর্থাৎ, x (নির্ণেয় সংখ্যা)-র মান 25.

সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যাটি হইল 25.

[শুদ্ধি-পরীক্ষা (verification) :

$25+15=40$; আবার, $2\times25-10=50-10=40$; কাজেই, (1)-চিহ্নিত সমীকরণটির উভয় পক্ষই, x এর পরিবর্তে 25 বসাইলে, 40 এ পরিণত হয়।

কাজেই, **25** ই সমীকরণটির নির্ণেয় **বীজ (root)**]

দ্রষ্টব্য। উপরিউক্ত 'সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়া' দুইটিকে **পক্ষান্তরকরণ** (transposition) প্রক্রিয়া বলে।

কাজেই, সমীকরণে, পক্ষান্তরকরণ প্রক্রিয়া দ্বারা এক পক্ষের (পার্শ্বের) কোন রাশিকে উহার পূর্ব্ববর্ত্তী চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিয়া অন্য পক্ষে (পার্শ্বে) স্থানান্তরিত করা যায়।

উদা. 6. দুই-অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার দশক-স্থানীয় অঙ্কটি, একক-স্থানীয় অঙ্কটি হইতে 2 কম ; উক্ত অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 16 হইলে, সংখ্যাটি কত ?

ধর, একক-স্থানীয় অঙ্কটি x দ্বারা সূচিত হইল। তাহা হইলে দশক-স্থানীয় অঙ্কটি হইবে $x-2$; এবং উহাদের যোগফল $=16$.

কাজেই, $x+x-2=16$; অথবা, $2x-2=16$;

অথবা, $2x=16+2=18$ (2 কে পক্ষান্তর করিয়া) ;

সুতরাং, $x=\frac{18}{2}=9$ (উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া) ;

অতএব, একক-স্থানীয় সংখ্যাটি হইল 9 ; কাজেই দশক-স্থানীয় অঙ্কটি হইল $9-2$ অর্থাৎ 7 ;

সুতরাং, সংখ্যাটি হইল $=10\times7+9=79$.

[শুদ্ধি-পরীক্ষা সুস্পষ্ট।]

উদা. 7. দুইটি সংখ্যার যোগফল 27 এবং বিয়োগফল 3 হইলে, সংখ্যা দুইটি কত ?

মনে কর, সংখ্যা দুইটির বড়টি x দ্বারা সূচিত হইল ; তাহা হইলে ছোটটি হইবে $27-x$ ($\because$ উহাদের যোগফল 27).

আবার, উহাদের বিয়োগফল 3 ; কাজেই, $x-(27-x)=3$;

স্থতরাং, $x-27+x=3$; অথবা, $2x-27=3$;

অথবা, $2x=27+3=30$; [27 কে পক্ষান্তর করিয়া]

স্থতরাং, $x=\frac{30}{2}=15$; [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া]

কাজেই, সংখ্যা দুইটির একটি হইল 15 ; অতএব, অপরটি হইল 27 – 15 অর্থাৎ 12.

∴ নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি হইল 15 এবং 12.

উদা. 8. কোন চা-বিক্রেতা 7 পাউণ্ড ভাল চায়ের সঙ্গে, উহা হইতে পাউণ্ড প্রতি 8 আনা কম দরের 5 পাউণ্ড চা মিশ্রিত করিয়া ঐ মিশ্রিত চাগুলি মোট 33 টাকা 8 আনা বিক্রয় করায় তাহার লাভ বা লোকসান কিছুই হইল না। ভাল চায়ের প্রতি পাউণ্ডের ক্রয়মূল্য কত ?

মনে কর, ভাল চায়ের প্রতি পাউণ্ডের ক্রয়মূল্য x টাকা।

তাহা হইলে 7 পাউণ্ড ভাল চায়ের ক্রয়মূল্য $=7x$ টাকা। আবার, খারাপ চায়ের এক পাউণ্ডের ক্রয়মূল্য x টাকা হইতে 8 আনা (অর্থাৎ $\frac{1}{2}$ টাকা) কম।

স্থতরাং, খারাপ চায়ের প্রতি পাউণ্ডের ক্রয়মূল্য $=(x-\frac{1}{2})$ টাকা।

অতএব, 5 পাউণ্ড খারাপ চায়ের ক্রয়মূল্য $=5(x-\frac{1}{2})$ টাকা।

তাহা হইলে, মিশ্রিত চায়ের মোট ক্রয়মূল্য $=\{7x+5(x-\frac{1}{2})\}$ টাকা।

কিন্তু, ইহাই = বিক্রয়মূল্য = 33 টাকা 8 আনা, অর্থাৎ, $33\frac{1}{2}$ টাকা।

∴ $\{7x+5(x-\frac{1}{2})\}$ টাকা $=33\frac{1}{2}$ টাকা।

অর্থাৎ, $7x+5(x-\frac{1}{2})=33\frac{1}{2}$; অথবা, $12x-\frac{5}{2}=\frac{67}{2}$;

∴ $12x=\frac{67}{2}+\frac{5}{2}=\frac{72}{2}=36$;

স্থতরাং, $x=\frac{36}{12}=3$. অর্থাৎ, ভাল চায়ের প্রতি পাউণ্ডের ক্রয়মূল্য 3 টাকা।

প্রশ্নমালা 24

1. এক ব্যক্তি তাহার মাসিক আয় হইতে 275 টাকা ব্যয় করিয়া মাসে 125 টাকা জমাইলে তাহার মাসিক আয় কত ?

2. এক ব্যক্তি মাসিক 225 টাকা ব্যয় করিয়া বৎসরে 1500 টাকা জমাইতে পারেন। তাঁহার মাসিক আয় কত ?

3. কোন্ সংখ্যা হইতে 75 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 229 হইবে ?

4. কোন সংখ্যাকে 15 দিয়া গুণ করিয়া গুণফলের সহিত 120 যোগ করিলে যোগফল 225 হয় ; সংখ্যাটি কত ?

5. কোন্ সংখ্যার 8 গুণ হইতে 13 বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল 107 হইবে ?

6. কোন্ সংখ্যার 9 গুণের সহিত 9 যোগ করিলে, যোগফল সংখ্যাটির 10 গুণ হইবে ?

7. কোন্ সংখ্যার 3 গুণের সহিত 18 যোগ করিলে, যোগফল, ঐ সংখ্যার 8 গুণ হইতে 17 কম হইবে ?

8. কোন্ সংখ্যার 9 গুণ হইতে 16 বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল, ঐ সংখ্যার 7 গুণ হইতে 16 বেশী হইবে ?

9. কোন একটি সংখ্যার দ্বিগুণ, 100 হইতে যত ছোট, ঐ সংখ্যাটির 7 গুণ, 80 হইতে তত বড় ; সংখ্যাটি কত ?

10. দুইটি সংখ্যার যোগফল 29 এবং বিয়োগফল 3 হইলে, সংখ্যা দুইটি কত ?

11. দুইটি সংখ্যার যোগফল 225 এবং বিয়োগফল 15 হইলে, সংখ্যা দুইটি কত ?

12. দুইটি সংখ্যার যোগফল 53 এবং বড় সংখ্যাটি হইতে ছোট সংখ্যাটির দ্বিগুণের বিয়োগফল 11 হইলে, সংখ্যা দুইটি কত ?

13. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 25 ; বড় সংখ্যাটির চারিগুণ ছোট সংখ্যাটির পাঁচগুণের সমান হইলে, সংখ্যা দুইটি কত ?

14. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 26 ; বড় সংখ্যাটির দ্বিগুণ ছোট সংখ্যাটির তিনগুণ হইতে 2 বেশী হইলে, সংখ্যা দুইটি কত ?

15. দুই-অঙ্কবিশিষ্ট কোন একটি সংখ্যার একক-স্থানীয় অঙ্কটি দশক-স্থানীয় অঙ্কটি হইতে 5 বেশী ; সংখ্যাটি যদি উহার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির তিনগুণ হয়, তাহা হইলে সংখ্যাটি কত ?

16. পাঁচ বৎসর পূর্ব্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়স হইতে 25 বৎসর বেশী ছিল ; পুত্রের বর্ত্তমান বয়স 15 বৎসর হইলে, পিতার বর্ত্তমান বয়স কত ?

17. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 45 বৎসর ; পিতার বয়স পুত্রের বয়সের চারগুণ হইলে, প্রত্যেকের বয়স কত ?

18. এক ব্যক্তির 25 বৎসর বয়সে একটি পুত্র জন্মিল। কত বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 6 গুণ হইবে ?

19. এক গ্রোস্ (gross) পেন্সিলের প্রতিটি পেন্সিল 3 আনা দরে বিক্রয় করিয়া এক ব্যক্তি মোট 3 টাকা লাভ করিলেন ; পেন্সিলগুলির প্রতি ডজনের ক্রয়মূল্য কত ?

20. পাতিলেবুর প্রতি ঝুড়ি 3 টাকা দরে কিনিয়া 3 টাকা 8 আনা দরে বিক্রয় করিয়া এক ব্যক্তির 50 টাকা লাভ হইল ; কত ঝুড়ি লেবু কেনা হইয়াছিল ?

21. একখানি নৌকা স্রোতের বিমুখে যত গতিতে যায়, স্রোতের সহিত তাহার 5 গুণ গতিতে যায় ; স্রোতের বেগ যদি ঘণ্টায় 4 মাইল হয়, তাহা হইলে শান্তজলে, নৌকার গতিবেগ কত হইবে ?

22. এক ব্যক্তি 29 টাকা 50 জন বালক ও বালিকার মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দিলেন যে প্রত্যেক বালক 12 আনা করিয়া এবং প্রত্যেক বালিকা 8 আনা করিয়া পাইল। বালক ও বালিকার সংখ্যা কত ?

23. এক ব্যক্তির বয়স তাহার পুত্রের বয়সের 3 গুণ ; 16 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইলে, পিতা ও পুত্রের বর্ত্তমান বয়স কত ?

24. দুই-অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার একক-স্থানীয় অঙ্কটি দশক-স্থানীয় অঙ্কটির দ্বিগুণ ; ঐ সংখ্যার অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া লিখিলে যে সংখ্যাটি উৎপন্ন হয়, উহা পূর্ব্বসংখ্যার দ্বিগুণ হইতে 9 কম। পূর্ব্বসংখ্যাটি কত ?

25. কোন ব্যক্তি তাঁহার বাৎসরিক আয়ের প্রতি টাকায় দুই পয়সা করিয়া আয়-কর দিয়া মোট 1395 টাকা ঘরে আনিলেন। তাঁহার বাৎসরিক আয় কত ?

26. দুইখানি মটর-গাড়ী 12 মাইল ব্যবধানে থাকিয়া একই সময় একই দিকে রওনা হইল ; যদি পিছনের গাড়ীখানি ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে, এবং সামনের গাড়ীখানি ঘণ্টায় 16 মাইল বেগে যায়, তাহা হইলে কতক্ষণ পরে পিছনের গাড়ীখানি সামনের গাড়ীখানিকে ধরিয়া ফেলিবে ?

সপ্তম অধ্যায়

ছাত্রদের দৈনিক কাজকর্ম্ম ও অভিজ্ঞতা-সম্পর্কিত নির্দ্দিষ্ট মানের বিষয়বস্তু লইয়া অর্গল-লেখ (Bar-graph) অঙ্কন

(Bar-graph from numerical data based on activities and experiences of daily life of pupils)

64. মুখবন্ধ : পরিবর্ত্তনশীল কোন বস্তুর মান বিভিন্ন ক্ষেত্রে প্রায়শঃই বিভিন্ন হয়। এই বিভিন্ন মানগুলি কোনরূপ চিত্র দ্বারা জ্ঞাপন করিয়া রাখিলে সেই চিত্রের দিকে তাকাইবামাত্রই সাধারণ লোকের নিকটও উহার বিভিন্নতা পরিস্ফুট হইয়া পড়ে ; অধিকন্তু, উহার তুলনামূলক ধারণাও সহজসাধ্য হয়।

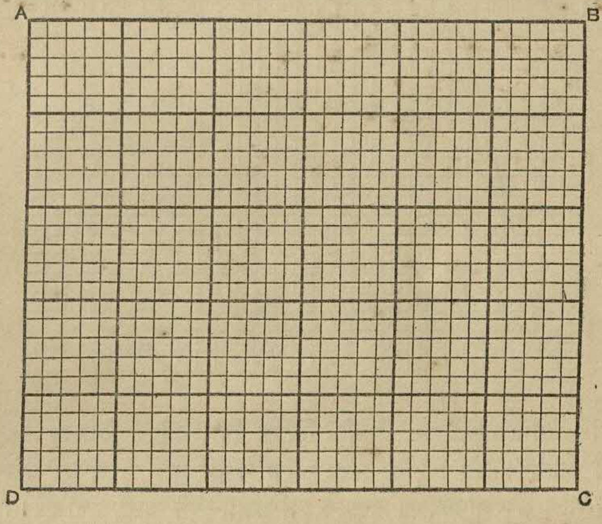
এই উদ্দেশ্যেই আমরা এরূপ কতকগুলি জ্যামিতিক রেখার (বা চিত্রের) সাহায্য লইয়া থাকি যে ঐ চিত্র দেখিলেই উক্ত বস্তুর মান-পরিবর্ত্তন-সম্পর্কে পরিষ্কার জ্ঞান জন্মে। যে রেখাগুলি, বা চিত্রের সাহায্যে আমরা উক্ত মান-পরিবর্ত্তন-সম্পর্কে জানিতে পারি, সেই রেখাগুলি বা, চিত্রকে লেখ (graph) বলে। ইহা দুই প্রকারের : অর্গল (bar) বা হুড়কার মত কাগজের প্রস্থ বরাবর অঙ্কিত রেখা দ্বারা সূচিত, অথবা, স্তম্ভ (column)-এর মত কাগজের দৈর্ঘ্য বরাবর রেখাদ্বারা সূচিত। প্রথমোক্ত রেখাগুলিকে **অর্গল-লেখ (Bar-graph),** এবং দ্বিতীয় শ্রেণীর রেখাগুলিকে **স্তম্ভ-লেখ (Column-graph)** বলে।

এই অধ্যায়ে অর্গল-লেখ (Bar-graph) সম্পর্কে আলোচনা করা হইবে।

আমরা পরবর্ত্তী উদাহরণগুলি হইতে দেখিতে পাইব যে বস্তুনির্দ্দেশক কোন লেখ (চিত্র) অঙ্কন করিতে হইলে **বর্গাঙ্কিত কাগজ** (squared paper) বলিয়া একরূপ কাগজ আছে, উহাতে অঙ্কন করাই সুবিধাজনক। সেইজন্য, প্রথমে (অর্থাৎ উপক্রমণিকাতে) বর্গাঙ্কিত কাগজ কিরূপ, এবং কিরূপেই বা আমরা উহা ব্যবহার করি, তাহার আলোচনা করিতেছি। ইহার পর, অর্গল-লেখ সম্বন্ধে আলোচনা করিব।

65. উপক্রমণিকা (Introduction) : বর্গাঙ্কিত কাগজ (Squared Paper) : বর্গাঙ্কিত কাগজের একটি নমুনা পরপৃষ্ঠায় দেওয়া হইল। উহাতে দুই শ্রেণীর সমদূরবর্ত্তী সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত আছে। এক শ্রেণীর রেখাসমূহ কাগজের দৈর্ঘ্যের, এবং অপর শ্রেণীর রেখাসমূহ কাগজের প্রস্থের, সমান্তরাল হওয়ায়,

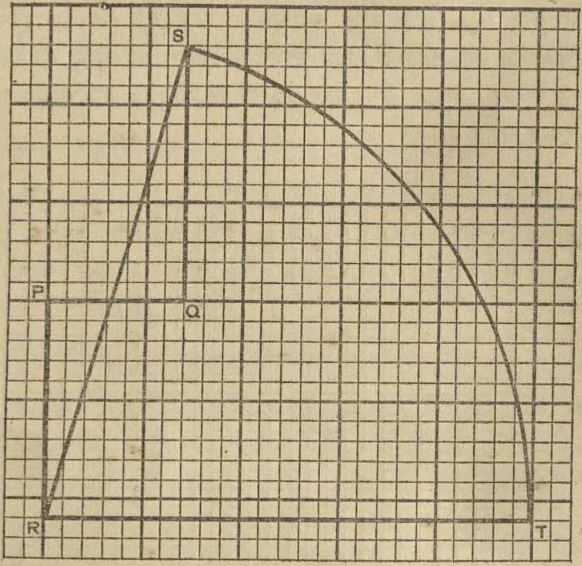
প্রথম শ্রেণীর প্রত্যেকটি রেখা দ্বিতীয় শ্রেণীর সকল রেখাকেই লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। প্রত্যেক শ্রেণীর রেখাগুলিই ধারাবাহিকক্রমে পরস্পর এক-দশমাংশ ইঞ্চি দূরে অবস্থিত বলিয়া, দুই শ্রেণীর রেখাসমূহের পরস্পর ছেদ হইতে কতকগুলি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পরস্পর-সমান বর্গক্ষেত্র উৎপন্ন হইয়াছে। আবার, উভয় শ্রেণীতেই কতকগুলি অপেক্ষাকৃত স্থূল রেখা দেখা যায়, যাহারা পরস্পর অর্দ্ধ ইঞ্চি দূরে অবস্থিত। অতএব, এই স্থূল রেখাগুলি দ্বারাও কতকগুলি অপেক্ষাকৃত বড় পরস্পর-সমান বর্গক্ষেত্র উৎপন্ন হইয়াছে, যাহাদের প্রত্যেকের বাহুর দৈর্ঘ্য অর্দ্ধ ইঞ্চি। স্পষ্টই দেখা যায় যে, প্রত্যেকটি বড় বর্গক্ষেত্রের মধ্যে পঁচিশটি ছোট ছোট বর্গক্ষেত্র আছে।



টীকা 1. বর্গাঙ্কিত কাগজের নমুনাটিতে, AB এর সমান্তরাল রেখাগুলিকে **পূর্ব্ব-পশ্চিম** (east-west) রেখা এবং AD এর সমান্তরাল রেখাগুলিকে **উত্তর-দক্ষিণ** (north-south) রেখা বলা যাইতে পারে। উহাদিগকে যথাক্রমে **অনুভূমিক** (horizontal) ও **উল্লম্ব** (vertical) রেখা বলিয়াও কল্পনা করা যায়।

টীকা 2. উপরিপ্রদর্শিত কাগজখানি এরূপেও রুল করা যাইতে পারে যে, একটি ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য এক সেন্টিমিটারের এক-দশমাংশ, অর্থাৎ, এক মিলিমিটার হয়। সেক্ষেত্রে, প্রত্যেক বড় বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য অর্দ্ধ সেন্টিমিটার বা 5 মিলিমিটার হইবে।

উদা. 1. চারিটি ষ্টেশন P, Q, R, S এরূপভাবে অবস্থিত যে, Q, P হইতে পূর্ব্বে 7 মাইল দূরে, R, P হইতে দক্ষিণে 11 মাইল দূরে, এবং S, Q হইতে উত্তরে 13 মাইল দূরে অবস্থিত। R হইতে S এর দূরত্ব নির্ণয় কর।



[কোন কাগজের কোন একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে উপরের দিকের অংশকে **উত্তরা**ভিমুখী অংশ, নীচের দিকের অংশকে **দক্ষিণা**ভিমুখী অংশ, ডা'নদিকের অংশকে **পূর্ব্বা**ভিমুখী অংশ এবং বামদিকের অংশকে **পশ্চিমা**ভিমুখী অংশ, বলা হয়।]

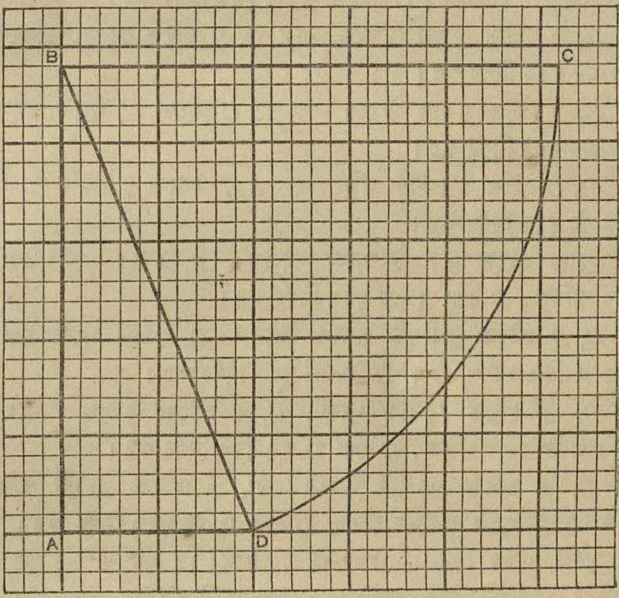
ধর, একটি ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে a দ্বারা সূচিত করা হইল, এবং উক্ত 'a' রাশিটি এক মাইল পরিমিত দূরত্ব জ্ঞাপন করে। তাহা হইলে P, Q, R, S এর অবস্থান উপরের চিত্রানুযায়ী হইবে, এবং $PQ = 7a$, $PR = 11a$ এবং $QS = 13a$.

এখন, R কে কেন্দ্র করিয়া RS কে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ আঁক এবং মনে কর উহা R বিন্দু দিয়া অঙ্কিত 'পশ্চিম-পূর্ব্ব' সরলরেখাটিকে T বিন্দুতে ছেদ করিল ;

এখন, যেহেতু $RT = 25a$, অতএব, $RS = 25a$;

সুতরাং, নির্ণেয় দূরত্ব = 25 **মাইল**।

উদা. 2. একটি সোজা খুঁটি উল্লম্বভাবে (vertically) দাঁড় করান আছে; উহার উচ্চতা 8 ফুট। $8\frac{2}{3}$ ফুট দীর্ঘ একগাছা দড়ির এক প্রান্ত খুঁটিটির উপরিভাগে বাঁধিয়া অপর প্রান্তটিকে এরূপভাবে মাটির সহিত সংলগ্ন করা হইল, যেন দড়িগাছা বেশ টান থাকে। খুঁটিটির পাদবিন্দু হইতে দড়িগাছার মাটিসংলগ্ন প্রান্তটির দূরত্ব নির্ণয় কর।



ধর, ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'a' দ্বারা সূচিত করা হইল।

মনে কর, $3a$ (অর্থাৎ, একটি ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর তিনগুণ) এক ফুট দৈর্ঘ্য সূচিত করিতেছে; তাহা হইলে 8 ফুট দৈর্ঘ্য $24a$ দ্বারা এবং $8\frac{2}{3}$ ফুট দৈর্ঘ্য $26a$ দ্বারা সূচিত হইবে। এখন, AB খুঁটিটিকে নির্দ্দেশ করিলে, $AB = 24a$. B বিন্দু দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক (horizontal) সরলরেখাটির উপর C বিন্দুটি এরূপে লও, যেন $BC = 26a$ হয়। B কে কেন্দ্র করিয়া এবং BC ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এরূপ একটি বৃত্ত-চাপ আঁক, যাহা A বিন্দু দিয়া 'পশ্চিম-পূর্ব্ব' অঙ্কিত অনুভূমিক রেখাটিকে D বিন্দুতে কাটে। BD যুক্ত কর; তাহা হইলে BD ই দড়িগাছার অবস্থান সূচিত করিবে।

এখন, AD কে $10a$ (অর্থাৎ $9a+a$) এর সমান দেখা যায় ; অতএব, উহার দৈর্ঘ্য $3\frac{1}{3}$ ফুট। উহাই খুঁটিটির পাদবিন্দু হইতে দড়িগাছার মাটিসংলগ্ন প্রান্তটির দূরত্ব।

প্রশ্নমালা 25

1. A, O হইতে পূর্ব্বে $5\frac{1}{3}$ একক পরিমিত দূরে এবং P, A হইতে উত্তরে 4 একক পরিমিত দূরে অবস্থিত ; O হইতে P এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

2. B, O হইতে 3 ফুট পশ্চিমে, এবং Q, B হইতে $7\frac{1}{5}$ ফুট দক্ষিণে অবস্থিত ; O হইতে Q এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

3. C, O হইতে 2 গজ উত্তরে এবং R, C হইতে $6\frac{6}{7}$ গজ পশ্চিমে অবস্থিত ; O হইতে R এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

4. D, O হইতে 2·1 ইঞ্চি দক্ষিণে এবং S, D হইতে 2·8 ইঞ্চি পূর্ব্বে অবস্থিত ; S হইতে O এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

5. A, O হইতে 2·7 ফুট পূর্ব্বে অবস্থিত ; P, A এর উত্তরে এবং O হইতে 4·5 ফুট দূরে থাকিলে, P এবং A এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

6. Q, B হইতে 2·4 ফুট দক্ষিণে আছে। O, B এর পূর্ব্বে এবং Q হইতে 2·5 ফুট দূরে অবস্থিত হইলে, O হইতে B এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

7. B, A হইতে $4\frac{4}{5}$ গজ পূর্ব্বে ; C, A হইতে $\frac{3}{5}$ গজ উত্তরে এবং D, B হইতে 2 গজ উত্তরে অবস্থিত ; C এবং D এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

8. B, A হইতে 25 ফুট উত্তরে ; P, A হইতে 40 ফুট পশ্চিমে ; এবং Q, B হইতে 20 ফুট পূর্ব্বে অবস্থিত হইলে, Q এবং P এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

9. দুইটি উল্লম্ব (vertical) খুঁটি যথাক্রমে 14 ফুট ও $3\frac{4}{5}$ ফুট লম্বা এবং উহারা পরস্পর $13\frac{3}{5}$ ফুট দূরে অবস্থিত ; উহাদের উপরিস্থিত প্রান্তদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

10. 30 ফুট লম্বা একখানি মইএর পাদপ্রান্ত একটি উল্লম্ব দেওয়াল হইতে 10 ফুট দূরে অবস্থিত। দেওয়ালের কত দূর পর্য্যন্ত মইখানির উর্দ্ধপ্রান্ত পৌঁছাইবে ?

66. তোমরা উপক্রমণিকাতে বর্গাঙ্কিত কাগজ ও উহার ব্যবহার সম্পর্কে শিখিয়াছ। বর্ত্তমানে, অর্গল-লেখ অঙ্কন করিবার প্রণালী সম্পর্কে আলোচনা করা হইতেছে।

67. অর্গল-লেখ (Bar-graph) :

মনে রাখিবে যে, বস্তুর মান-নির্দ্দেশক সংখ্যা, জ্যামিতিক সরলরেখা দ্বারা সূচিত করিতে হইলে, কতটুকু দৈর্ঘ্যের সরলরেখা, কত সংখ্যা জ্ঞাপন করে, ইহার একটি সুস্পষ্ট

সম্বন্ধ স্থাপন করা আবশ্যক। এই সম্বন্ধটিকেই লেখ (graph)-এর **স্কেল বা মান-দণ্ড** (scale) বলে। কিরূপ স্কেল লইয়া অর্গল-লেখ (Bar-graph)-টি অঙ্কন করা হইল, তাহা উক্ত লেখের কাগজখানির বামদিকের উপরের কোণের কাছে লিখিয়া রাখিতে হয়।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী পরিষ্কার করিয়া বুঝান যাইতেছে।

উদা. 1. মনে কর, তোমাদের স্কুলের মোট ছাত্র-সংখ্যা 800 এবং উপস্থিতি-বিবরণী-বহি (attendance register) হইতে দেখা যায় যে, কোন এক সপ্তাহের ছাত্র-উপস্থিতি নিম্নলিখিতরূপ হইয়াছে ; উহার সাহায্যে ঐ সপ্তাহের ছাত্র-উপস্থিতির একটি অর্গল-লেখ (Bar-graph) অঙ্কন কর।

বার	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র	শনি
ছাত্র-উপস্থিতির সংখ্যা	600	650	700	750	720	700

স্কেল মনোনয়ন ঃ—ছাত্র-উপস্থিতির নিম্নতম সংখ্যা—600
" " উচ্চতম " —750.

মোটামুটিভাবে ধরিতে গেলে 600 হইতে 800, এই সংখ্যাগুলিকে রেখার দৈর্ঘ্যদ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে। এখন তোমার কাগজখানি কতটুকু চওড়া দেখিয়া লও। ধর, উহা 5" ইঞ্চি চওড়া। তাহা হইলে, দুই পাশে একটু একটু বাদ দিয়া, 4" ইঞ্চির বেশী ব্যবহার করা অসুবিধাজনক। এই 4" ইঞ্চি দৈর্ঘ্য দ্বারা যদি 800 ছাত্র বুঝাইতে হয়, তাহা হইলে 1" ইঞ্চি দ্বারা 200 ছাত্র বুঝাইবে।

অতএব, স্কেল লওয়া হইল, **1" = 200 ছাত্র-সংখ্যা ;**

[অর্থাৎ, ·1" = 20 ছাত্র-সংখ্যা।]

উক্ত স্কেল অনুসারে, ছাত্র-উপস্থিতির সংখ্যা 600 = 3" ;
" " " 650 = 3·25"
" " " 700 = 3·50"
" " " 750 = 3·75"
" " " 720 = 3·60"
" " " 700 = 3·50".

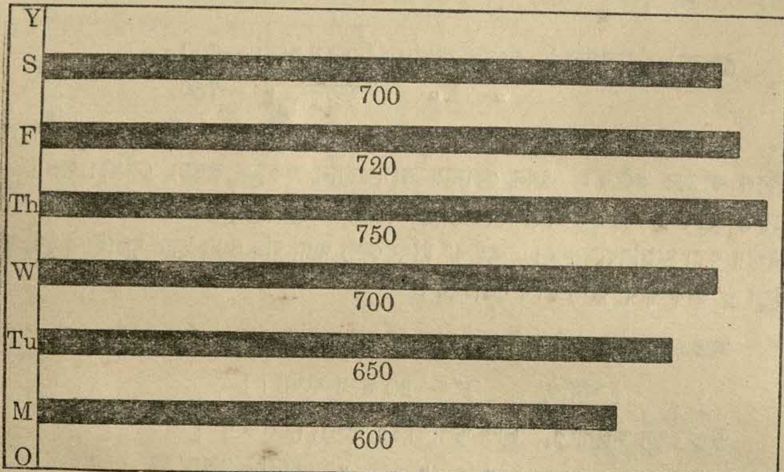
অঙ্কন ঃ উপরে বর্ণিত কাগজখানিতে যথাসম্ভব বামপার্শ্বে, দৈর্ঘ্য বরাবর একটি সরলরেখা (OY) আঁক ; উহার যথাসম্ভব নীচের দিকে ঐ রেখাটির উপর একটি বিন্দু 'O'

লও। O হইতে উপরের দিকে রেখাটির উপর পর পর সমান দূরবর্ত্তী ছয়টি বিন্দু লইয়া উহাদিগকে M, Tu, W, Th, F ও S এই ছয়টি বারের নামের প্রথমাক্ষর দ্বারা চিহ্নিত কর।

এখন, M চিহ্নিত বিন্দুটি দিয়া, দৈর্ঘ্য বরাবর রেখাটির (অর্থাৎ, OY এর) উপর লম্বভাবে অবস্থিত হয় এরূপ একটি রেখা আঁক (অর্থাৎ, প্রস্থ বরাবর একটি রেখা আঁক)। এই রেখাটি হইতে, উপরিউক্ত স্কেল অনুসারে, 600-সংখ্যা নির্দ্দেশক দৈর্ঘ্য 3" ইঞ্চি কাটিয়া লও।

তাহা হইলে এই রেখাটিই সোমবারের ছাত্র-উপস্থিতির সংখ্যা 600 নির্দ্দেশ করিবে।

এইরূপে Tu, W, Th, F ও S চিহ্নিত বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত, এবং OY এর উপর লম্বভাবে অবস্থিত রেখাসমূহ হইতে স্ব স্ব দিনের ছাত্র-সংখ্যা নির্দ্দেশক দৈর্ঘ্যগুলি কাটিয়া লইলেই, ছয়দিনের ছাত্র-উপস্থিতির অর্গল-লেখ (Bar-graph)-টি অঙ্কন করা হইবে। [নিম্নের চিত্র দেখ।]



টীকা 1. অর্গল-লেখ (Bar-graph) এইরূপ সাদা কাগজের উপর না আঁকিয়া বর্গাঙ্কিত কাগজে (Squared paper এ) আঁকাই সুবিধাজনক।

কেননা :—

তাহা হইলে (1) সমদূরবর্ত্তী বিন্দু স্থাপনে কিংবা সরলরেখাসমূহের দৈর্ঘ্য পরিমাপে জ্যামিতিক প্রণালীর সাহায্য লইতে হয় না।

[কারণ, বর্গাঙ্কিত কাগজে, বড় বর্গের এক বাহু অর্দ্ধ ইঞ্চি দীর্ঘ এবং ছোট বর্গের এক বাহু 1″ ইঞ্চি দীর্ঘ হওয়ায়, বড় ও ছোট বর্গের সংখ্যা গণিলেই নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্য নিরূপিত হয়।]

এবং, (2) লম্ব-অঙ্কনেও জ্যামিতিক প্রণালীর প্রয়োগ করিতে হয় না।

[কারণ, বর্গাঙ্কিত কাগজখানি কতকগুলি পরস্পরচ্ছেদী লম্বরেখা দ্বারাই অঙ্কিত।]

কিন্তু, বর্গাঙ্কিত কাগজ ব্যবহার করিলে, উহাতে অঙ্কিত রেখাগুলি হইতে প্রভেদ বুঝাইবার জন্য লেখের রেখাসমূহকে একটু **মোটা** এবং **ঘন কালি**বিশিষ্ট করিয়া দিতে হয়।

আবার, একই লেখ-তে একাধিক বস্তুর বিষয় বুঝাইতে হইলে, কোন কোন ক্ষেত্রে লেখটির প্রত্যেকটি রেখা একটি বা দুইটি ছোট বর্গের সমান চওড়া করিয়া আঁকিতে হয়।

টীকা 2. পূর্ব্ব উদাহরণটিতে, 200 ছাত্রের উপস্থিতি 1″ ইঞ্চি দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে। কিন্তু, ইহার পরিবর্ত্তে অন্যরূপ স্কেলও লওয়া যাইত। যথা, 1″=100 জন ছাত্রের উপস্থিতি, বা, 50 জন ছাত্রের উপস্থিতি; ইত্যাদি। অথবা, 1 সেন্টিমিটার= 200 জন ছাত্রের উপস্থিতি, বা, 100 জন ছাত্রের উপস্থিতি, বা, 50 জন ছাত্রের উপস্থিতি, ইত্যাদি।

কিন্তু, স্কেলে, 1″ বা 1 সে. মি. প্রভৃতি দ্বারা কম ছাত্রসংখ্যা সূচিত করিলে, ছাত্র-সংখ্যার নির্দ্দিষ্ট মানটি বড় রেখা দ্বারা জ্ঞাপিত করিতে হইবে; যথা, "1″=200 জন ছাত্র", এই স্কেলে 600 ছাত্র বুঝাইতে 3″ রেখার দরকার; ঐ স্কেল যদি 1″=50 জন ছাত্র হইত, তাহা হইলে 600 ছাত্র বুঝাইতে 12″ ইঞ্চি দীর্ঘ রেখার আবশ্যক হইত, এবং হয়ত ঐ রেখাটি কাগজে না ধরিতেও পারিত। অপর পক্ষে, কোন নির্দ্দিষ্ট স্কেলে, ছাত্র-সংখ্যার মান যত কম হইবে, অর্গল-লেখ (Bar-graph)-টি তত পরিষ্কার ও নির্ভুল হইবে। **এই দুইএর সামঞ্জস্য করিয়াই স্কেল মনোনীত করিতে হয়।**

টীকা 3. পূর্ব্ব উদাহরণের লেখ (graph)-টিকে ছোট আকারের করিয়াও নির্ভুলভাবে অঙ্কন করিবার বিকল্প পদ্ধতি নিম্নলিখিতরূপে ব্যাখ্যা করা যাইতেছে।

68. প্রথম উদাহরণের অঙ্কনের বিকল্প পদ্ধতি :—

যদি, কাগজখানির দৈর্ঘ্য বরাবর রেখাটি (অর্থাৎ, OY) কে '0'-রেখা (অর্থাৎ, যে রেখার উপরিস্থিত বিন্দু হইতে গণনা আরম্ভ করা হয়) মনে না করিয়া, ছাত্র-উপস্থিতির নিম্নতম সংখ্যা "600"এর সূচক রেখা (অর্থাৎ যে রেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু 600 ছাত্র-সংখ্যা সূচিত করে) বলিয়া ধরা হইত, এবং উক্ত রেখার উপরিস্থিত বিভিন্ন

বার-নির্দ্দেশক বিন্দু দিয়া অঙ্কিত লম্ব রেখাসমূহ, স্ব স্ব দিনের 600 হইতে **অতিরিক্ত** ছাত্র-সংখ্যা নির্দ্দেশ করিত, তাহা হইলে লেখটি ছোট আকৃতিবিশিষ্ট এবং নির্ভুলভাবে অঙ্কিত হইত। কারণ, এক্ষেত্রে, 600 এর সহিত **যত** যোগ করিলে মোট 800 হয়; তাহাকে, (অর্থাৎ, মোটামুটিভাবে 200 কে) কোন নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের রেখাদ্বারা জ্ঞাপিত করিলেই চলে। এখন, এই অতিরিক্ত 200 জন ছাত্রকে যদি 4″ ইঞ্চি দীর্ঘ রেখাদ্বারা সূচিত করা যায়;

অর্থাৎ, স্কেলটি যদি, 4″ = 200 জন ছাত্র ;

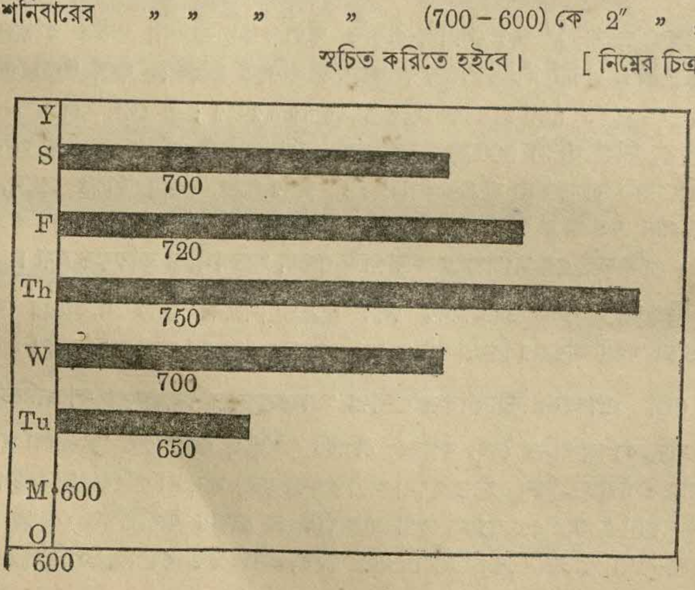
অথবা, 1″ = 50 জন " ;

বা, ·1″ = 5 জন " , এইরূপ হয়,

তাহা হইলে,

সোমবারের	600-এর অতিরিক্ত ছাত্রসংখ্যা	(600 − 600) কে	'0″'- দ্বারা,
মঙ্গলবারের	" " " "	(650 − 600) কে	1″ " ,
বুধবারের	" " " "	(700 − 600) কে	2″ " ,
বৃহস্পতিবারের	" " " "	(750 − 600) কে	3″ " ,
শুক্রবারের	" " " "	(720 − 600) কে	2·4″ " ,
শনিবারের	" " " "	(700 − 600) কে	2″ " ,

সূচিত করিতে হইবে। [নিম্নের চিত্র দেখ]



এখন, একখানি কাগজের দৈর্ঘ্য বরাবর একটি রেখা OY আঁক ; O বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া পর পর ছয়টি সমদূরবর্ত্তী বিন্দু লইয়া M, Tu, W, Th, F ও S এই ছয়টি বারের আদ্যক্ষর দ্বারা উহাদিগকে চিহ্নিত কর। তারপর, M, Tu, W, Th, F ও S বিন্দুগুলি দিয়া OY রেখার উপর এক একটি লম্ব আঁক এবং ঐ লম্ব-রেখাগুলি হইতে যথাক্রমে 1", 2", 3", 2·4" এবং 2" পরিমিত দৈর্ঘ্য কাটিয়া লও।

তাহা হইলে, M-চিহ্নিত বিন্দুটি এবং উপরি অঙ্কিত লম্ব-রেখাসমূহ একত্রে ছয় দিনের ছাত্র-উপস্থিতির অর্গল-লেখ (Bar-graph) সূচিত করিবে।

উদা. 2. তোমাদের ক্লাসের প্রথম দশটি ছেলের উচ্চতা-সূচক একটি অর্গল-লেখ (Bar-graph) প্রস্তুত কর।

ধর, ঐ ছাত্র দশটির উচ্চতা নিম্নলিখিতরূপ ; ইহা দ্বারা একটি অর্গল-লেখ অঙ্কন করিতে হইবে।

ছাত্র	১ম	২য়	৩য়	৪র্থ	৫ম	৬ষ্ঠ	৭ম	৮ম	৯ম	১০ম
উচ্চতা	5′	4′ 3″	4′ 6″	4′ 3″	4′ 8″	4′ 3″	4′ 3″	4′ 5″	4′ 3″	5′

(১) একখানি বর্গাঙ্কিত কাগজের যথাসম্ভব বামদিকে উহার দৈর্ঘ্য বরাবর একটি সরলরেখা লও।

(২) নীচের দিক হইতে আরম্ভ করিয়া ঐ রেখার উপর, সমান সমান দূরে দশটি বিন্দু স্থাপন কর।

(৩) ঐ বিন্দুগুলির পরস্পর ব্যবধান, ধর, পাঁচটি ছোট বর্গের বাহুর সমষ্টির সমান।

(৪) ঐ দশটি বিন্দুকে নীচ হইতে যথাক্রমে 1st, 2nd, 3rd, 4th, 5th, 6th, 7th, 8th, 9th ও 10th এইগুলি দ্বারা চিহ্নিত কর।

(৫) এখন, মনে কর, "**ছোট বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য '3'-ইঞ্চি পরিমিত উচ্চতা**" সূচিত করে। তাহা হইলে, এই স্কেলে, ১ম, ২য়, ৩য়, প্রভৃতি ছাত্রগণের উচ্চতা নিম্নলিখিতরূপে সূচিত হইবে—

১ম ছাত্রের উচ্চতা 5′ — (ছোট বর্গের) 20 টি বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বারা ;
২য় " " 4′3″ — " " 17 " " " " ;
৩য় " " 4′6″ — " " 18 " " " " ;
৪র্থ " " 4′3″ — " " 17 " " " " ;

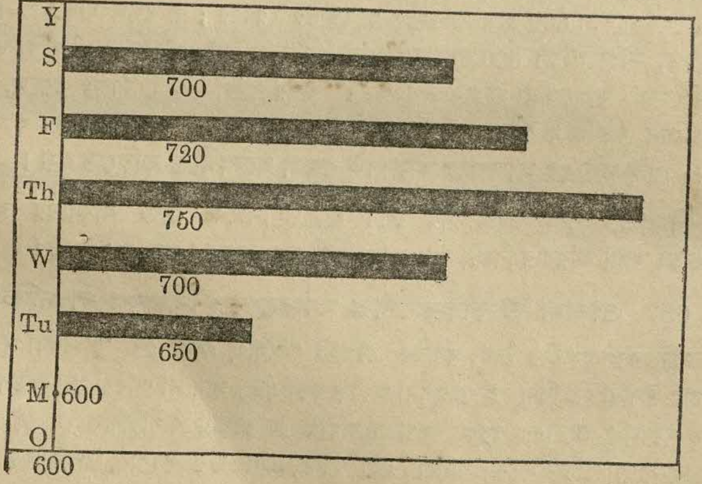
বার-নির্দ্দেশক বিন্দু দিয়া অঙ্কিত লম্ব রেখাসমূহ, স্ব স্ব দিনের 600 হইতে **অতিরিক্ত** ছাত্র-সংখ্যা নির্দ্দেশ করিত, তাহা হইলে লেখটি ছোট আকৃতিবিশিষ্ট এবং নির্ভুলভাবে অঙ্কিত হইত। কারণ, এক্ষেত্রে, 600 এর সহিত **যত** যোগ করিলে মোট 800 হয়; তাহাকে, (অর্থাৎ, মোটামুটিভাবে 200 কে) কোন নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের রেখাদ্বারা জ্ঞাপিত করিলেই চলে। এখন, এই অতিরিক্ত 200 জন ছাত্রকে যদি 4″ ইঞ্চি দীর্ঘ রেখাদ্বারা সূচিত করা যায়;

অর্থাৎ, স্কেলটি যদি, $4'' = 200$ জন ছাত্র;
অথবা, $1'' = 50$ জন " ;
বা, $\cdot1'' = 5$ জন " , এইরূপ হয়,

তাহা হইলে,

সোমবারের	600-এর অতিরিক্ত ছাত্রসংখ্যা			(600 − 600) কে	‘0″’- দ্বারা,	
মঙ্গলবারের	" "	"	"	(650 − 600) কে	1″	" ,
বুধবারের	" "	"	"	(700 − 600) কে	2″	" ,
বৃহস্পতিবারের	" "	"	"	(750 − 600) কে	3″	" ,
শুক্রবারের	" "	"	"	(720 − 600) কে	2·4″	" ,
শনিবারের	" "	"	"	(700 − 600) কে	2″	" ,

সূচিত করিতে হইবে। [নিম্নের চিত্র দেখ]



এখন, একখানি কাগজের দৈর্ঘ্য বরাবর একটি রেখা OY আঁক ; O বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া পর পর ছয়টি সমদূরবর্ত্তী বিন্দু লইয়া M, Tu, W, Th, F ও S এই ছয়টি বারের আদ্যক্ষর দ্বারা উহাদিগকে চিহ্নিত কর। তারপর, M, Tu, W, Th, F ও S বিন্দুগুলি দিয়া OY রেখার উপর এক একটি লম্ব আঁক এবং ঐ লম্ব-রেখাগুলি হইতে যথাক্রমে 1", 2", 3", 2·4" এবং 2" পরিমিত দৈর্ঘ্য কাটিয়া লও।

তাহা হইলে, M-চিহ্নিত বিন্দুটি এবং উপরি অঙ্কিত লম্ব-রেখাসমূহ একত্রে ছয় দিনের ছাত্র-উপস্থিতির অর্গল-লেখ (Bar-graph) সূচিত করিবে।

উদা. 2. তোমাদের ক্লাসের প্রথম দশটি ছেলের উচ্চতা-সূচক একটি অর্গল-লেখ (Bar-graph) প্রস্তুত কর।

ধর, ঐ ছাত্র দশটির উচ্চতা নিম্নলিখিতরূপ ; ইহা দ্বারা একটি অর্গল-লেখ অঙ্কন করিতে হইবে।

ছাত্র	১ম	২য়	৩য়	৪র্থ	৫ম	৬ষ্ঠ	৭ম	৮ম	৯ম	১০ম
উচ্চতা	5′	4′ 3″	4′ 6″	4′ 3″	4′ 8″	4′ 3″	4′ 3″	4′ 5″	4′ 3″	5′

(১) একখানি বর্গাঙ্কিত কাগজের যথাসম্ভব বামদিকে উহার দৈর্ঘ্য বরাবর একটি সরলরেখা লও।

(২) নীচের দিক হইতে আরম্ভ করিয়া ঐ রেখার উপর, সমান সমান দূরে দশটি বিন্দু স্থাপন কর।

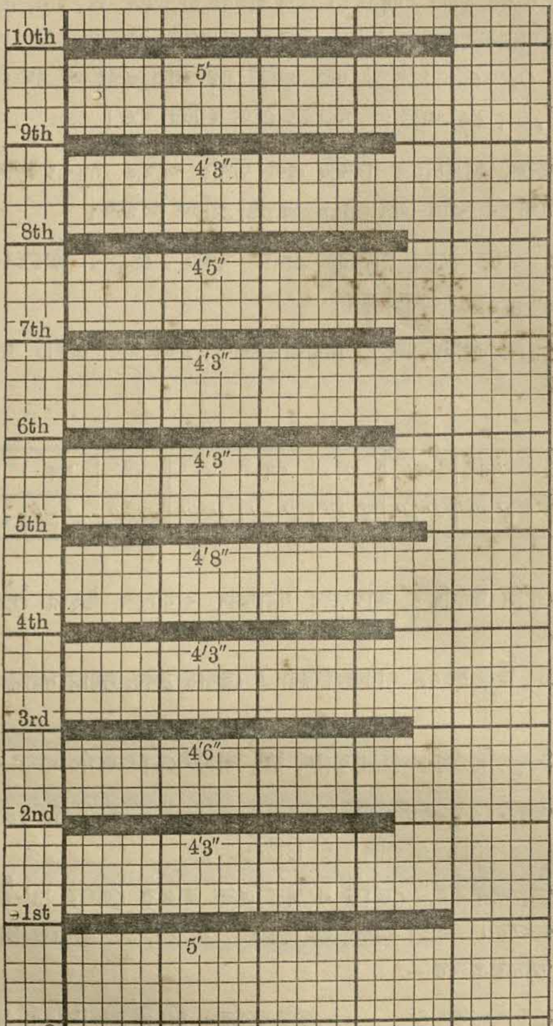
(৩) ঐ বিন্দুগুলির পরস্পর ব্যবধান, ধর, পাঁচটি ছোট বর্গের বাহুর সমষ্টির সমান।

(৪) ঐ দশটি বিন্দুকে নীচ হইতে যথাক্রমে 1st, 2nd, 3rd, 4th, 5th, 6th, 7th, 8th, 9th ও 10th এইগুলি দ্বারা চিহ্নিত কর।

(৫) এখন, মনে কর, **"ছোট বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য '3'-ইঞ্চি পরিমিত উচ্চতা"** সূচিত করে। তাহা হইলে, এই স্কেলে, ১ম, ২য়, ৩য়, প্রভৃতি ছাত্রগণের উচ্চতা নিম্নলিখিতরূপে সূচিত হইবে—

১ম ছাত্রের উচ্চতা 5′ — (ছোট বর্গের) 20 টি বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বারা ;
২য় " " 4′3″ — " " 17 " " " " ;
৩য় " " 4′6″ — " " 18 " " " " ;
৪র্থ " " 4′3″ — " " 17 " " " " ;

স্কেল—·1″ = 3″ উচ্চতা


10th
5'
9th
4'3"
8th
4'5"
7th
4'3"
6th
4'3"
5th
4'8"
4th
4'3"
3rd
4'6"
2nd
4'3"
1st
5'
O

৫ম ছাত্রের উচ্চতা 4′8″ — (ছোট বর্গের) $18\frac{2}{3}$ টি বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বারা ;
৬ষ্ঠ " " 4′3″ — " " 17 " " " " ;
৭ম " " 4′3″ — " " 17 " " " " ;
৮ম " " 4′5″ — " " $17\frac{2}{3}$ " " " " ;
৯ম " " 4′3″ — " " 17 " " " " ;
১০ম " " 5′ — " " 20 " " " " ।

(৬) এখন, উল্লম্ব (অর্থাৎ দৈর্ঘ্য বরাবর) রেখাটির উপর চিহ্নিত বিন্দুগুলির প্রত্যেকটিতে, উক্ত উল্লম্ব রেখার উপর এক একটি করিয়া লম্ব রেখা (অর্থাৎ, অনুভূমিক রেখা) আঁক ; এবং এই লম্ব-রেখাগুলি অর্থাৎ, অনুভূমিক রেখাগুলি হইতে নীচ হইতে আরম্ভ করিয়া যথাক্রমে 20 টি, 17 টি, 18 টি 17 টি, $18\frac{2}{3}$ টি, 17 টি, 17 টি, $17\frac{2}{3}$ টি, 17 টি ও 20 টি ছোট বর্গের বাহুর সমষ্টি পরিমিত দৈর্ঘ্যসমূহ কাটিয়া লও এবং উহাদিগকে ঘন কালি দিয়া একটু মোটা করিয়া দাও।

তাহা হইলে এই রেখাগুলিই নির্ণেয় **অর্গল-লেখ** (Bar-graph) হইবে।

টীকা : নিয়ম 68 এর পদ্ধতি অনুসারেও অর্গল-লেখ অঙ্কিত করা যায়, ছাত্রদের নিকট উহা অনুশীলনীরূপে দেওয়া হইল।

উদা. 3. দ্বিতীয় উদাহরণের সমান উচ্চতাবিশিষ্ট ছাত্রগণের নিম্নলিখিতরূপ ওজন হইলে, ওজন-নির্দেশক একটি অর্গল-লেখ (Bar-graph) অঙ্কন কর।

ছাত্র	২য়	৪র্থ	৬ষ্ঠ	৭ম	৯ম
ওজন	1 মণ 5 সের	1 মণ 3 সের	1 মণ	1 মণ 10 সের	1 মণ 6 সের

উদা 2. তে উল্লিখিত ছাত্রগণের মধ্যে ২য়, ৪র্থ, ৬ষ্ঠ, ৭ম ও ৯ম ছাত্রের উচ্চতা সমান ; প্রত্যেকেরই উচ্চতা 4′ 3″ ইঞ্চি।

এখানে, সর্ব্বোচ্চ ওজন—1 মণ 10 সের, সর্ব্বনিম্ন ওজন —1 মণ।

সুতরাং, একমণ ওজনের চিত্রাংশ বাদ দিয়া লেখ অঙ্কন করিলেই চলিবে।

∴ স্কেল লওয়া হইল—**1 সের = ছোট বর্গের দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি।**

তাহা হইলে, এক মণের অতিরিক্ত ওজনগুলি নিম্নলিখিত **সংখ্যক** ছোট বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টির সমান হইবে।

২য় ছাত্রের অতিরিক্ত ওজন **5 সের** 10 টি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান ;
৪র্থ " " " **3 সের** 6 টি " " " ;

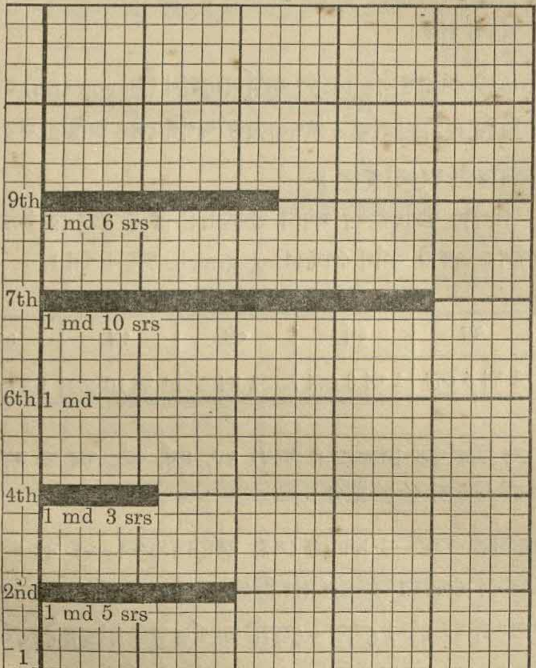
৬ষ্ঠ ছাত্রের কোন অতিরিক্ত ওজন নাই ;
৭ম " অতিরিক্ত ওজন **10 সের** 20 টি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান ;
৯ম " " " **6 সের** 12 টি " " " ।

এখন, একখানি বর্গাঙ্কিত কাগজের দৈর্ঘ্য বরাবর যথাসম্ভব বামদিকে একটি সরলরেখা লও।

উহার উপর, নীচ হইতে আরম্ভ করিয়া সমান সমান দূরে, পাঁচটি বিন্দু স্থাপন কর।

নীচ হইতে আরম্ভ করিয়া, ঐ বিন্দুগুলিকে 2nd, 4th, 6th, 7th ও 9th দ্বারা চিহ্নিত কর।

এখন, এই চিহ্ন-সমন্বিত সরলরেখার উপরিস্থিত বিন্দুগুলির যে কোনটি এক মণ সূচনা করে, এইরূপ ধরিয়া লও।



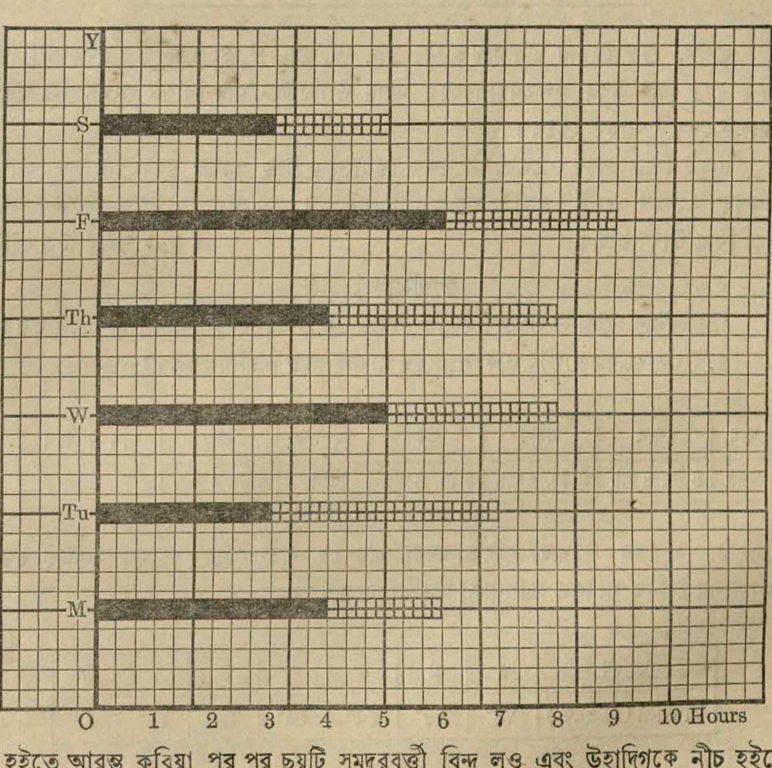
তারপর, ঐ চিহ্নিত বিন্দুগুলি দিয়া অতিক্রান্ত এবং চিহ্ন-সমন্বিত সরলরেখার উপর লম্বভাবে অঙ্কিত সরলরেখাসমূহ হইতে উপরিউক্ত তালিকা অনুসারে স্ব স্ব নির্দিষ্ট অতিরিক্ত

ওজন-সূচক দৈর্ঘ্যসমূহ কাটিয়া লও। তাহা হইলে ঐ রেখাগুলিই নির্ণেয় অর্গল-লেখ (Bar-graph) হইবে।

উদা. 4. তোমার নিম্নলিখিতরূপ দৈনিক লেখা ও পড়ার সময় **পৃথক পৃথকভাবে** সূচিত করিয়া উহাদের একটি সাপ্তাহিক অর্গল-লেখ (Bar-graph) অঙ্কন কর।

বার	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র	শনি
লেখা	4 ঘণ্টা	3 ঘণ্টা	5 ঘণ্টা	4 ঘণ্টা	6 ঘণ্টা	3 ঘণ্টা
পড়া	2 ঘণ্টা	4 ঘণ্টা	3 ঘণ্টা	4 ঘণ্টা	3 ঘণ্টা	2 ঘণ্টা

একখানি বর্গাঙ্কিত কাগজের যথাসম্ভব বামদিকে একটি উল্লম্ব রেখা (Vertical line) [অর্থাৎ, দৈর্ঘ্য বরাবর রেখা], OY আঁক ; [নিম্নের চিত্র দেখ] OY রেখার উপর,



O হইতে আরম্ভ করিয়া পর পর ছয়টি সমদূরবর্তী বিন্দু লও এবং উহাদিগকে নীচ হইতে

আরম্ভ করিয়া, যথাক্রমে বারের নামের আদ্যক্ষর M, Tu, W, Th, F ও S এই ছয়টি অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত কর।

এখন ধর, কাগজখানি 4″ ইঞ্চি পরিমিত চওড়া; তাহা হইলে, উর্দ্ধপক্ষে 3″ ইঞ্চির বেশী স্থান জুড়িয়া লেখটি আঁকা অসুবিধাজনক।

কাজেই, স্কেল লওয়া হইল—**1 ঘণ্টা = ছোট বর্গের তিন বাহুর সমষ্টির সমান** (অর্থাৎ, ·3″)। এই স্কেল অনুসারে লেখা ও পড়ার সময় পৃথক পৃথকভাবে নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্য (অর্থাৎ, ছোট বর্গের বাহুর সংখ্যা) দ্বারা সূচিত হইবে।

বার	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র	শনি
লেখা	12	9	15	12	18	9
পড়া	6	12	9	12	9	6

এখন, OY রেখার উপরিস্থিত M, Tu, W, Th, F ও S-চিহ্নিত বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত OY এর উপর লম্ব-রেখাসমূহের উপর উপরিউক্ত বার-নির্দ্দিষ্ট সংখ্যাগুলি সূচিত করিলেই লেখটি অঙ্কিত হইবে।

একই দিনে পড়া ও লেখা নির্দ্দেশক রেখাংশ দুইটির প্রভেদ বুঝাইবার জন্য লেখা-নির্দ্দেশক অংশকে একটু চওড়া ও ঘন কালিবিশিষ্ট কর এবং পড়া-নির্দ্দেশক অংশকে সমান চওড়া কিন্তু ফাঁকা রাখ। [১০১ পৃষ্ঠার চিত্র দেখ]

প্রশ্নমালা 26

নিম্নলিখিত সর্ত্তগুলি লইয়া প্রত্যেক ক্ষেত্রে একটি করিয়া Bar-graph অঙ্কন কর :

1. তোমাদের বাড়ীর এক সপ্তাহের বাজার খরচ নিম্নলিখিতরূপ :—

বার	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র	শনি	রবি
খরচ	5 টা. 8 আ.	6 টা. 4 আ.	5 টা. 8 আ.	5 টা.	5 টা. 4 আ.	6 টা.	10 টা.

2. খবরের কাগজ হইতে দেখা যায় যে মার্চ্চ মাসের প্রথম সপ্তাহে কোন এক স্থানের দৈনিক সর্ব্বোচ্চ তাপমাত্রা নিম্নলিখিত রূপ :—

তারিখ	1	2	3	4	5	6	7
তাপমাত্রা (ডিগ্রীতে)	78°	79°	81°	84°	86°	88°	89°

3. দ্বিতীয় প্রশ্নে উল্লিখিত স্থানের সর্ব্বনিম্ন তাপমাত্রা নিম্নলিখিত রূপ :—

তারিখ	1	2	3	4	5	6	7
তাপমাত্রা (ডিগ্রীতে)	72°	71°	74°	78°	79°	81°	82°

4. কোন এক রোগীর জ্বরের তাপমাত্রা এক দিনের মধ্যে নিম্নলিখিতরূপ :—

সময়	6 A.M.	8 A.M.	10 A.M.	12 Noon	2 P.M.	4 P.M.	6 P.M.	8 P.M.	10 P.M.
তাপমাত্রা	98°·4	98°·6	99°	101°	102°	100°·8	100°	99°	98°·4

5. তুমি দৈনিক কিছু সময় পাঠ্যপুস্তক ব্যতীত সাধারণ জ্ঞানের বই পড়িয়া থাক ; উহার সময় নিম্নলিখিতরূপ :—

বার	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র	শনি	রবি
সময়	1 ঘণ্টা	45 মি.	50 মি.	1 ঘণ্টা 30 মি.	45 মি.	1 ঘণ্টা	2 ঘণ্টা

6. তোমার দৈনিক খেলিবার ও বেড়াইবার মোট সময় নিম্নলিখিতরূপ :—

বার	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র	শনি	রবি
সময়	1 ঘ.	1 ঘ. 15 মি.	1 ঘ.	1 ঘ. 30 মি.	1 ঘ. 15 মি.	2 ঘ.	4 ঘ.

7. তোমার দৈনিক জল-খাবারের পয়সা নিম্নলিখিতরূপ :—

বার	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র	শনি
খরচ	4 আনা	6 আনা	8 আনা	1 টাকা	8 আনা	6 আনা

8. দ্বিতীয় ও তৃতীয় প্রশ্নদ্বয়ের তাপমাত্রাসমূহ একই Bar-graph এ দেখাও।

9. তুমি সকালে ও সন্ধ্যায় নিম্নলিখিতরূপে পড়িলে, এক সপ্তাহের একটি Bar-graph অঙ্কন কর :—

বার	সোম		মঙ্গল		বুধ		বৃহস্পতি		শুক্র		শনি		রবি	
	সকাল	সন্ধ্যা	সকাল	সন্ধ্যা	সকাল	সন্ধ্যা	সকাল	সন্ধ্যা	সকাল	সন্ধ্যা	সকাল	সন্ধ্যা	সকাল	সন্ধ্যা
সময়	3 ঘ.	4 ঘ.	2 ঘ. 30 মি.	3 ঘ. 30 মি.	3 ঘ. 15 মি.	3 ঘ. 30 মি.	3 ঘ.	3 ঘ. 30 মি.	3 ঘ. 30 মি.	2 ঘ 45 মি.	3 ঘ.	2 ঘ.	1 ঘ.	1 ঘ.

10. তোমার দৈনিক সকালে স্নান করিতে ও খাইতে যদি নিম্নলিখিতরূপ সময় লাগে, তবে একই Bar-graph এ উভয় সময় দেখাইয়া এক সপ্তাহের Bar-graph অঙ্কন কর :—

বার	সোম		মঙ্গল		বুধ		বৃহস্পতি		শুক্র		শনি		রবি	
	স্নানের	খাওয়ার	স্নানের	খাওয়ার	স্নানের	খাওয়ার	স্নানের	খাওয়ার	স্নানের	খাওয়ার	স্নানের	খাওয়ার	স্নানের	খাওয়ার
সময়	15 মি.	10 মি.	20 মি.	8 মি.	15 মি.	9 মি.	30 মি.	10 মি.	20 মি.	12 মি.	15 মি.	11 মি.	45 মি.	20 মি.

*জটিল যোগ ও বিয়োগ

(Harder Addition and Subtraction)

1. যোগ

69. চতুর্থ অধ্যায়ে যোগের নিম্নলিখিত নিয়মাবলী ব্যাখ্যা করা হইয়াছে :

(1) যোগফল নির্ণয় করিবার সময়ে, যোজ্যরাশিগুলিকে যে কোন ক্রমে (order এ) ই লওয়া যাইতে পারে। যথা,

$a+b+c=b+c+a=c+a+b$; ইত্যাদি। [নিয়ম 36]

ইহাকে যোগের **বিনিময়-নিয়ম** (Commutative Law) বলে।

(2) যোগফল নির্ণয় করিবার সময়ে, যোজ্যরাশিগুলির কতক কতক এক এক ভাগে লইয়া, উহাদিগকে বিভিন্ন বিভাগে (group এ) ভাগ করা যায়, এবং নির্ণেয় যোগফল ঐ বিভাগসমূহের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। যথা,

$a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c=b+(c+a)$; ইত্যাদি। [নিয়ম 37]

ইহাকে যোগের **সংযোগ-নিয়ম** (Associative Law) বলে।

(3) সাংখ্য-সহগ (numerical coefficient)-যুক্ত সদৃশপদসমূহের যোগফলও একটি সদৃশপদ (like term) এবং পদগুলির সাংখ্য-সহগের বীজগণিতীয় সমষ্টিই যোগফলের সাংখ্য-সহগ হইয়া থাকে। যথা, $5x$, $-2x$, $7x$ এবং $6x$ এর যোগফল $16x$; কারণ, $5+(-2)+7+6=16$. [নিয়ম 37, টীকা]

ইহাকে যোগের **পদ-সংযোগ প্রণালী** (process of *collecting terms*) বলে।

সদৃশ ও অসদৃশ পদযুক্ত মিশ্ররাশিসমূহের যোগফল নির্ণয় করিবার সাধারণ প্রণালীও 38 নিয়মে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে।

উপরিউক্ত নিয়মাবলী এ পর্য্যন্ত কেবলমাত্র সহজ সহজ ক্ষেত্রেই প্রযুক্ত হইয়াছে। বর্ত্তমানে উহাদিগকে জটিল যোগফল নির্ণয় করিবার জন্য প্রয়োগ করা হইবে।

70. ভগ্নাংশ-সহগ (Fractional coefficient)-বিশিষ্ট মিশ্র-রাশিসমূহের যোগফল নির্ণয় : ভগ্নাংশ-সহগবিশিষ্ট মিশ্ররাশিসমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে প্রত্যেকটি রাশিকে আবশ্যকমত সরল করিয়া তারপর রাশিগুলিকে, একটির নীচে একটি করিয়া, এরূপভাবে স্থাপন করিতে হইবে,

---

* পাঠ্যতালিকার বহির্ভূত।

যেন বিভিন্ন রাশির অন্তর্গত সদৃশপদগুলি ঠিক একই স্তম্ভে বসে; তারপর সর্ব্বনিম্ন রাশিটির নীচে একটি রেখা টানিয়া প্রত্যেকটি স্তম্ভের পদগুলির সমষ্টি ঐ রেখার নীচে লিখিতে হইবে। যোগফলের সাংখ্য-সহগগুলিকে পাটীগণিতীয় নিয়মানুসারে সরল করিয়া রাখিতে হইবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী পরিষ্কার করিয়া বুঝান হইতেছে :

উদা. 1. যোগ কর :

$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}-\frac{z}{7}$, $-\frac{9}{10}y+\frac{12}{7}z+\frac{7}{3}x+12a$ এবং $\frac{3}{7}z-\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}y-2b$.

প্রথম রাশি $= \frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y-\frac{1}{7}z$

দ্বিতীয় রাশি $= \frac{7}{3}x-\frac{9}{10}y+\frac{12}{7}z+12a$

তৃতীয় রাশি $= -\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}y+\frac{3}{7}z \qquad -2b$

$\therefore$ যোগফল $= 2x+\frac{1}{10}y+2z+12a-2b$

[যোগফলে x এর সহগ $=\frac{1}{3}+\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1+7-2}{3}=\frac{6}{3}=2$;

y এর সহগ $=\frac{1}{5}-\frac{9}{10}+\frac{4}{5}=\frac{2-9+8}{10}=\frac{10-9}{10}=\frac{1}{10}$;

z এর সহগ $=-\frac{1}{7}+\frac{12}{7}+\frac{3}{7}=\frac{-1+12+3}{7}=\frac{14}{7}=2$;

a এর সহগ $=0+12+0=12$;

b এর সহগ $=0+0-2=-2$.]

টীকা। লক্ষ্য করিবে যে, প্রথম ও তৃতীয় রাশিতে a-সংযুক্ত পদের স্থানদ্বয়কে শূন্য রাখা হইয়াছে। সুবিধার জন্য ঐ স্থান দুইটিকে $0.a$ দ্বারাও পূর্ণ করা যাইত। তদ্রূপ, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশিতে b-সংযুক্ত পদ দুইটির সহগদ্বয়কেও 0 বলিয়া ধরা যায়।

উদা. 2. $\frac{6x-2y}{6}+\frac{4y-3z}{12}+\frac{2z-4x}{8}$, $\frac{4x-3y}{12}+\frac{6y-4z}{8}+\frac{3z-6x}{6}$ এবং $\frac{2x-4y}{8}+\frac{3y-2z}{6}+\frac{4z-6x}{12}$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

পদ-সংযোগ প্রণালীমতে প্রত্যেকটি রাশিকে সরল করিয়া পূর্ব্বপ্রদর্শিত নিয়মানুসারে যোগফল নির্ণয় করিতে হইবে। যথা,

প্রথম রাশি $=(\frac{6}{6}-\frac{4}{8})\,x+(-\frac{2}{6}+\frac{4}{12})y+(-\frac{3}{12}+\frac{2}{8})z$

$=(1-\frac{1}{2})\,x+(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3})\,y+(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4})z= \frac{1}{2}x$

দ্বিতীয় রাশি $=(\frac{4}{12}-\frac{6}{6})\,x+(-\frac{3}{12}+\frac{6}{8})\,y+(-\frac{4}{8}+\frac{3}{6})z$

$=(\frac{1}{3}-1)\,x+(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4})\,y+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})z=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y$

এবং তৃতীয় রাশি $=(\frac{2}{8}-\frac{6}{12})x+(-\frac{4}{8}+\frac{3}{6})\,y+(-\frac{2}{6}+\frac{4}{12})z$

$=(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})\,x+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\,y+(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3})z=-\frac{1}{4}x$

$\therefore$ যোগফল $=-\frac{5}{12}x+\frac{1}{2}y$

[যোগফলে,

x এর সহগ $= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6-8-3}{12} = \frac{-5}{12}$,

y এর সহগ $= 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.]

উদা. 3. $x = 98$, $y = 79$, $a = 5$ এবং $b = 4$ হইলে,

$\frac{3}{7}x^3 + \frac{5}{11}y^5 - 20a^2 + \frac{49}{2}b^3$, $17a^2 - \frac{27}{2}b^3 - \frac{23}{7}x^3$, $-\frac{y^5}{11} + \frac{3}{2}b^3 - 3a^2$ এবং $-\frac{23}{2}b^3 - \frac{4}{11}y^5 + 7a^2 + \frac{20}{7}x^3$ এর সমষ্টির মান নির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে, রাশিগুলির যোগফল হইতেই নির্ণেয় মান অতি সহজে পাওয়া যায়।

$$\begin{array}{lrrrr}
\text{প্রথম রাশি} = & \frac{3}{7}x^3 & + \frac{5}{11}y^5 & - 20a^2 & + \frac{49}{2}b^3 \\
\text{দ্বিতীয় রাশি} = & -\frac{23}{7}x^3 & & + 17a^2 & - \frac{27}{2}b^3 \\
\text{তৃতীয় রাশি} = & & -\frac{1}{11}y^5 & - 3a^2 & + \frac{3}{2}b^3 \\
\text{চতুর্থ রাশি} = & \frac{20}{7}x^3 & - \frac{4}{11}y^5 & + 7a^2 & - \frac{23}{2}b^3 \\
\hline
\therefore \text{ যোগফল} = & & & a^2 & + b^3
\end{array}$$

$$= 5^2 + 4^3 = 5 \times 5 + 4 \times 4 \times 4 = 25 + 64 = 89.$$

[যোগফলে,

x^3 এর সহগ $= \frac{3}{7} - \frac{23}{7} + 0 + \frac{20}{7} = \frac{3-23+0+20}{7} = \frac{0}{7} = 0$,

y^5 এর সহগ $= \frac{5}{11} + 0 - \frac{1}{11} - \frac{4}{11} = \frac{5+0-1-4}{11} = \frac{0}{11} = 0$,

a^2 এর সহগ $= -20 + 17 - 3 + 7 = 24 - 23 = 1$,

b^3 এর সহগ $= \frac{49}{2} - \frac{27}{2} + \frac{3}{2} - \frac{23}{2} = \frac{49-27+3-23}{2} = \frac{52-50}{2} = \frac{2}{2} = 1$.]

71. আক্ষরিক সহগবিশিষ্ট মিশ্ররাশির যোগফল নির্ণয়: সহগগুলি কেবলমাত্র অঙ্ক না হইলে, উহাদিগকে আক্ষরিক সহগ (literal coefficient) বলা হয়। যথা, ax, $6bx$, $(c+d-e)x$,... প্রভৃতিতে x এর সহগ যথাক্রমে a, $6b$, $(c+d-e)$,... বলিয়া, উহাদের প্রত্যেককেই আক্ষরিক সহগ বলে।

x এর সম্পর্কে ধরিলে, ax, $6bx$, $(c+d-e)x$,... প্রভৃতি পদগুলি কেবলমাত্র উহাদের সহগতেই বিভিন্ন; এইরূপে ধরিয়া ax, $6bx$, $(c+d-e)x$,... পদগুলিকেও সদৃশপদ (like terms) বলা যায়।

ax এবং bx, x-সংযুক্ত দুইটি সদৃশপদ হইলে,

উহাদের যোগফল $= ax + bx = (a+b)x$, স্পষ্টতঃই উহা যোজ্যপদদ্বয়ের **সদৃশ**।

অতএব, **আক্ষরিক সহগবিশিষ্ট** দুইটি সদৃশপদের যোগফলও একটি সদৃশপদ, এবং যোগফলের আক্ষরিক সহগ, পদদ্বয়ের আক্ষরিক সহগ দুইটির সমষ্টির সমান। 52 নিয়মের 3 অনুসিদ্ধান্ত হইতে বুঝা যায় যে, যোগের উপরিউক্ত নিয়মটি দুইএর অধিক পদের বেলায়ও খাটিবে।

সুতরাং, সহগগুলি সাংখ্যই হউক বা আক্ষরিকই হউক, সদৃশপদসমূহের যোগের নিয়ম উভয় ক্ষেত্রেই এক।

ইহা হইতেই বুঝা যায় যে, মিশ্ররাশিসমূহের যোগের নিয়ম, উভয় প্রকার সহগের ক্ষেত্রেই, এক থাকিবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিদ্বারা যোগের উপরিউক্ত নিয়মটি উত্তমরূপে বুঝা যাইবে।

উদা. 1. যোগ কর :

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z,\ ax+by+cz \text{ এবং } x+y+z.$$

মিশ্ররাশি তিনটিকে একটির নীচে একটি করিয়া এরূপে সাজাও, যেন উহাদের অন্তর্গত সদৃশপদগুলি ঠিক একই স্তম্ভে বসে; সর্ব্বনিম্নটির নীচে একটি রেখা টানিয়া প্রত্যেক স্তম্ভের সমষ্টি ঐ রেখার নীচে লিখিলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যাইবে। যথা,

$$\begin{array}{ll} \text{প্রথম রাশি} = & (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \\ \text{দ্বিতীয় রাশি} = & \quad ax+\quad by+\quad cz \\ \text{তৃতীয় রাশি} = & \underline{\quad x+\quad y+\quad z} \end{array}$$

অতএব, যোগফল $=(a+b+c+1)x+(a+b+c+1)y+(a+b+c+1)z$

[যোগফলে,

x এর সহগ $=(b+c)+a+1=a+b+c+1,$

y এর সহগ $=(c+a)+b+1=a+b+c+1,$

z এর সহগ $=(a+b)+c+1=a+b+c+1.$]

উদা. 2. যোগ কর : $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z,\ (b-c)y+(a-b)x+(c-a)z$ এবং $(b-c)z+(c-a)x+(a-b)y.$

x, y ও z এর সম্পর্কে ধরিলে, রাশি তিনটি সদৃশপদবিশিষ্ট। কাজেই, পূর্ব্ববর্ত্তী উদাহরণে প্রদর্শিত নিয়মানুসারে যোগফল নির্ণয় করা যায়। যথা,

$$\begin{array}{ll} \text{প্রথম রাশি} = & (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z \\ \text{দ্বিতীয় রাশি} = & (a-b)x+(b-c)y+(c-a)z \\ \text{তৃতীয় রাশি} = & \underline{(c-a)x+(a-b)y+(b-c)z} \end{array}$$

অতএব, যোগফল $=0.$

[যোগফলে,

x এর সহগ $=(b-c)+(a-b)+(c-a)=b-c+a-b+c-a=0.$

তদ্রূপ, y এবং z এর সহগদ্বয়ও প্রত্যেকে 0.]

উদা. 3. $(ax-by)+(bx-cz)$, $(ay-bx)+(by-cz)$ এবং $(cz-ax)+(cz-by)$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

x, y এবং z এর সম্পর্কে ধরিলে, রাশি তিনটি সদৃশপদবিশিষ্ট। কাজেই, পূর্ব্ব-প্রদর্শিত নিয়মানুসারে যোগফল পাওয়া যাইবে। যথা,

$$\begin{aligned}
\text{প্রথম রাশি} &= ax+bx-by-cz = (a+b)x - by - cz\\
\text{দ্বিতীয় রাশি} &= -bx+ay+by-cz = -bx+(a+b)y - cz\\
\text{তৃতীয় রাশি} &= -ax-by+2cz = -ax - by + 2cz\\
\hline
\text{অতএব, যোগফল} &= (a-b)y
\end{aligned}$$

[যোগফলে,

x এর সহগ $=(a+b)-b-a=a+b-b-a=0$,

y এর সহগ $=-b+(a+b)-b=-b+a+b-b=a-b$,

z এর সহগ $=-c-c+2c=0.$]

টীকা 1. বন্ধনীসংযুক্ত একটি মিশ্ররাশিকে সদৃশ মিশ্ররাশির সহিত (with like compound expressions) যোগ করিতে হইলে, বন্ধনী অপসারণ না করিয়া যোগ করাই সুবিধাজনক (উদা. 2 দেখ)।

টীকা 2. আবশ্যক হইলে উদা. 3 এ প্রদর্শিত নিয়মানুযায়ী যোজ্যরাশিসমূহকে "পদ-সংযোগ প্রণালী (process of collecting terms)" মতে সরল করিয়া লওয়া উচিত।

উদা. 4. $(a^2+b^2)x+(b^2+c^2)y+(c^2+a^2)z$, $(b^2+c^2)m+(c^2+a^2)n$, $(c^2+a^2)p+(a^2+b^2)q$ এবং $(a^2+b^2)j+(b^2+c^2)k$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

উপরিউক্ত রাশিগুলি (a^2+b^2), (b^2+c^2) এবং (c^2+a^2) এর সম্পর্কে সদৃশপদ-বিশিষ্ট। কাজেই, পূর্ব্ববর্ত্তী নিয়মানুসারে যোগফল পাওয়া যায়।

$$\begin{aligned}
\text{প্রথম রাশি} &= x(a^2+b^2)+y(b^2+c^2)+z(c^2+a^2)\\
\text{দ্বিতীয় রাশি} &= m(b^2+c^2)+n(c^2+a^2)\\
\text{তৃতীয় রাশি} &= q(a^2+b^2) + p(c^2+a^2)\\
\text{চতুর্থ রাশি} &= j(a^2+b^2)+k(b^2+c^2)
\end{aligned}$$

অতএব, যোগফল

$$=(x+q+j)(a^2+b^2)+(y+m+k)(b^2+c^2)+(z+n+p)(c^2+a^2).$$

[যোগফলে,

$$(a^2+b^2) \text{ এর সহগ} = x+0+q+j = x+q+j,$$
$$(b^2+c^2) \text{ এর সহগ} = y+m+0+k = y+m+k,$$
এবং $$(c^2+a^2) \text{ এর সহগ} = z+n+p+0 = z+n+p.$$]

প্রশ্নমালা 27

যোগ কর (Add together) :

1. $2x^2-5xy+y^2$, $4y^2-7x^2-5x+2y$, $3xy-5+y-6y^2$ এবং $3-4y+3x$.

2. $abc+a^2b-b^2c^2$, $5a^2b-12b^2c^2-3abc$, $8b^2c^2-4a^2b+2abc$ এবং $2a^2b+5b^2c^2$.

3. $m^3n^2-3mnp+2m^2n^3+6m^2n^2$, $7mnp-10m^2n^2+5m^3n^2-m^2n^3$, $2m^2n^2-5mnp+3m^2n^3$ এবং $-7m^3n^2+m^2n^2-4m^2n^3$.

4. $12a^3b^2x-29b^3x^2a+37x^3a^2b+45a^2b^2x^2$, $25b^3x^2a-16a^2b^2x^2-18a^3b^2x-5x^3a^2b$, $32a^2b^2x^2-23x^3a^2b+20a^3b^2x-28b^3x^2a$ এবং $-9x^3a^2b-14a^3b^2x-60a^2b^2x^2+32b^3x^2a$.

5. $-15a^4b^4c^4+7c^4a^3b^5-24b^4c^3a^5+27a^4b^3c^5$, $19c^4a^3b^5-15a^4b^3c^5+23a^4b^4c^4-8b^4c^3a^5$, $29b^4c^3a^5+11a^4b^4c^4-9a^4b^3c^5-16c^4a^3b^5$ এবং $-3a^4b^3c^5-10c^4a^3b^5+3b^4c^3a^5-18a^4b^4c^4$.

6. $25a^3b^3-8b^3c^3-23c^3a^3+19a^2b^2c^2$, $16c^3a^3-14a^2b^2c^2-19a^3b^3-12b^3c^3$, $27a^2b^2c^2+13a^3b^3+17c^3a^3-20b^3c^3$, $29b^3c^3-6a^2b^2c^2-21a^3b^3-13c^3a^3$ এবং $10b^3c^3+3a^3b^3+4c^3a^3-27a^2b^2c^2$.

7. $5a^3-18b^3-53c^3-25abc$, $38c^3-37a^3-7abc+29b^3$, $26abc-17c^3+11b^3+43a^3$, $13b^3-18abc+4a^3+21c^3$ এবং $-14a^3+12c^3+21abc-34b^3$.

8. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}$, $\frac{3x}{4}+\frac{2y}{3}+\frac{3z}{5}$ এবং $\frac{3x}{4}+y+\frac{6z}{5}$.

9. $\frac{3x}{5}+\frac{4y}{7}+\frac{10z}{11}$, $\frac{2y}{7}+\frac{4z}{11}+\frac{x}{5}$ এবং $\frac{8z}{11}+\frac{6x}{5}+\frac{8y}{7}$.

10. $\frac{4x^2y}{15}+\frac{4y^2z}{13}+\frac{5z^2x}{17}$, $\frac{7y^2z}{13}+\frac{6z^2x}{17}+\frac{7x^2y}{15}$ এবং $\frac{6z^2x}{17}+\frac{4x^2y}{15}+\frac{2y^2z}{13}$.

11. $\frac{7a^2b}{19}+\frac{9b^2c}{17}+\frac{11ca^2}{21}+\frac{13ab^2}{35}$, $\frac{8b^2c}{17}+\frac{10c^2a}{21}+\frac{12a^2b}{19}+\frac{17bc^2}{35}$ এবং $\frac{22ab^2}{35}+\frac{18bc^2}{35}+\frac{10ca^2}{21}+\frac{11ac^2}{21}$.

12. $\frac{2}{3}abc^2+\frac{3}{4}bca^2+\frac{4}{7}b^2d$, $\frac{5}{9}cab^2+\frac{1}{3}abc^2+\frac{2}{11}a^2d$, $\frac{1}{4}bca^2+\frac{4}{13}c^2d+\frac{4}{9}cab^2$ এবং $\frac{9}{11}a^2d+\frac{3}{7}b^2d+\frac{9}{13}c^2d$.

13. $\frac{x-2y}{2}+\frac{2y-3z}{6}+\frac{3z-4x}{12}$, $\frac{2x-3y}{6}+\frac{3y-4z}{12}+\frac{z-2x}{2}$ এবং $\frac{3x-4y}{12}+\frac{y-2z}{2}+\frac{2z-3x}{6}$.

14. $\frac{2x-3y}{6}+\frac{3y-5z}{15}+\frac{5z-7x}{35}$, $\frac{3x-5y}{15}+\frac{5y-7z}{35}+\frac{2z-3x}{6}$ এবং $\frac{5x-7y}{35}+\frac{2y-3z}{6}+\frac{3z-5x}{15}$.

15. $\frac{2b-3c}{bc}+\frac{3c-4a}{ca}+\frac{4a-2b}{ab}$, $\frac{2c-3a}{ca}+\frac{3a-4b}{ab}+\frac{4b-2c}{bc}$ এবং $\frac{2a-3b}{ab}+\frac{3b-4c}{bc}+\frac{4c-2a}{ca}$.

16. $\frac{bx-3ay}{ab}+\frac{2by-4az}{ab}+\frac{3bz-ax}{ab}$, $\frac{cx-4by}{bc}+\frac{3cy-5bz}{bc}+\frac{4cz-bx}{bc}$ এবং $\frac{ax-2cy}{ca}+\frac{4ay-3cz}{ca}+\frac{5az-cx}{ca}$.

17. $\frac{cy-ax}{caxy}+\frac{az-by}{abyz}+\frac{bx-cz}{bczx}$, $\frac{ay-bx}{abxy}+\frac{bz-cy}{bcyz}+\frac{cx-az}{cazx}$ এবং $\frac{by-cx}{bcxy}+\frac{cz-ay}{cayz}+\frac{ax-bz}{abzx}$.

$a=5$, $b=4$, $x=8$, $y=7$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

18. $(46a^4+38b^4-87abx^2-105y^4)+(47abx^2+85y^4-56a^4-58b^4)+(57y^4+75b^4+23a^4+63abx^2)+(-33b^4+8y^4-27abx^2-39a^4)+(26a^4-45y^4-22b^4+5abx^2)$.

19. $(35xy^4+207ab^4-98bx^4-62ya^4-83abx^2y)+(68bx^4+102ya^4-65xy^4-87ab^4+53abx^2y)+(26abx^2y-75ab^4-25ya^4+43bx^4+53xy^4)+(28ya^4-29xy^4-65abx^2y+45ab^4+26bx^4)+(-89ab^4-43ya^4+69abx^2y+6xy^4-39bx^4)$.

20. $(57a^4bx+25b^4xy-143x^4ya+37y^4ab-253a^2b^2x^2)+(63x^4ya-92y^4ab-63a^4bx+73a^2b^2x^2-85b^4xy)+(35y^4ab+132b^4xy+82a^2b^2x^2+36x^4ya+96a^4bx)+(-50a^2b^2x^2-78a^4bx+27y^4ab-17x^4ya-52b^4xy)+(61x^4ya-20b^4xy+148a^2b^2x^2-7y^4ab-12a^4bx)$.

যোগ কর (Add together) :

21. $(a^2+b^2)(m+n)+(a^2-b^2)(p+q)+c^2l$, $(a^2-b^2)(m+n)+(a^2+b^2)(p+q)+c^2m$ এবং $nc^2+l(a^2+b^2)+k(a^2-b^2)$.

22. $(x+y)^2a+(y+z)^2b+(z+x)^2c$, $(x-y)^2a+(y-z)^2b+(z-x)^2c$ এবং $2(x^2-y^2)a+2(y^2-z^2)b+2(z^2-x^2)c$.

23. $ab(a-b)$, $bc(b-c)$, $ca(c-a)$ এবং $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$.

উহ্য অংশ নির্ণয় কর (Supply the omission) :

24. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\{\quad\}-\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$.

25. $(b+c)x^2+(c+a)y^2+(a+b)z^2=\{\quad\}-(ax^2+by^2+cz^2)$.

2. বিয়োগ

72. পূর্ব্বে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে যে, 'কোন একটি সরলরাশি a কে বিয়োগ করা' অথবা '$-a$ সরলরাশিটিকে যোগ করা', উভয়ই এক। যথা, $x-a=x+(-a)$. তদ্রূপ, 'কোন একটি মিশ্ররাশিকে বিয়োগ করা' অথবা 'ঐ রাশির অন্তর্গত পদসমূহের চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিয়া যোগ করা' উভয়ই এক। একটি মিশ্ররাশিকে অপর একটি মিশ্ররাশি হইতে বিয়োগ করার প্রণালী 43 নিয়মে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে। এ পর্যান্ত উক্ত নিয়ম সহজ সহজ ক্ষেত্রেই প্রয়োগ করা হইয়াছে। বর্ত্তমানে উহা জটিলতর ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা হইবে।

উদা. 1. $(b+c)y+(c+a)z+(a+b)x$ হইতে $ax+by+cz$ বিয়োগ কর।

x, y ও z এর সম্পর্কে সদৃশপদগুলি সাজাইয়া 43 নিয়মে বর্ণিত প্রণালী অনুসারে বিয়োগফল নির্ণয় করা হইবে।

$$\begin{aligned} \text{বিয়োজন} &= (a+b)x + (b+c)y + (c+a)z \\ \text{বিয়োজ্য} &= \quad ax + \quad by + \quad cz \\ \therefore\ \text{বিয়োগফল} &= \quad bx + \quad cy + \quad az \end{aligned}$$

[বিয়োগফলে,

x এর সহগ $= a+b-a = b$. তদ্রূপ, y ও z এর সহগদ্বয় যথাক্রমে c ও a.]

উদা. 2. $(b+c)^2yz + (c+a)^2zx + (a+b)^2xy$ হইতে $(b-c)^2yz + (c-a)^2zx + (a-b)^2xy$ বিয়োগ কর।

$$\begin{aligned} \text{বিয়োজন} &= (b+c)^2yz + (c+a)^2zx + (a+b)^2xy \\ \text{বিয়োজ্য} &= (b-c)^2yz + (c-a)^2zx + (a-b)^2xy \\ \therefore\ \text{বিয়োগফল} &= \quad 4bcyz + \quad 4cazx + \quad 4abxy \end{aligned}$$

[বিয়োগফলে,

yz এর সহগ $= (b+c)^2 - (b-c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$
$= b^2 + 2bc + c^2 - b^2 + 2bc - c^2 = 4bc.$

তদ্রূপ, zx এবং xy এর সহগদ্বয় যথাক্রমে $4ca$ এবং $4ab$.]

উদা. 3. নিম্নলিখিত সমতাটির শূন্যস্থান পূরণ কর :

$$(2a+3b)x + (3b+4c)y + (4c+2a)z = (a+b)x + (b+c)y + (c+a)z + \{\quad\}.$$

স্পষ্টতঃই, $(2a+3b)x + (3b+4c)y + (4c+2a)z$ হইতে $(a+b)x + (b+c)y + (c+a)z$ বিয়োগ করিলে উহ্য রাশিটি পাওয়া যাইবে। প্রথম ও দ্বিতীয় উদাহরণে প্রদর্শিত নিয়মানুসারে বিয়োগ করিয়া বিয়োগফল $(a+2b)x + (2b+3c)y + (3c+a)z$ পাওয়া যাইবে।

উদা. 4. $3\frac{3}{4}ax + 2\frac{4}{9}by + 6\frac{83}{90}z$ হইতে $2\cdot5ax - 3\cdot\dot{7}by - 8\cdot3\dot{2}z$ বিয়োগ কর।

$$\begin{aligned} \text{বিয়োজন} &= 3\tfrac{3}{4}ax + 2\tfrac{4}{9}by + 6\tfrac{83}{90}z \\ \text{বিয়োজ্য} &= 2\cdot5ax - 3\cdot\dot{7}by - 8\cdot3\dot{2}z \\ \therefore\ \text{বিয়োগফল} &= \tfrac{5}{4}ax + \tfrac{56}{9}by + \tfrac{686}{45}z \end{aligned}$$

[বিয়োগফলে,

ax এর সহগ $= 3\frac{3}{4} - 2\cdot5 = \frac{15}{4} - \frac{5}{2} = \frac{15-10}{4} = \frac{5}{4}$,

by এর সহগ $= 2\frac{4}{9} - (-3\cdot\dot{7}) = 2\frac{4}{9} + 3\cdot\dot{7} = \frac{22}{9} + \frac{34}{9} = \frac{56}{9}$,

এবং z এর সহগ $= 6\frac{83}{90} - (-8\cdot3\dot{2}) = 6\frac{83}{90} + 8\cdot3\dot{2} = \frac{623}{90} + \frac{749}{90}$
$= \frac{623+749}{90} = \frac{1372}{90} = \frac{686}{45}$.]

টীকা। যোগের মত বিয়োগেও ভগ্নাংশ-সহগগুলিকে পাটীগণিতীয় নিয়মানুসারে সরল করিতে হইবে।

[বন্ধনীসংযুক্ত মিশ্ররাশিসমূহের বিয়োগফল নির্ণয়কালে বন্ধনী অপসারণ না করাই অনেকস্থলে সুবিধাজনক (•1-3 উদাহরণ তিনটি দেখ)।]

প্রশ্নমালা 28

বিয়োগ কর (Subtract) :

1. $3x^5-5x^4y+2x^3y^2-7x^2y^3+6y^4$ হইতে $-7x^5+6x^4y-8x^3y^2-13x^2y^3+9y^4$.

2. $5m^3nx-17n^3xm+26x^3mn-13m^2n^2x-19n^2x^2m$ হইতে $3m^3nx-10n^3xm+14x^3mn-20m^2n^2x-27n^2x^2m$.

3. $48x^6-31x^5y-7x^4y^2-39x^3y^3-41x^2y^4+65xy^5-53y^6$ হইতে $37x^6-28x^5y+43x^4y^2-54x^3y^3-67x^2y^4+84xy^5-93y^6$.

4. $3ax^4-5a^2x^3+6yzbc^2-7y^2zbc+8yz^2bc$ হইতে $-2yzbc^2+4yz^2bc-2ax^4-9y^2zbc+3a^2x^3$.

5. $25-16x^3y^5z-17xy^3z^5+21x^3z^5y-6x^2y^2z^2+8xyz^4$ হইতে $19x^3z^5y-15x^3y^5z+27+11xyz^4-12x^2y^2z^2-19xy^3z^5$.

6. $29x^4y^3z^2-37x^3y^4z^2+54x^2y^3z^4-45x^3y^2z^4-67x^4y^2z^3+89x^2y^4z^3$ হইতে $43x^3y^4z^2-23x^3y^2z^4+25x^4y^3z^2-66x^2y^4z^3+26x^2y^3z^4+35x^4y^2z^3$.

7. $41x^3y^4z^5-87x^3y^5z^4-28x^4y^5z^3+63x^4y^3z^5-55x^5y^3z^4+37x^5y^4z^3$ হইতে $-29x^4y^3z^5+75x^5y^4z^3+13x^3y^5z^4+53x^3y^4z^5-94x^5y^3z^4-86x^4y^5z^3$.

8. $3x^2-5xy+6y^2+7yz$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $-x^2-y^2-yz$ হইবে ?

9. $-5x^3+13x^2y^2-a^2bx+5bxy^2+7xyab$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $x^3+x^2y^2+a^2bx-2bxy^2-2xyab$ হইবে ?

10. $5x^4-6x^3y+7x^2y^2-8xy^3-19y^4$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $3x^4+5x^2y^2-12y^4$ হইবে ?

11. $-5x^5-3x^4y+6x^3y^2+17x^2y^3+13xy^4-21y^5$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $-7x^5-4x^3y^2+13x^2y^3+29y^5$ হইবে ?

12. $2a^2+5ab-6b^2$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল a^2+2b^2 হইবে ?

13. $5x^2-6xy+4y^2-8x-10y+15$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $x^2+2xy+3y^2+4x+5y+6$ হইবে ?

14. $3a^3-4a^2b+5ab^2-8b^3$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $a^3-2ab^2+7b^3$ হইবে ?

15. $-8x^3y+4x^2y^2-11xy^3+12x^2-13y+27$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $4x^3y-3x^2y^2-11xy^3+20x^2-30y+56$ হইবে ?

16. কোন্ রাশিমালা হইতে $3a^2-7ab-8bc+9b^2$ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $2a^2+3ab+3bc+2b^2$ হইবে ?

17. কোন্ রাশিমালা হইতে $-3x^3+5y^2-7xy+8x-9$ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $x^3-8y^2+2xy-11x+7$ হইবে ?

18. কোন্ রাশিমালা হইতে $-7a^3-8b^2c-13ac^2+3b^3$ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $4a^3-3b^2c+7ac^2-8b^3$ হইবে ?

19. কোন্ রাশিমালা হইতে $21x^3-37xy^2+42y^3-18x^2+19xy-39$ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $-25x^3+15xy^2-87y^3+7x^2-43xy+24$ হইবে ?

বিয়োগ কর (Subtract) :

20. $\frac{13}{24}x+\frac{213}{168}y+\frac{201}{19}z$ হইতে $\frac{1}{12}x+\frac{97}{83}y+\frac{107}{57}z$.

21. $-\frac{1}{20}ax+\frac{3}{7}y+\cdot\dot{8}mz$ হইতে $-\cdot35ax+\frac{13}{56}y+\cdot1\dot{7}mz$.

22. $32\cdot39c^2by+2\cdot37a^2cx-62\cdot73c^3z$ হইতে

$$1\cdot17a^2cx+2\cdot31c^2by-63\cdot18c^3z.$$

23. $3\cdot3lx+\frac{35}{44}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{4}}y-\frac{3}{7}nz-\frac{8}{29}b^{\frac{3}{5}}c^{\frac{5}{12}}z-2\cdot5my-\frac{65}{88}a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}x$ হইতে

$$\frac{32}{19}a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}x+\frac{25}{22}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{4}}y+\frac{21}{29}b^{\frac{3}{5}}c^{\frac{5}{12}}z+2\cdot3lx+3\cdot5my+\frac{32}{7}nz.$$

24. নিম্নলিখিত সমতাগুলির উহ্য অংশ নির্ণয় কর (Supply the omission in the following) :

(i) $3\cdot2x+5\cdot3y+5\cdot4z-(\qquad\qquad)=2x+3y+6z$;

(ii) $17x+23y+\frac{121}{21}z=52x-1\cdot7y+\frac{40}{7}z-(\qquad\qquad)$;

(iii) $1\cdot\dot{2}a+15\cdot52l^2+16m^2+14p$

$$=(\qquad\qquad)-(2\cdot\dot{2}a+3\cdot52l^2+4m^2+16p).$$

বিয়োগ কর (Subtract) :

25. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$ হইতে

$$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b).$$

26. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ হইতে
$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$$

27. $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ হইতে
$$(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2.$$

28. $(1+a)^2x+(1+b)^2y+(1+c)^2z$ হইতে
$$(1+a+a^2)x+(1+b+b^2)y+(1+c+c^2)z.$$

29. এক ব্যক্তি এক বৎসরে মাসিক $(ax+by+cz)$-সংখ্যক টাকা উপার্জ্জন করিয়া, সেই বৎসরেই $(10ax+13cz)$-সংখ্যক টাকা খরচ করিলেন। বৎসরের শেষে তাঁহার হাতে কত টাকা থাকিবে ?

[A man earned $(ax+by+cz)$ rupees per month for a year and spent $(10ax+13cz)$ rupees during the same year. How many rupees will he be left with at the end of the year ?]

30. $(50x+71y+18z)$-সংখ্যক ভেড়া হইতে $(13x+12y)$-সংখ্যক এবং $(15y+8z)$-সংখ্যক ভেড়া বিক্রীত হইল এবং $(3z+23x)$-সংখ্যক ভেড়া মরিয়া গেল। কতগুলি ভেড়া অবশিষ্ট রহিল ?

[If out of $(50x+71y+18z)$ sheep, $(13x+12y)$ and $(15y+8z)$ be sold and $(3z+23x)$ die, find the number of sheep left.]

[অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্য]

অষ্টম অধ্যায়

পূর্ব্ব পাঠের পুনরালোচনা

(Revision of previous work)

বিবিধ প্রশ্নমালা I

1. (i) সময়ের 'একক' অর্দ্ধঘণ্টা ধরিলে, (ii) সময়ের 'একক' দশঘণ্টা ধরিলে, 5 ঘণ্টা সময়ের সাংখ্যমান কত ?

2. কোন্ সংখ্যা বুঝায় ?

(i) যদি x কে y দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলের সহিত p যোগ করা হয়।

(ii) যদি x ও p এর যোগফলকে y দ্বারা ভাগ করা হয়।

3. 'সহগ' (coefficient) এর সংজ্ঞা লিখ। সাংখ্য এবং আক্ষরিক 'সহগ'এর প্রভেদ দেখাও।

4. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :—

(i) x মণ 10 সেরে কত সের ?

(ii) p গজ q ফুট r ইঞ্চিতে কত ইঞ্চি ?

5. একটি ঘড়ি প্রতি ঘণ্টায় x সেকেণ্ড করিয়া দ্রুত (fast) চলিলে, y ঘণ্টায় উহা কত মিনিট অগ্রগামী হইবে ?

6. $\sqrt{ab}$ এবং $\sqrt{a}b$ এর পার্থক্য কি ?

$a=9, b=4$ হইলে, $\sqrt{ab}-\sqrt{a}b$ এর মান নির্ণয় কর।

7. যদি কোন স্থানের উত্তরে অর্দ্ধ মাইল দূরত্ব 40 দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তাহা হইলে ঐ স্থানের দক্ষিণে 11 গজ দূরত্ব কত দ্বারা প্রকাশ করিবে ?

8. একটি ঋণরাশিকে একটি ধনরাশির সহিত যোগ করিলে যোগফল কি হয়, তাহা লিখ। ইহা হইতে প্রমাণ কর যে, $+(-b)=-b$.

9. 'বিয়োগ'এর সংজ্ঞা লিখ। ইহা হইতে প্রমাণ কর যে,

$4-6=-2$, এবং $5-(-3)=8$.

10. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলিকে উহাদের মানের অধঃক্রমানুসারে (in descending order) লিখ : 2, 5, −3, 7, −8, −1, 9, −4, −12.

II

1. কোন নির্ব্বাচনে (election এ) একজন প্রার্থী m-সংখ্যক ভোট পাইয়া জিতিল; তাহার প্রতিদ্বন্দ্বী n-সংখ্যক ভোট পাইয়া পরাজিত হইল। সর্ব্বসমেত কতজন লোক ভোট দিয়াছিল? কত ভোটে প্রথম প্রার্থী জিতিল?

[In a certain election, a candidate won by securing m-votes and his rival was defeated after securing n-votes. How many votes were altogether cast and by how many votes the first candidate won?]

2. একখানি এরোপ্লেন 7 ঘণ্টায় p মাইল গেলে, x মিনিটে উহা কত পরিমাণ পথ পরিভ্রমণ করিবে?

3. $a=4$, $b=5$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:

(i) $ab-a\times b$; (ii) $45-ab$; (iii) $74-7a$; (iv) $85-8b$.

4. a^n দ্বারা কি বুঝায়? a^n এবং n^a এর মধ্যে প্রভেদ কি?

$a=7$, $b=5$ হইলে, $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ এর মান কত?

5. 'a' এর সহিত নিম্নলিখিত রাশিগুলির সম্বন্ধ কি?

$\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[8]{a}$ এবং $\sqrt[n]{a}$.

$a=8$, $b=7$, $c=6$, $d=5$ এবং $e=1$ হইলে,

$\sqrt{a^2-3d}\times\sqrt[3]{b^3-c^3-2e}$ এর মান কত?

6. একটি ধনরাশি বা ঋণরাশির পরমমানের অর্থ কি? একটি উদাহরণদ্বারা ইহা বুঝাইয়া দাও।

7. যোগ কর: $3x^2y$, $-8x^2y$, $-19x^2y$ এবং $17x^2y$;

$x=4$ এবং $y=5$ হইলে, উক্ত যোগফলের সাংখ্যমান কত?

8. $16x^4$, $-8xy^3$, $24x^2y^2$, y^4 এবং $-32x^3y$ এর যোগফল লিখ; $x=4$, $y=5$ হইলে, উক্ত যোগফলের সাংখ্যমান কত?

9. $17b-12c-19a$ হইতে $4a-13b-25c$ বিয়োগ কর।

10. সরল কর: $3x-[4y+\{2z-(x-5y+3z)\}]-(3x-7y)$.

III

1. নিম্নলিখিত বর্ণনাগুলি বীজগণিতীয় প্রতীক সাহায্যে প্রকাশ কর:

(1) a ও b এর সমষ্টিকে c দ্বারা গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায় তাহা, x কে y ও z এর গুণফল দ্বারা ভাগ করিয়া যে ভাগফল পাওয়া যায় তাহার সমান।

(2) x ও y এর সমষ্টির বর্গ x ও y এর বর্গদ্বয় এবং x ও y এর গুণফলের দ্বিগুণ,—এতদুভয়ের সমষ্টির সমান।

(3) m হইতে n এর বিয়োগফলের ঘনমূলকে m ও n এর গুণফলের ঘন দ্বারা ভাগ করা হইলে, ঐ ভাগফল x ও y এর বর্গমূলদ্বয়ের সমষ্টি হইতে ন্যূন।

(4) b অপেক্ষা a বড় হইলে, b এর তিনগুণ অপেক্ষা a এর তিনগুণ বড় হইবে।

2. A, B, C, D, E, F, G বিন্দুগুলি একটি সরলরেখার উপর এরূপভাবে অবস্থিত যে, AB, BC, CD, DE, EF, FG দূরত্বগুলি যথাক্রমে 3, 4, 6, 8, 5 এবং 7 ইঞ্চি। DC কে 3 দ্বারা সূচিত করিলে, DB, DE, DF, DA এবং DG এর প্রত্যেকে কত দ্বারা সূচিত হইবে?

3. এক ঋণরাশিকে অন্য এক ঋণরাশির সহিত যোগ করিলে, যোগফল কি হইবে বল। $a=6$ এবং $b=4$ হইলে, $-a^3, -3a^2b, -3ab^2, -b^3$ এর সমষ্টির মান নির্ণয় কর।

4. কতকগুলি নির্দ্দিষ্ট অঙ্ক লইয়া দেখাও যে, উহাদের যোগফল অঙ্কগুলির ক্রম-পরিবর্ত্তনের উপর নির্ভর করে না (অর্থাৎ, ক্রমপরিবর্ত্তন দ্বারা যোগফলের কোন পরিবর্ত্তন হয় না)।

5. $a=16, b=10, c=5, d=1$ হইলে, $(a-b)(5\sqrt{a-b})+\sqrt{(a-b)(c+d)}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $a=\frac{1}{2}, b=\frac{2}{3}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^5+b^5}{a+b}=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4.$$

7. যোগ কর: $3a^2+4bc-x^2+10,\quad 2x^2-5a^2-15+6bc$ এবং $21-9bc-4a^2-10x^2$.

8. সরল কর: $a-[5b-\{a-(3e-3b)+2e-(a-2b-e)\}]$.

9. একখানি ঘরের মেঝে x ফুট লম্বা এবং উহার প্রস্থ, দৈর্ঘ্য হইতে 4 ফুট কম। মেঝেটির পরিসীমা (perimeter) কত? উহার ক্ষেত্রফল (বা কালি) কত?

[The length of the floor of a certain room is x ft. and its breadth is less by 4 ft. than the length. What is the perimeter of the floor and what is its area?]

10. আয়তক্ষেত্রের আকারের একখানি জমির দৈর্ঘ্য m গজ এবং উহার প্রস্থ দৈর্ঘ্য হইতে n ফুট কম। 720 বর্গফুটে এক কাঠা হইলে, ঐ জমির পরিমাণ কত কাঠা?

[The length of a rectangular plot of land is m yds. and its breadth is less by n ft. than the length. Find the area of the land in cottahs, when one cottah measures 720 sq. ft.]

IV

1. $a=9$ হইলে,

(1) $\sqrt{49}-\sqrt{4}a$ এবং (2) $\sqrt{49}-\sqrt{4a}$ এর মান নির্ণয় কর।

2. কতকগুলি নির্দ্দিষ্ট অঙ্ক লইয়া দেখাও যে, রাশিসমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদিগকে বিভিন্ন বিভাগে (group এ) ভাগ করিয়া নির্ণেয় যোগফল ঐ বিভাগগুলির সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।

3. $a=2$, $b=3$ এবং $c=4$ হইলে,

$\dfrac{a-b+c}{a+b-c}+\dfrac{b-c+a}{b+c-a}+\dfrac{c-a+b}{c+a-b}$ এর মান নির্ণয় কর।

4. 'বীজগণিতীয় রাশিমালা'র সংজ্ঞা লিখ। সরল রাশি ও মিশ্র রাশির মধ্যে পার্থক্য কি?

$42abx^2$ একটি মিশ্র, না সরল রাশি? উদাহরণসহ বিভিন্নরূপ মিশ্র রাশিমালার নাম বল।

5. $x=2$, $y=3$, $a=6$, $b=5$ হইলে,

$\sqrt[3]{b(x+y)^2}+\sqrt[3]{(x+a)(b-2x)}+\sqrt[3]{x(b-y)^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. কিয়ৎপরিমাণ অর্থ A, B ও C এর ভিতর এরূপভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে, B, A অপেক্ষা p পাউণ্ড বেশী এবং C, B অপেক্ষা q পাউণ্ড বেশী পাইল; A x পাউণ্ড পাইয়া থাকিলে, সম্পূর্ণ অর্থের পরিমাণ নির্ণয় কর।

[A certain sum is divided between A, B and C; B receives p pounds more than A, and C receives q pounds more than B; if A receives x pounds, find an expression for the whole sum divided.]

7. কোন প্রাথমিক স্কুলে, p-সংখ্যক বালিকা এবং উহার পাঁচগুণ বালক একত্রে পড়ে। স্কুলের ছাত্র-ছাত্রীসংখ্যা কত? ঐ স্কুল হইতে q-সংখ্যক ছাত্র অন্যত্র চলিয়া গেলে কতসংখ্যক ছাত্র-ছাত্রী রহিল?

[In a primary school the number of girls is p and that of boys is 5 times that of girls. Find out the number of boys and girls when q-boys left the school.]

8. যোগ কর :

$a^2-3ab-\frac{14}{21}b^2$, $2b^2-\frac{2}{3}b^3+c^2$, $ab-\frac{1}{3}b^2+b^3$ এবং $2ab-\frac{1}{3}b^3$.

9. $3x^2-5xy+6y^2+7yz$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $-x^2-y^2-yz$ হইবে?

10. সরল কর :

$\{2x^2-(y^2-xy)\}-\{y^2-(4x^2-y^2)\}+\{2y^2-(3xy-x^2)\}$.

V

1. a এর পাঁচগুণের সহিত 7 যোগ করিয়া যোগফলকে y দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল হইতে 9 বিয়োগ করিলে কত অবশিষ্ট থাকিবে ?

[7 is added to 5 times a and the sum is divided by y. What is the remainder if 9 is subtracted from the quotient ?]

2. গুণফলের 'মাত্রা' এবং 'মান' কাহাকে বলে ? 'সমমাত্র রাশিমালা' কাহাকে বলে ? একটি ষষ্ঠমানবিশিষ্ট ও একটি সপ্তমমানবিশিষ্ট ত্রিপদ (trinomial) সমমাত্র রাশিমালা লিখ।

3. $a\times b-c\div d\times e+f\div gh$ এর মান নির্ণয় করিতে হইলে, কিরূপে আরম্ভ করিতে হয় ?

4. উৎপাদকের (factor এর) সংজ্ঞা লিখ। $2ab(a+b)$ এর সরল উৎপাদকগুলি কি কি ?

5. $a=4$ এবং $x=2$ হইলে,

$$\frac{2ax^2}{(a-x)^2}-\frac{6\sqrt[3]{ax}}{a^3\sqrt{2a+4x}}-\frac{29x^2}{64a}$$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $x=5$ হইলে, $(x^3-7x^2+6x+5)+(-3x+2x^3+4+5x^2)+(-11-4x^3+2x-7x^2)+(9x^2+2+5x^3-4x)$ এর মান নির্ণয় কর।

7. প্রমাণ কর যে, $a-(b-c)=a-b+c$. a, b অপেক্ষা বড় এবং b, c অপেক্ষা বড় হইলে, এবং প্রত্যেকে ধনরাশি হইলে, উপরিউক্ত সূত্র কিরূপে সাধারণভাবে প্রমাণ করা যায় ?

8. সরল কর : $2x-[(3x-9y)-\{(2x-3y)-(x+5y)\}]$.

9. কখন একটি সংখ্যাকে আর একটি সংখ্যাদ্বারা গুণ করা হইল, বলা হয় ? সংজ্ঞানুসারে, -8 ও -4 এর গুণফল নির্ণয় কর।

10. কোন সংখ্যার পাঁচগুণের সহিত 3 যোগ করিলে, সংখ্যাটির চারগুণের সহিত 19 যোগ করিয়া যাহা হয়, তাহার সমান। সংখ্যাটি কত ?

[If 3 is added to 5 times a number, the sum is equal to four times the number increased by 19. Find the number.]

VI

1. সংখ্যার 'শক্তি' ও উহার 'সূচক'এর সংজ্ঞা লিখ ; এবং একটি দৃষ্টান্ত দ্বারা উহাদিগকে বুঝাইয়া দাও।

2. $a=16, b=10, x=5, y=1$ হইলে,
$(a-y)\sqrt{24bx+x^2}+\sqrt{(a-x)(b+y)}$ এর মান নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে,
$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc),$$
(1) যখন $a=3, b=4, c=5$;
(2) যখন $a=\frac{3}{2}, b=\frac{5}{2}, c=\frac{7}{2}$.

4. যে নিয়মের সাহায্যে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়, সেই নিয়মটি লিখ : $a-b+c-d+e-f=(a+c+e)+(-b-d-f)$.

5. $40-(-15)=55$, এইটিকে দৃষ্টান্ত দ্বারা প্রতিপন্ন কর।

6. $x=17, y=16, z=15$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের সমষ্টির মান নির্ণয় কর : $7x^3-25\sqrt{yz}+z^4$, $19\sqrt{yz}-3z^4-12x^3$ এবং $2z^4+5x^3+7\sqrt{yz}$.

7. নিম্নলিখিত রাশিটিতে উল্লিখিত প্রক্রিয়াগুলি বর্ণনা কর :
$$5a-[4b-\{3c-(2d-7e)\}].$$

8. $a=4, b=3, c=2, d=1$ হইলে,
$[(a^3+b^3+c^3+d^3)\{a+b-(c-a)\}+a^2b+c^2d]\times\{a^2-(b^2+c^2)+d^2\}$ এর মান নির্ণয় কর।

9. একখানি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য x ফুট এবং প্রস্থ 7 ফুট ; এবং উহার সংলগ্ন বারান্দার প্রস্থ ঘরের প্রস্থ হইতে 4 ফুট কম। ঐ মেঝে ও বারান্দা ঢাকিতে এক ফুট বহরের (চওড়ার) 23 গজ 1 ফুট লম্বা কার্পেট লাগিল। মেঝের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[The length and breadth of the floor of a room is x ft. and 7 ft. respectively and the breadth of the attached verandah is 4 ft. less than that of the floor. Find the length of the floor, if 23 yds. 1 ft. of carpet of width 1 ft. is required to cover the floor and the verandah.]

10. মনে কর, তুমি মার্চ্চ মাসের প্রথম সপ্তাহে নিম্নলিখিত সময় শয্যা ত্যাগ কর :—

বার	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র	শনি	রবি
সময়	6টা	6টা 15 মি.	6টা	5টা 50 মি.	6টা 5 মি.	6টা.	6টা 20 মি.

তোমার শয্যা-ত্যাগের সময়ের একটি অর্গল-লেখ প্রস্তুত কর।

VII

1. একখানা রেলগাড়ীর ইঞ্জিনের ওজন x টন; উহাতে কামরা প্রতি y টন ওজনের z খানা কামরা থাকিলে এবং উহাতে p টন ওজনের মাল বোঝাই করিলে, উক্ত বোঝাই রেলগাড়ীখানির মোট ওজন কত?

[Find the total weight of a goods-train consisting of z-wagons, each weighing y-tons, when goods of p-tons weight are loaded, the engine weighing x-tons.]

2. নিম্নলিখিত রাশি দুইটির মধ্যে পার্থক্য নির্দ্দেশ কর :

(1) $a+bc$ এবং $a+b\times c$; (2) a^4 এবং $4a$; (3) $3\sqrt{a}$ এবং $\sqrt[3]{a}$;

(4) $\sqrt{a+b}$ এবং $\sqrt{a}+b$; (5) $\sqrt{ab}$ এবং $\sqrt{a}b$.

3. $a=1, b=2, c=3, d=0$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(1) $\dfrac{a^2b+b^2c+c^2d+d^2a}{(a+b)(c+d)-\{(a-d)+(c-b)\}}$;

(2) $\sqrt[3]{b-a^3}+\sqrt[3]{4(c-a)}-\sqrt[4]{3(8a+5b+3c-2d)}$.

4. দেখাও যে, $(a+b+c)^3+a^3+b^3+c^3$, $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+6abc$ এবং $2a^3+3b^2(a+c)+2b^3+3c^2(a+b)+2c^3+3a^2(b+c)+6abc$ পরস্পর সমান, (i) যখন $a=2, b=3, c=4$; (ii) যখন $a=7, b=4, c=1$.

5. সরল কর :

(1) $1-[1-\{1-(1-\overline{1+x})\}]$;

(2) $3a-(b-2c)-\{a+c-(3a-b-2c)\}-(2a-3b+4c)$.

6. নিম্নলিখিত বর্ণনাগুলি বীজগণিতীয় প্রতীক সাহায্যে প্রকাশ কর :

(1) দুইটি সংখ্যার সমষ্টি ও উহাদের অন্তরের গুণফল, সংখ্যা দুইটির বর্গদ্বয়ের অন্তরফলের সমান।

(2) দুইটি সংখ্যার সমষ্টির বর্গ, সংখ্যা দুইটির বর্গদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা উহাদের গুণফলের দ্বিগুণ পরিমিত বড়।

7. $a=39, b=52$ হইলে, $17a-5b-[7a-3b-\{4(a-b)-(2a+3b)\}]$ এর মান নির্ণয় কর।

8. যদি $V=5a+4b-6c$, $X=-3a-9b+7c$, $Y=20a+7b-5c$ এবং $Z=13a-5b+9c$ হয়, তাহা হইলে

$V-(X+Y)+Z$ এর মান কত? [মাদ্রাজ প্রবেশিকা, 1883.]

9. $a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{5}d$, $-\frac{1}{2}c+\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b+d$, $\frac{1}{4}d-\frac{1}{5}b+c-a$, $\frac{1}{6}a-\frac{3}{8}d+b-\frac{5}{8}c$ এবং $8a-6b+3c-4d$ এর সমষ্টি হইতে $\frac{13}{2}a-\frac{151}{30}b+\frac{9}{4}c-\frac{13}{4}d$ বিয়োগ কর।

10. কোন আয়তের প্রস্থ b ইঞ্চি এবং দৈর্ঘ্য, প্রস্থ হইতে 7 ইঞ্চি বড়। উহার পরিসীমা 5 ফুট 10 ইঞ্চি হইলে, আয়তটির প্রস্থ কত ?

[The length of a rectangle exceeds its breadth, b inches, by 7 inches ; if its perimeter be 5 ft. 10 in., find its breadth.]

VIII

1. a ও b দুইটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে, প্রমাণ কর যে, $a\times b=b\times a$.

2. $M=a(m+n)$ এবং $N=b(m-n)$ হইলে,

$\frac{M}{a}+\frac{N}{b}$ এবং $\frac{M}{a}-\frac{N}{b}$ এর প্রত্যেকের মান নির্ণয় কর।

3. $c(a+b)=ca+cb$ এই সূত্রটিতে,

(1) c এর পরিবর্তে $m+n$ বসাও, এবং ইহা হইতে $(m+n)(a+b)$ এর মান নির্ণয় কর।

(2) c এর পরিবর্তে $a+b$ বসাও, এবং ইহা হইতে $(a+b)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

4. সরল কর :

(1) $x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)$;

(2) $\frac{y-z}{yz}+\frac{z-x}{zx}+\frac{x-y}{xy}$.

5. প্রমাণ কর যে,

(1) m ও n দুইটি অখণ্ড ধনরাশি, এবং $m>n$ হইলে, $a^m\div a^n=a^{m-n}$,

এবং (2) $a\div b\div c=a\div c\div b=a\div bc$.

6. $a=3xy-yz-zx$, $b=3yz-zx-xy$ এবং $c=3zx-xy-yz$ হইলে, $\frac{a+b+c}{xyz}$ এর মান নির্ণয় কর।

7. $\frac{3}{2}a^5b^{10}c^{15}x^8y^6z^4+\frac{15}{4}a^{10}b^{15}c^5x^6y^4z^2+\frac{5}{12}a^{15}b^5c^{10}x^4y^2$ কে $24a^3b^5c^7x^2y^4z^6$ দ্বারা গুণ কর।

8. $\frac{3}{2}a^{10}b^{15}c^{20}x^{12}y^{10}z^8+\frac{15}{4}a^{15}b^{20}c^{10}x^{10}y^8z^{12}+\frac{9}{4}a^{20}b^{10}c^{15}x^8y^{12}z^{10}$ কে $\frac{3}{4}a^{10}b^{10}c^{10}x^8y^8z^8$ দ্বারা ভাগ কর।

9. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার দশকস্থানীয় অঙ্কটি এককস্থানীয় অঙ্কটির তিনগুণ এবং সংখ্যাটি উহার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 7 গুণ হইতে 6 বড়। সংখ্যাটি কত ?

[The digit in the ten's place of a number consisting of two digits is three times that in the unit's place ; and the number exceeds seven times the sum of the digits by 6. Find the number.]

10. কোন এক নির্দ্দিষ্ট দিনে তোমাদের স্কুলের বিভিন্ন শ্রেণীতে নিম্নলিখিতরূপ ছাত্র উপস্থিত ছিল :—

শ্রেণী	১ম	২য়	৩য়	৪র্থ	৫ম	৬ষ্ঠ	৭ম	৮ম	৯ম	১০ম
ছাত্র-উপস্থিতির সংখ্যা	35	38	40	39	40	38	35	36	37	35

ঐ দিনের স্কুলের ছাত্র-উপস্থিতির সংখ্যার একটি অর্গল-লেখ প্রস্তুত কর।

IX

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, এই সূত্রটির মধ্যে a এর পরিবর্তে x এবং b এর পরিবর্তে $-y-z$ বসাইয়া $(x-y-z)$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

2. নিম্নলিখিত সূত্রদ্বয় প্রতিপন্ন কর :

(i) $a^2+b^2=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$; (ii) $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$.

3. প্রমাণ কর যে,

$$(y-z)(y+z-x)+(z-x)(z+x-y)+(x-y)(x+y-z)=0.$$

4. প্রমাণ কর যে,

$$(a-b)(a+1)(b+1)-a(b+1)^2+b(a+1)^2=(a-b)(a+b+2ab).$$

5. $a=x+m,\ b=y+m,\ c=z+m$ হইলে, দেখাও যে,

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$$

6. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=16s(s-a)(s-b)(s-c).$$

7. $(m+n)^2-9p^2$ কে $m+n-3p$ দ্বারা ভাগ কর।

8. $(9x^2-17xy+13y^2)^2$ ভাজ্য, $49y^2(2x+5y)^2$ ভাগশেষ এবং $3x^2-xy+16y^2$ ভাজক হইলে, ভাগফল নির্ণয় কর।

9. $x+\frac{2}{y}=\frac{8}{3}$ এবং $y+\frac{3}{x}=\frac{9}{2}$ হইলে, $x^2y^2+\frac{36}{x^2y^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

10. দেখাও যে,

$$(x-y+z)^2+(x+y-z)^2+2(x-y+z)(x+y-z)=4x^2.$$

X

1. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহার সহিত 29 যোগ করিলে যোগফল ঐ সংখ্যাটির চতুর্গুণ অপেক্ষা 8 বেশী হয়।

[Find the number to which, if 29 be added, the sum will exceed four times the number by 8.]

2. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহার এক-সপ্তমাংশ উহার এক-নবমাংশ অপেক্ষা 4 বেশী।

[Find the number whose 7th part exceeds the 9th part by 4.]

3. এক ব্যক্তি তাঁহার মাসিক আয়ের দশভাগের একভাগ সঞ্চয় করেন এবং বাকী অংশের এক-তৃতীয়াংশ খুচরা দ্রব্যাদি ক্রয় করিতে খরচ করেন; মাসিক চল্‌তি খরচা বাবদ তাঁহার সমস্ত আয়ের পাঁচভাগের দুইভাগ খরচ করিয়া মাসশেষে তাঁহার নিকট 300 টাকা থাকিলে, ঐ ব্যক্তির মাসিক আয় কত?

[A man saves one-tenth of his monthly income and spends one-third of the remainder in buying petty things. At the end of the month he has Rs. 300 in his pocket after meeting all the current expenses which amounted to two-fifths of the total income. Find his income per month.]

4. এক ব্যবসায়ী তাঁহার তহবিলের পাঁচভাগের দুইভাগ চিনির ব্যবসায়ে, তিনভাগের একভাগ পাটের ব্যবসায়ে এবং বাকী অংশের অর্দ্ধেক কাপড়ের ব্যবসায়ে খাটাইয়া তাঁহার নিকট £300 রহিল; ঐ ব্যবসায়ীর মোট মূলধন এবং তিনি কোন্ ব্যবসায়ে কত খাটাইলেন, তাহা স্থির কর।

[A merchant invests two-fifths of his capital in sugar business, one-third in jute and half of the remainder in cloth and has £300 cash. Find his capital and the money invested in each kind of business.]

5. A এর বয়স B এর বয়সের দ্বিগুণ এবং C এর বয়স অপেক্ষা 4 বৎসর বেশী; উহাদের তিনজনের বয়সের সমষ্টি 96 বৎসর হইলে, প্রত্যেকের বয়স নির্ণয় কর।

[A is twice as old as B and four years older than C. The sum of the ages of A, B and C is 96 years. Find the age of each.]

6. দুইটি থলির অর্থের সমষ্টি 54 পা. 12 শি., এবং একটি থলিতে যতসংখ্যক পাউণ্ড আছে, অন্যটিতে ততসংখ্যক শিলিং আছে; প্রত্যেক থলির অর্থের পরিমাণ নির্ণয় কর।

[Two sums of money are together equal to £54 12s., and there are as many pounds in the one as there are shillings in the other. Find the sums.

7. কোন ফলবিক্রেতা প্রতি কমলালেবু 3 পেন্স দরে কতকগুলি কমলালেবু কিনিয়া দেখিতে পাইল যে উহার ভিতর 21 টি পচা। বাকীগুলির প্রতিটি 4 পেন্স দরে বিক্রয় করিয়া মোট 1 শি. 6 পে. লাভ করিল। সে কতগুলি কমলালেবু কিনিয়াছিল ?

[A fruit-seller bought a number of oranges at 3d. each, and found 21 of them to be rotten. He sold the remainder at 4d. each and gained 1s. 6d. on the whole. How many oranges did he buy ?]

8. কোন কারখানায় স্ত্রীলোক ও পুরুষ মিলিয়া 200 জন মজুর কাজ করে এবং তাহাদের দৈনিক মজুরী 205 টাকা ; যদি প্রত্যেক পুরুষের দৈনিক মজুরী 1 টাকা 4 আনা এবং প্রত্যেক স্ত্রীলোকের দৈনিক মজুরী 14 আনা করিয়া হয়, তাহা হইলে পুরুষ ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

[There are 200 labourers in a factory and their daily wages are Rs. 205. If a male member gets Re. 1 as. 4 and a female member 14 as. per day, find the number of male labourers and female ones in the factory.]

9. একখানি বাঁশের কতক অংশ জলের উপরে, উক্ত অংশের অর্দ্ধেক জলের মধ্যে এবং প্রথমাংশের এক-তৃতীয়াংশ মাটির ভিতরে আছে। সম্পূর্ণ বাঁশটির দৈর্ঘ্য 22 ফুট হইলে, প্রত্যেক অংশের পরিমাণ কত ?

[Some portion of a bamboo-post is above water ; half of that portion lies inside the water and one-third the first part is in the mud. If the total length of the post be 22 ft., find the length of each of the three parts.]

10. A, B ও C এর মধ্যে কতক পরিমাণ অর্থ এরূপে ভাগ করিয়া দাও যে A সমস্ত অর্থের অর্দ্ধ অপেক্ষা 30 টাকা কম, B সমস্ত অর্থের এক-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা 10 টাকা কম এবং C সমস্ত অর্থের এক-চতুর্থাংশ অপেক্ষা 8 টাকা বেশী পায়। প্রত্যেকে কত করিয়া পাইল ?

[Divide a given sum among A, B and C in such a way that A gets Rs. 30 less than half the sum, B gets Rs. 10 less than one-third the sum and C gets Rs. 8 more than one-fourth of the sum. Find the amount each receives.]

নবম অধ্যায়

. জটিল গুণন ও ভাগহার

(Harder Multiplication and Division)

1. জটিল গুণন

73. চতুর্থ অধ্যায়ে গুণনের নিম্নলিখিত নিয়মগুলি ব্যাখ্যা করা হইয়াছে :

(1) $a \times b = b \times a$; [নিয়ম 47]

$\boldsymbol{abc = bca = cab}$, ইত্যাদি ; [নিয়ম 48]

অর্থাৎ, উৎপাদকগুলিকে যে কোন ক্রমেই লওয়া হউক না কেন, গুণফল সকল ক্ষেত্রেই এক থাকে।

ইহাকে গুণনের **বিনিময় নিয়ম** (Commutative Law) বলে।

(2) $\boldsymbol{(ab) \times c = a \times (bc) = b \times (ac) = a \times b \times c}$; [নিয়ম 48]

অর্থাৎ, গুণফলের উৎপাদকগুলিকে যে কোন রকমে সঙ্ঘবদ্ধ (grouped together) করা যায়।

ইহাকে গুণনের **সংযোগ নিয়ম** (Associative Law) বলে।

(3) $\boldsymbol{a(b+c) = ab+ac}$; [নিয়ম 52]

ইহাকে গুণনের **বণ্টন-নিয়ম** (Distributive Law) বলে।

(4) m এবং n দুইটি অখণ্ড ধনরাশি (positive integers) হইলে,

$$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}.$$

ইহাকে গুণনের **সূচক নিয়ম** (Index Law) বলে।

বর্তমানে, মিশ্র রাশির (compound expression এর) গুণনের নিয়ম এবং জটিল গুণনের উদাহরণ দেওয়া যাইতেছে।

74. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\boldsymbol{(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd}.$$

$c+d$ এর পরিবর্তে x ধরিয়া,

$$(a+b)(c+d) = (a+b)x = x(a+b) = xa+xb \quad [\text{ নিয়ম } 52]$$
$$= ax+bx = a(c+d)+b(c+d)$$
$$= ac+ad+bc+bd.$$

অনুসি.। যেহেতু $a-b=a+(-b)$ এবং $c-d=c+(-d)$,

অতএব, $(a-b)(c-d)=\{a+(-b)\}\{c+(-d)\}$

$$=ac+a(-d)+(-b)c+(-b)(-d)$$
$$=ac-ad-bc+bd.$$

75. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

$x+a$ এর পরিবর্ত্তে m ধরিয়া,

$$(x+a)(x+b)=m(x+b)$$
$$=mx+mb$$
$$=(x+a)x+(x+a)b$$
$$=x^2+ax+xb+ab$$
$$=x^2+(a+b)x+ab.$$

টীকা। উপরিউক্ত গুণনের ফল হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে,

(i) $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$,

(ii) $(x-a)(x+b)=x^2+(b-a)x-ab$,

(iii) $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$.

কারণ, (i) $x-a$ এর পরিবর্ত্তে, m বসাইলে,

$$(x-a)(x-b)=m(x-b)=mx-mb$$
$$=(x-a)x-(x-a)b$$
$$=x^2-ax-bx+ab$$
$$=x^2-(a+b)x+ab.$$

(ii) এবং (iii) ও অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়।

সুতরাং, উপরিউক্ত গুণনের ফলগুলি আমরা নিম্নলিখিতরূপে সাধারণভাবে প্রকাশ করিতে পারি ; যথা—'a' ও 'b' এর পূর্ব্বে ধন-চিহ্ন বা ঋণ-চিহ্ন, যাহাই থাকুক না কেন,

$(x+a)(x+b)=x^2+($ a ও b এর বীজগণিতীয় সমষ্টি $)\times x$
$+($ a ও b এর গুণফল $)$।

উদা. 1. $x+3$ এবং $x+4$ এর গুণফল লিখ।

$$\left.\begin{array}{ll}\text{যেহেতু} & 3+4=7\\ \text{এবং} & 3\times4=12\end{array}\right\},\quad \therefore \text{ নির্ণেয় গুণফল}=x^2+7x+12.$$

উদা. 2. $x-7$ এবং $x+4$ এর গুণফল লিখ।

যেহেতু $-7+4=-3$
এবং $(-7)\times 4=-28$, $\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=x^2-3x-28$.

উদা. 3. $x+5$ এবং $x-9$ এর গুণফল লিখ।

যেহেতু $5-9=-4$
এবং $5\times(-9)=-45$, $\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=x^2-4x-45$.

উদা. 4. $x-2$ এবং $x+7$ এর গুণফল লিখ।

যেহেতু $-2+7=5$
এবং $(-2)\times 7=-14$, $\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=x^2+5x-14$.

উদা. 5. $x-5$ এবং $x-8$ এর গুণফল লিখ।

যেহেতু $-5-8=-13$
এবং $(-5)\times(-8)=40$, $\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=x^2-13x+40$.

প্রশ্নমালা 29

গুণফল লিখ (Write down the product of) :

1. $x+1$ এবং $x+2$ এর।
2. $x+2$ এবং $x+9$ এর।
3. $x-5$ এবং $x+6$ এর।
4. $x-3$ এবং $x-11$ এর।
5. $a-11$ এবং $a+16$ এর।
6. $m-7$ এবং $m+19$ এর।
7. $p+13$ এবং $p-11$ এর।
8. $p+12$ এবং $p-17$ এর।
9. $x-4$ এবং $x+9$ এর।
10. $x-5$ এবং $x-10$ এর।
11. $x-12$ এবং $x+5$ এর।
12. $k-13$ এবং $k+2$ এর।
13. $a+5$ এবং $a+14$ এর।
14. $m-14$ এবং $m+6$ এর।
15. $x-5$ এবং $x-13$ এর।
16. $x+7$ এবং $x+12$ এর।
17. $a-3$ এবং $a-11$ এর।
18. $x+4$ এবং $x-13$ এর।
19. $m+5$ এবং $m-16$ এর।
20. $x-8$ এবং $x-10$ এর।
21. $a+6$ এবং $a-12$ এর।
22. $m-7$ এবং $m+13$ এর।
23. $x-10$ এবং $x-16$ এর।
24. $x+5$ এবং $x-18$ এর।
25. $x-16$ এবং $x+10$ এর।

76. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(a+b+c+d+\cdots)(m+n+p+q+\cdots)$$
$$=a(m+n+p+q+\cdots)+b(m+n+p+q+\cdots)$$
$$+c(m+n+p+q+\cdots)+d(m+n+p+q+\cdots)+\cdots \text{ ইত্যাদি।}$$

$m+n+p+q+\cdots$ এর পরিবর্তে x লিখিয়া,

$$(a+b+c+d+\cdots)(m+n+p+q+\cdots)=(a+b+c+d+\cdots)x$$
$$=ax+bx+cx+dx+\cdots$$
$$=a(m+n+p+q+\cdots)+b(m+n+p+q+\cdots)+c(m+n+p+q+\cdots)$$
$$+d(m+n+p+q+\cdots)+\cdots \text{ ইত্যাদি।}$$

এইরূপে, দুইটি বহুপদরাশির (multinomial এর) গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে, রাশিদ্বয়ের যে কোনটির প্রত্যেকটি পদ-(term) কে অপরটির প্রত্যেকটি পদ দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি লইতে হয়।

উদা. 1. $2a+3b$ কে $4a+5b$ দ্বারা গুণ কর।

$$(4a+5b)(2a+3b)=(4a)(2a)+(4a)(3b)+(5b)(2a)+(5b)(3b)$$
$$=8a^2+12ab+10ab+15b^2$$
$$=8a^2+22ab+15b^2.$$

উদা. 2. $3x-7y$ কে $2x-5y$ দ্বারা গুণ কর।

$$(2x-5y)(3x-7y)=(2x)(3x)+(2x)(-7y)+(-5y)(3x)+(-5y)(-7y)$$
$$=6x^2-14xy-15xy+35y^2$$
$$=6x^2-29xy+35y^2.$$

প্রশ্নমালা 30

গুণ কর (Multiply):

1. $2a+3b$ কে $a+b$ দ্বারা। **2.** $2m-3n$ কে $m-n$ দ্বারা।

3. $a+b+c$ কে $a+b+c$ দ্বারা। **4.** $a-b+c$ কে $a-b+c$ দ্বারা।

5. $a-b-c$ কে $a-b-c$ দ্বারা। **6.** $a-2b-3c$ কে $2a-b-c$ দ্বারা।

7. $2x-3y-4z$ কে $x-y-z$ দ্বারা।

8. $-5x+2a-3b$ কে $-x-a+b$ দ্বারা।

9. $x^2+y^2+z^2$ কে $x-y-z$ দ্বারা।

10. $xy+yz+zx$ কে $xy-yz-zx$ দ্বারা।

77. কোন রাশিমালাকে তদন্তর্গত কোন একটি অক্ষরের শক্তির অধঃক্রম (descending order) বা উর্দ্ধক্রম (ascending order) অনুসারে সাজান : রাশিমালার পদসমূহ, উহাদের অন্তর্গত যে কোন একই অক্ষরের বিভিন্ন শক্তিবিশিষ্ট হইলে, যদি ঐ পদগুলিকে এরূপে সাজান যায় যে, নির্দ্দিষ্ট অক্ষরটির সর্ব্বোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদটি প্রথম, তন্নিম্ন-শক্তিবিশিষ্ট পদটি প্রথম পদের ডা'নদিকে, তন্নিম্নশক্তিবিশিষ্ট পদটি দ্বিতীয় পদের ডা'নদিকে, ইত্যাদি, এবং ঐ অক্ষরবিবর্জ্জিত পদটি অর্থাৎ ধ্রুবকটি (constant) সর্ব্বশেষে লিখিত হয়, তাহা হইলে উক্ত রাশিমালাকে নির্দ্দিষ্ট অক্ষরটির শক্তির **অধঃক্রম** অনুসারে সাজান হইল, বলা হয়। ইহার ঠিক বিপরীতভাবে সাজাইলে অর্থাৎ প্রথমে ধ্রুবকটি, তৎপরে সর্ব্বনিম্নশক্তিবিশিষ্ট পদটি, ইত্যাদি, এবং সর্ব্বশেষে সর্ব্বোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদটি লিখিলে রাশিমালাকে নির্দ্দিষ্ট অক্ষরটির শক্তির **উর্দ্ধক্রম** অনুসারে সাজান হইল, বলা হয়। যথা, $a^5x^3+3a^4xy-5a^3x^6y^2+4a^2x^4y^3-2ax^2y^4+x^5y^5$ রাশিমালাটি a এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে, অথবা y এর শক্তির উর্দ্ধক্রম অনুসারে সাজান রহিয়াছে। কিন্তু ইহাকে $-5a^3x^6y^2+x^5y^5+4a^2x^4y^3+a^5x^3-2ax^2y^4+3a^4xy$ এইরূপে লিখিলে, রাশিমালাটিকে x এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজান হইয়াছে, বলিতে হইবে।

78. কোন রাশিমালাকে অন্য একটি রাশিমালা দ্বারা গুণ করিতে হইলে, গুণ্য-রাশি এবং গুণকরাশির অন্তর্গত কোন একটি সাধারণ অক্ষরের শক্তির, হয় উর্দ্ধক্রম, না হয় অধঃক্রম অনুসারে উভয়কেই সাজাইয়া নিম্নলিখিত উদাহরণে প্রদর্শিত নিয়মানুযায়ী গুণনক্রিয়া সম্পন্ন করিতে হয়।

উদা. 1. a^2-b^2-ab কে $ab-b^2+a^2$ দ্বারা গুণ কর।

$$
\begin{array}{rlllll}
\text{গুণ্য} = & a^2 & -ab & -b^2 & & \\
\text{গুণক} = & a^2 & +ab & -b^2 & & \\
\hline
a^2 \text{ দ্বারা গুণনের ফল} = & a^4 & -a^3b & -a^2b^2 & & \\
+ab \text{ দ্বারা গুণনের ফল} = & & +a^3b & -a^2b^2 & -ab^3 & \\
-b^2 \text{ দ্বারা গুণনের ফল} = & & & -a^2b^2 & +ab^3 & +b^4 \\
\hline
\text{অতএব, নির্ণেয় গুণফল} = & a^4 & & -3a^2b^2 & & +b^4
\end{array}
$$

টীকা। উপরিউক্ত উদাহরণের প্রক্রিয়া-বিশ্লেষণ :

গুণ্য এবং গুণক উভয়কেই a এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া গুণ্যের নীচে গুণককে লেখা হইয়াছে এবং গুণকের নীচে একটি রেখা টানা হইয়াছে ; তৎপরে বামদিক

হইতে আরম্ভ করিয়া, গুণকের প্রত্যেকটি পদ দ্বারা গুণ্যকে গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলগুলিকে সারি করিয়া একটির নীচে একটি এরূপে লেখা হইয়াছে যে, বিভিন্ন সারির সদৃশপদগুলি ঠিক একই স্তম্ভে বসে। সর্ব্বনিম্ন সারির নীচে একটি রেখা টানিয়া বিভিন্ন স্তম্ভের বীজগণিতীয় যোগফলগুলি উহার নীচে লিখিয়াই নির্ণেয় গুণফল পাওয়া গিয়াছে।

উদা. 2. $2a^2-3x^2-5ax$ কে $-3x^2+2a^2+5ax$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য এবং গুণক উভয়কেই x এর শক্তির ঊর্দ্ধক্রম অনুসারে সাজাইলে,

$$\text{গুণ্য} = 2a^2-5ax-3x^2$$
$$\text{গুণক} = 2a^2+5ax-3x^2$$

$$\begin{aligned}
2a^2 \text{ দ্বারা গুণনের ফল} &= 4a^4-10a^3x-6a^2x^2 \\
+5ax \text{ দ্বারা গুণনের ফল} &= \quad\;\; +10a^3x-25a^2x^2-15ax^3 \\
-3x^2 \text{ দ্বারা গুণনের ফল} &= \qquad\qquad\quad -6a^2x^2+15ax^3+9x^4 \\
\therefore \quad \text{নির্ণেয় গুণফল} &= 4a^4 \qquad\quad -37a^2x^2 \qquad\quad +9x^4
\end{aligned}$$

উদা. 3. $2a^3b-5ab^3-a^4+3a^2b^2$ কে $2a^4-3a^3b+4ab^3-5a^2b^2$ দ্বারা গুণ কর।

[গুণ্য এবং গুণক উভয়কেই a এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া গুণ কর।]

$$\text{গুণ্য} = -a^4+2a^3b+3a^2b^2-5ab^3$$
$$\text{গুণক} = 2a^4-3a^3b-5a^2b^2+4ab^3$$

$$\begin{aligned}
&-2a^8+4a^7b+6a^6b^2-10a^5b^3 \\
&\qquad +3a^7b-6a^6b^2-9a^5b^3+15a^4b^4 \\
&\qquad\qquad +5a^6b^2-10a^5b^3-15a^4b^4+25a^3b^5 \\
&\qquad\qquad\qquad -4a^5b^3+8a^4b^4+12a^3b^5-20a^2b^6
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় গুণফল} = -2a^8+7a^7b+5a^6b^2-33a^5b^3+8a^4b^4+37a^3b^5-20a^2b^6$$

টীকা। উপরিউক্ত উদাহরণে, গুণ্য ও গুণক উভয়ই চতুর্থমানবিশিষ্ট সমমাত্র রাশি এবং গুণফলও অষ্টমমানবিশিষ্ট সমমাত্র রাশি। তদ্রূপ দেখান যাইতে পারে যে, গুণ্য ও গুণক উভয়ই সমমাত্র রাশি হইলে গুণফলও সমমাত্র রাশি হইবে, এবং গুণফলের মান (degree of the product) রাশিদ্বয়ের মানের সমষ্টি হইবে। গুণ্য ও গুণক উভয়ই সমমাত্র রাশি হইলে, গুণফলের শুদ্ধিপরীক্ষা করার পক্ষে এই নিয়মটি অত্যাবশ্যক; কারণ, গুণফল সমমাত্র না হইলেই বুঝিতে হইবে যে গুণনে ভুল হইয়াছে।

উদা. 4. $mx^2 - nx - p$ কে $x^2 + px - 1$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{lllll}
\text{গুণ্য} = mx^2 - nx - p & & & & \\
\text{গুণক} = x^2 + px - 1 & & & & \\
\hline
mx^4 - & nx^3 - px^2 & & & \\
+ & pmx^3 - pnx^2 & & -p^2x & \\
& & -mx^2 & +nx & +p \\
\hline
\end{array}$$

$\therefore$ গুণফল $= mx^4 - (n - pm)x^3 - (p + pn + m)x^2 + (n - p^2)x + p$

উদা. 5. $\frac{11}{5}ax^3 + \frac{7}{19}b^2x^2y + 3{\cdot}5cxy^2 + 1{\cdot}05g^2y^3$ কে $2lx^2 + 3{\cdot}5mxy + 1{\cdot}5ny^2$ দ্বারা গুণ কর।

[**টীকা।** গুণ্য এবং গুণকে সাধারণ ও দশমিক এই উভয়বিধ ভগ্নাংশ-সহগই বর্ত্তমান থাকিলে সকল ভগ্নাংশগুলিকেই একজাতীয় ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া গুণনক্রিয়া সম্পন্ন করাই স্থবিধাজনক। বর্ত্তমানক্ষেত্রে, $\frac{7}{19}$ কে দশমিকে পরিবর্ত্তিত করিলে, দশমিক বিন্দুর পর অনেকগুলি অঙ্ক আসিবে বলিয়া সকল ভগ্নাংশগুলিকেই সাধারণ ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তিত করা হইল।]

$$\begin{array}{l}
\text{গুণ্য} = \frac{11}{5}ax^3 + \frac{7}{19}b^2x^2y + \frac{7}{2}cxy^2 + \frac{21}{20}g^2y^3 \\
\text{গুণক} = 2lx^2 + \frac{7}{2}mxy + \frac{3}{2}ny^2 \\
\hline
\frac{22}{5}alx^5 + \frac{14}{19}b^2lx^4y + 7clx^3y^2 + \frac{21}{10}g^2lx^2y^3 \\
\quad + \frac{77}{10}amx^4y + \frac{49}{38}b^2mx^3y^2 + \frac{49}{4}cmx^2y^3 + \frac{147}{40}g^2mxy^4 \\
\quad\quad + \frac{33}{10}anx^3y^2 + \frac{21}{38}b^2nx^2y^3 + \frac{21}{4}cnxy^4 + \frac{63}{40}g^2ny^5 \\
\hline
\end{array}$$

গুণফল $= \frac{22}{5}alx^5 + (\frac{14}{19}b^2l + \frac{77}{10}am)x^4y + (7cl + \frac{49}{38}b^2m + \frac{33}{10}an)x^3y^2$
$+ (\frac{21}{10}g^2l + \frac{49}{4}cm + \frac{21}{38}b^2n)x^2y^3 + (\frac{147}{40}g^2m + \frac{21}{4}cn)xy^4 + \frac{63}{40}g^2ny^5.$

উদা. 6. গুণ কর : $a^2 - ab + b^2$, $a^2 + ab + b^2$ এবং $a^4 - a^2b^2 + b^4$.

(i)

$$\begin{array}{l}
a^2 - ab + b^2 \\
a^2 + ab + b^2 \\
\hline
a^4 - a^3b + a^2b^2 \\
\quad + a^3b - a^2b^2 + ab^3 \\
\quad\quad + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \\
\hline
a^4 \quad + a^2b^2 \quad + b^4
\end{array}$$

(ii)

$$
\begin{array}{l}
a^4 + a^2b^2 + b^4 \\
a^4 - a^2b^2 + b^4 \\
\hline
a^8 + a^6b^2 + a^4b^4 \\
\quad - a^6b^2 - a^4b^4 - a^2b^6 \\
\qquad + a^4b^4 + a^2b^6 + b^8 \\
\hline
a^8 \qquad + a^4b^4 \qquad + b^8
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় গুণফল $= a^8 + a^4b^4 + b^8$.

টীকা। তিন বা ততোধিক রাশির পর পর গুণনের ফলে যে রাশিটি পাওয়া যায়, তাহাকে ঐ রাশিগুলির **ধারাবাহিক গুণফল** (continued product) বলে। কতকগুলি রাশির ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদের যে কোন দুইটির গুণফলকে অন্য একটি দ্বারা গুণ করিয়া, লব্ধ গুণফলকে আবার অপর একটি দ্বারা, ইত্যাদিক্রমে, পর পর গুণ করিয়া যাইতে হয়।

ধারাবাহিক গুণনে, গুণ্যরাশিগুলিকে সুবিধামত ক্রমানুসারে সাজাইয়া গুণ করিতে হয়।

79. 'সহগ-বিচ্ছিন্নকরণ' প্রণালী (Method of detached coefficients): যদি গুণ্য এবং গুণকরাশিদ্বয়ের পদসমূহ একই অক্ষরের বিভিন্ন শক্তিবিশিষ্ট হয়, অথবা উভয়ই দুইটি অক্ষরের সমমাত্র রাশি হয়, তাহা হইলে পদগুলির আক্ষরিকাংশ হইতে সাংখ্য-সহগগুলিকে বিচ্ছিন্ন করিয়া এবং যথাস্থানে স্থাপন করিয়া ঐ সহগগুলি দ্বারাই গুণনক্রিয়া সংক্ষেপে ও সহজে সম্পন্ন করা যায়। রাশিদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সাধারণ অক্ষরটির কোন এক শক্তিবিশিষ্ট পদ বর্তমান না থাকিলে, ঐ পদটির সহগ 0 বলিয়া ধরিতে হয়।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী সুস্পষ্টরূপে বুঝিতে পারা যাইবে।

উদা. 1. গুণ কর : $x^2 - 4x + 4$ কে $x - 2$ দ্বারা।

$$
\begin{array}{rrrr}
x^2 - & 4x & + 4 & \\
x - & 2 & & \\
\hline
1 - & 4 & + 4 & \\
 & - 2 & + 8 & - 8 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

উদা. 2. গুণ কর : $3x^3-2x+4$ কে $x+5$ দ্বারা।

$$\begin{array}{llll} 3x^3+ & 0.x^2- & 2x+ & 4 \\ x+5 & & & \\ \hline 3 & +0 & -2 & +4 \\ & +15 & +0 & -10 \quad +20 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=3x^4+15x^3-2x^2-6x+20.$

উদা. 3. গুণ কর : x^2+xa+a^2 কে $x-a$ দ্বারা।

$$\begin{array}{l} x^2+xa+a^2 \\ x-a \\ \hline 1+1+1 \\ \quad -1-1-1 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=x^3 \qquad -a^3.$

প্রশ্নমালা 31

গুণ কর (Multiply) :

1. $25b^2+30ab+9a^2$ কে $3a-5b$ দ্বারা।
2. $2a-3b+4c$ কে $2a+3b-4c$ দ্বারা।
3. x^2-x+2 কে x^2+x+2 দ্বারা।
4. $a^2-2ab+b^2$ কে $a^2+2ab+b^2$ দ্বারা।
5. x^4+x^2+1 কে x^4-x^2+1 দ্বারা।
6. $y^3-x^2y^2+x^3$ কে $x^3+x^2y^2+y^3$ দ্বারা।
7. $m^4-m^2n^2+n^4$ কে m^2+n^2 দ্বারা।
8. $p^2q^2+p^4+q^4$ কে $-q^2+p^2$ দ্বারা।
9. $a^3+5ab^2-6a^2b$ কে $5b^2+a^2+6ab$ দ্বারা।
10. x^3-3x^2+3x-1 কে x^2+3x+1 দ্বারা।
11. $2ax^3+a^4+3a^2x^2+x^4+2a^3x$ কে a^2+x^2-2ax দ্বারা।
12. $a^3+3a^2b+b^3+3ab^2$ কে $3ab^2-b^3+a^3-3a^2b$ দ্বারা।
13. $x^2-11+x^4-4x+2x^3$ কে $3+x^2-2x$ দ্বারা।
14. $1+2x+x^4+2x^3+3x^2$ কে $1+x^2-2x$ দ্বারা।
15. $b^4+a^2b^2+a^3b+a^4+ab^3$ কে $a^2b^2-a^3b+b^4-ab^3+a^4$ দ্বারা।

16. $x^2 - xy - xz + y^2 - yz + z^2$ কে $x + y + z$ দ্বারা।

17. $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$ কে $a + b + c$ দ্বারা।

18. $5a^2b + 4b^3 + 2a^3 - 3ab^2$ কে $2ab^2 - 3a^2b + a^3 - 5b^3$ দ্বারা।

19. $ax^2 + bx - c$ কে $px - q$ দ্বারা। 20. $mx^2 - nx - r$ কে $nx - r$ দ্বারা।

21. $ax^2 - bx + c$ কে $x^2 - bx - c$ দ্বারা।

22. $ax^3 - bx^2 + cx - d$ কে $bx^2 - cx + d$ দ্বারা।

23. $px^2 - (q - r)x + s$ কে $mx^2 - nx - s$ দ্বারা।

24. $ax^2 + 2hxy + by^2$ কে $lx + my + n$ দ্বারা।

25. $l^2x^2 + m^2xy + n^2y^2 + 2g^2x + 2f^2y + c^2$ কে $px^2 + qx + r$ দ্বারা।

26. $\frac{7}{9}x^3 + \frac{2}{5}x^2y + \frac{3}{5}xy^2 + \frac{3}{7}y^3$ কে $\frac{9}{7}x^2 + \frac{5}{3}xy + \frac{7}{3}y^2$ দ্বারা।

27. $\frac{3}{7}x^4 + \frac{5}{7}x^3y + \frac{9}{7}x^2y^2 + \frac{1}{7}xy^3 + \frac{11}{7}y^4$ কে $\frac{7}{3}x^2 + \frac{7}{11}y^2$ দ্বারা।

28. $1{\cdot}5x^5 + 2{\cdot}3x^9 + 1{\cdot}23x^4 + 3{\cdot}25x^2 + 5$ কে ${\cdot}27x^3 + 1{\cdot}39x + 9$ দ্বারা।

29. ${\cdot}057a^3 + 1{\cdot}025a^2b + 2{\cdot}021ab^2 + 2{\cdot}8b^3$ কে $7a^2 + 2ab + 9b^2$ দ্বারা।

30. $2{\cdot}3x^3 + 3{\cdot}15x^2y + 1{\cdot}17xy^2 + 2{\cdot}07y^3$ কে $lx^2 + mxy + ny^2$ দ্বারা।

31. $\frac{5}{2}ax^3 + \frac{7}{3}bx^2y + \frac{9}{4}cxy^2 + 2dy^3$ কে $\frac{2}{5}ax^2 - \frac{3}{7}bxy + \frac{4}{9}cy^2$ দ্বারা।

32. $1{\cdot}5am^3 - 1{\cdot}2bm^2n + 1{\cdot}3cmn^2 - 1{\cdot}6dn^3$ কে
$1{\cdot}5am^3 + 1{\cdot}2bm^2n + 1{\cdot}3cmn^2 + 1{\cdot}6dn^3$ দ্বারা।

ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর (Find the continued product of) :

33. $2a + 3b$, $2a - 3b$ এবং $4a^2 + 9b^2$ এর।

34. $5ax + 6by$, $5ax - 6by$ এবং $25a^2x^2 + 36b^2y^2$ এর।

35. $x^8 + x^4y^4 + y^8$, $x^2 + y^2$, $x + y$ এবং $x - y$ এর।

36. $x^2 + 3xy + 5y^2$, $x^2 - 3xy + 5y^2$ এবং $x^4 - x^2y^2 + 25y^4$ এর।

37. $a^{12}x^{12} + a^6b^6x^6y^6 + b^{12}y^{12}$, $a^4x^4 + a^2b^2x^2y^2 + b^4y^4$, $ax + by$ এবং $ax - by$ এর।

নিয়ম 24 এর ব্যাখ্যা হইতে নিম্নলিখিত সম্বন্ধগুলি প্রতিপন্ন কর :

38. $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$. $[\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a.]$ (নিয়ম 24 দেখ।)

39. $\sqrt{x} \times \sqrt{x} \times x = x^2$. 40. $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a$.

'সহগ-বিচ্ছিন্নকরণ' প্রণালী অনুসারে গুণফল নির্ণয় কর (Apply the method of detached coefficients to find the product of) :

41. $2x^2 + 3x + 9$ এবং $3x + 5$ এর। 42. $x^2 - 2x - 15$ এবং $2x - 3$ এর।

43. $3x^3 + 5x + 6$ এবং $x^2 + 3x + 2$ এর।

44. $x^3 + px + r$ এবং $px + q$ এর।

45. $\frac{1}{3}x^4 + \frac{9}{2}x^2 + 5$ এবং $\frac{3}{2}x^2 + x + 2$ এর।

2. জটিল ভাগহার

(Harder Division)

80. চতুর্থ অধ্যায়ে বর্ণিত ভাগের সাধারণ নিয়মগুলি নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায় :

(i) $a \div b = a \times \frac{1}{b}$;

(ii) $a \div b \div c = a \div bc$;

(iii) $a \div b \times c = a \times c \div b$;

এবং (iv) m ও n উভয়ই অখণ্ড ধনরাশি এবং $m > n$ হইলে, $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

শেষোক্ত নিয়মকে ভাগের **সূচক নিয়ম** (Index Rule) বলে।

55 হইতে 57 সংখ্যক নিয়মাবলীতে, একপদ বা বহুপদ রাশিকে একপদ রাশি দ্বারা ভাগ করিবার প্রণালী, এবং তৎসম্পর্কিত চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়মের বিষয় বর্ণিত হইয়াছে। বর্ত্তমানে বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগ করার প্রণালী ব্যাখ্যা করা যাইতেছে।

81. বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগ :

প্রথমে একটি দৃষ্টান্ত ধরা যাক। যথা,

যেহেতু $(2a^2+3ab+4b^2)(a+3b) = 2a^2(a+3b)+3ab(a+3b)+4b^2(a+3b)$
$= 2a^3+9a^2b+13ab^2+12b^3$,

অতএব, $(2a^3+9a^2b+13ab^2+12b^3) \div (a+3b) = 2a^2+3ab+4b^2$.

এক্ষণে, ভাজ্য ও ভাজক দেওয়া থাকিলে ভাগফল কি প্রকারে নির্ণয় করা যায় তাহা আলোচনা করা যাক। উপরিউক্ত দৃষ্টান্ত হইতে দেখা যাইতেছে যে,

(i) ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই, উহাদের অন্তর্গত একটি সাধারণ অক্ষর a এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে লিখিত হইয়াছে।

(ii) ভাগফলের প্রথম পদ, যথা, $2a^2 = 2a^3 \div a$,

অর্থাৎ, = (ভাজ্যের প্রথম পদ) ÷ (ভাজকের প্রথম পদ)।

(iii) ভাজ্য হইতে $2a^2(a+3b)$ বাদ দিলে $3a^2b+13ab^2+12b^3$ অবশিষ্ট থাকে, এবং ভাগফলের দ্বিতীয় পদ, যথা, $3ab = 3a^2b \div a$, অর্থাৎ, = (উক্ত অবশিষ্টের প্রথম পদ) ÷ (ভাজকের প্রথম পদ)।

(iv) উপরিলিখিত অবশিষ্ট হইতে $3ab(a+3b)$ বাদ দিলে $4ab^2+12b^3$ অবশিষ্ট থাকে, এবং ভাগফলের তৃতীয় পদ, যথা, $4b^2 = 4ab^2 \div a$, অর্থাৎ, = (এই শেষোক্ত অবশিষ্টের প্রথম পদ) ÷ (ভাজকের প্রথম পদ)।

(v) উল্লিখিত শেষোক্ত অবশিষ্ট হইতে $4b^2(a+3b)$ বাদ দিলে, কিছুই অবশিষ্ট থাকে না; সুতরাং ভাগ করা সম্পূর্ণ হইল।

উপরিউক্ত প্রক্রিয়া-প্রণালী নিম্নলিখিতরূপে দেখান যাইতে পারে:

$$\begin{array}{r|l|l} a+3b & 2a^3+9a^2b+13ab^2+12b^3 & 2a^2+3ab+4b^2 \\ & \underline{2a^3+6a^2b} & \\ & 3a^2b+13ab^2+12b^3 & \\ & \underline{3a^2b+\ \ 9ab^2} & \\ & 4ab^2+12b^3 & \\ & \underline{4ab^2+12b^3} & \end{array}$$

সুতরাং, ভাগের নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া যায়:

ভাজ্য ও ভাজক উভয়কেই উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ (common) অক্ষরের অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া পাটীগণিতের পদ্ধতি অনুযায়ী এক পংক্তিতে স্থাপন কর।

ভাজ্যের প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ফলকে ভাগফলের প্রথম পদরূপে লিখ। ভাগফলের এই প্রথম পদ দ্বারা ভাজককে গুণ করিয়া ভাজ্য হইতে বিয়োগ কর এবং বিয়োগফলকে পূর্ব্বনির্দ্দিষ্ট সাধারণ অক্ষরটির (common letter এর) অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাও।

এখন, উপরিলব্ধ বিয়োগফলকে একটি নূতন ভাজ্য মনে কর এবং পূর্ব্ব নিয়মানুযায়ী ইহার প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ফলকে ভাগফলের দ্বিতীয় পদরূপে লিখ।

ভাগফলের দ্বিতীয় পদ দ্বারা ভাজককে পুনরায় গুণ করিয়া উল্লিখিত নূতন ভাজ্য হইতে বিয়োগ কর। এই বিয়োগফলকেও নূতন ভাজ্যরূপে গণ্য করিয়া উহার উপর পূর্ব্বোক্ত প্রক্রিয়া প্রয়োগ কর, এবং কোন অবশিষ্ট না থাকা পর্য্যন্ত এইরূপে প্রক্রিয়া করিয়া যাও।

টীকা। ইহা সুস্পষ্ট যে, উপরিউক্ত নিয়মানুসারে ভাগফল ঠিকরূপেই পাওয়া যায়। কারণ, যে সকল বিভিন্ন রাশিকে ভাজ্য হইতে পর পর বিয়োগ করা হয়, উহারা ভাগফলের এক একটি পদ এবং সম্পূর্ণ ভাজকের গুণফল হওয়ায়, উহাদের সমষ্টি, সম্পূর্ণ ভাগফল এবং সম্পূর্ণ ভাজকের গুণফলের সমান; আবার, এই সমষ্টি ভাজ্যেরও সমান হওয়ায়, **স্পষ্টতঃই** প্রদত্ত ভাজ্যটি, ভাগফল ও ভাজকের গুণফলের সমান হইবে; এবং ইহাই হওয়া উচিত।

উদা. 1. $x^4-4x^2+12x-9$ কে x^2-2x+3 দ্বারা ভাগ কর।

এস্থলে, ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই x এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজান আছে; সুতরাং, প্রথমেই নিম্নলিখিতরূপে ভাগের ক্রিয়া আরম্ভ করিতে পারা যায়।

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^2-2x+3 & x^4 \qquad -4x^2+12x-9 & x^2+2x-3 \\
 & \underline{x^4-2x^3+3x^2} & \\
 & \quad 2x^3-7x^2+12x-9 & \\
 & \quad \underline{2x^3-4x^2+\ 6x} & \\
 & \qquad -3x^2+\ 6x-9 & \\
 & \qquad \underline{-3x^2+\ 6x-9} &
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= x^2+2x-3.$

টীকা। ভাজ্যে x^3-যুক্ত পদটি না থাকায় উহার স্থান শূন্য রাখিয়া, উহার পরবর্ত্তী x^2-যুক্ত পদটিকে, প্রথম পদ x^4 হইতে কিছুদূরে লেখা হইয়াছে। এইপ্রকার করা অত্যাবশ্যকীয় না হইলেও, সদৃশপদগুলি যাহাতে একটির নীচে একটি বসে সেইরূপ করার জন্য উহার প্রতি লক্ষ্য রাখা দরকার। দৃষ্টান্তস্বরূপ, উপরিউক্ত উদাহরণে ভাজ্যের দ্বিতীয় পদ $4x^2$ কে যদি x^4 এর পরেই লিখা হইত, তাহা হইলে $-2x^3$, '$-4x^2$' এর নীচে এবং $3x^2$, '$12x$' এর নীচে বসিত এবং ইহা দ্বারা প্রথম শিক্ষার্থীদের পক্ষে, হয় বিয়োগ করার অসুবিধা হইত, না হয় প্রক্রিয়ার সরলতা ক্ষুণ্ণ হইত।

উদা. 2. $16x^4+36x^2+81$ কে $4x^2+6x+9$ দ্বারা ভাগ কর।

$$
\begin{array}{l|l|l}
4x^2+6x+9 & 16x^4 \qquad\quad +36x^2 \qquad\quad +81 & 4x^2-6x+9 \\
 & \underline{16x^4+24x^3+36x^2} & \\
 & \quad -24x^3 \qquad\qquad\qquad +81 & \\
 & \quad \underline{-24x^3-36x^2-54x} & \\
 & \qquad\qquad 36x^2+54x+81 & \\
 & \qquad\qquad \underline{36x^2+54x+81} &
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= 4x^2-6x+9.$

উদা. 3. $x^6-4x^4-2x^3+3x^2+8x-12$ কে x^2-4 দ্বারা ভাগ কর।

[**দ্রষ্টব্য।** ভাজ্য এবং ভাজককে, উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষরের অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে না সাজাইয়া, ঊর্দ্ধক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলেও ভাগের ক্রিয়া সম্পন্ন করা যায়। কেবলমাত্র লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, উভয়কেই একইভাবে (হয় ঊর্দ্ধক্রমিক, না হয় অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে) সাজাইতে হইবে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, এই উদাহরণে, ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কেই x এর ঊর্দ্ধক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া ভাগ করা যাইতেছে।]

$$
\begin{array}{l|l|l}
-4+x^2 & -12+8x+3x^2-2x^3-4x^4+x^6 & 3-2x+x^4 \\
 & \underline{-12 \qquad\ +3x^2} & \\
 & \qquad 8x \qquad\quad -2x^3-4x^4+x^6 & \\
 & \qquad \underline{8x \qquad\quad -2x^3} & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad -4x^4+x^6 & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-4x^4+x^6} &
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= 3-2x+x^4.$

উদা. 4. $a^2b^2 + 2abc^2 - a^2c^2 - b^2c^2$ কে $ab + ac - bc$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্যকে a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে $(b^2 - c^2)a^2 + 2bc^2.a - b^2c^2$ এই ত্রিপদরাশিটি, এবং ভাজককেও ঐরূপে সাজাইলে $(b+c)a - bc$ এই দ্বিপদরাশিটি, পাওয়া যায়।

$$
\begin{array}{l|l|l}
(b+c)a - bc & (b^2 - c^2)a^2 + 2bc^2.a - b^2c^2 & (b-c)a + bc \\
 & \underline{(b^2 - c^2)a^2 - (b^2c - bc^2)a} & \\
 & \qquad (b^2c + bc^2)a - b^2c^2 & \\
 & \qquad \underline{(b^2c + bc^2)a - b^2c^2} &
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= ab - ac + bc$.

উদা. 5. $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc$ কে $a + b - c$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য এবং ভাজককে a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে, ভাজ্য ও ভাজক যথাক্রমে,

$a^3 + 3bc.a + (b^3 - c^3)$ এবং $a + (b - c)$ হয়। অতএব, ভাজ্য একটি ত্রিপদ-রাশি এবং ভাজক একটি দ্বিপদরাশি।

$$
\begin{array}{l|l|l}
a + (b-c) & a^3 \qquad\qquad + 3bc.a + (b^3 - c^3) & a^2 - (b-c)a + (b^2 + bc + c^2) \\
 & \underline{a^3 + (b-c)a^2} & \\
 & \quad -(b-c)a^2 + 3bc.a + (b^3 - c^3) & \\
 & \quad \underline{-(b-c)a^2 - (b-c)^2.a} & \\
 & \qquad (b^2 + bc + c^2)a + (b^3 - c^3) & \\
 & \qquad \underline{(b^2 + bc + c^2)a + (b^3 - c^3)} &
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc$.

উদা. 6. $(b-c)a^3 + (c-a)b^3 + (a-b)c^3$ কে $a^2 - ab - ac + bc$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য এবং ভাজককে a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে,

ভাজ্য $= (b-c)a^3 - b^3a + c^3a + b^3c - bc^3$

$= (b-c)a^3 - (b^3 - c^3)a + bc(b^2 - c^2)$, অতএব, একটি ত্রিপদরাশি;

এবং ভাজক $= a^2 - (b+c)a + bc$, অতএব একটি ত্রিপদরাশি।

$$
\begin{array}{l|l|l}
a^2 - (b+c)a + bc & (b-c)a^3 - (b^3 - c^3)a \; + bc(b^2 - c^2) & (b-c)a + (b^2 - c^2) \\
 & \underline{(b-c)a^3 - (b^2 - c^2)a^2 + bc(b-c)a} & \\
 & (b^2 - c^2)a^2 - (b^3 + b^2c - bc^2 - c^3)a + bc(b^2 - c^2) & \\
 & \underline{(b^2 - c^2)a^2 - (b^3 + b^2c - bc^2 - c^3)a + bc(b^2 - c^2)} &
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= ab - ac + b^2 - c^2$.

টীকা। লক্ষ্য করিবে যে, যে সকল রাশি a এর বিভিন্ন শক্তির সহগরূপে বন্ধনীর অন্তর্ভুক্ত হইয়াছে, তাহাদিগকেও b এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজান হইয়াছে। এইরূপ করিলে, প্রক্রিয়া সরল হয় এবং ভুল হওয়ার সম্ভাবনাও কম থাকে।

প্রশ্নমালা 32

ভাগ কর (Divide) :

1. $x^2 - 9x + 14$ কে $x - 7$ দ্বারা। 2. $3x^2 - 17x + 10$ কে $3x - 2$ দ্বারা।

3. $12x^2 - 8x - 32$ কে $4x - 8$ দ্বারা।

4. $55x^2 - 67x - 14$ কে $11x + 2$ দ্বারা।

5. $2a^2 - 7ab + 6b^2$ কে $a - 2b$ দ্বারা।

6. $x^4 + x^2y^2 + y^4$ কে $x^2 + xy + y^2$ দ্বারা।

7. $4x^2 - 9a^2$ কে $2x + 3a$ দ্বারা। 8. $x^3 + a^3$ কে $x + a$ দ্বারা।

9. $a^3 - a^2b - 7ab^2 + 3b^3$ কে $a - 3b$ দ্বারা।

10. $\frac{1}{2}x^3 + \frac{23}{10}x^2 + \frac{42}{5}x + 18$ কে $\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{5}x + 6$ দ্বারা।

11. $\frac{3}{2}x^3 - \frac{15}{8}x^2 + \frac{67}{48}x - \frac{5}{12}$ কে $\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{5}{12}$ দ্বারা।

12. $\frac{1}{6}a^3y^3 - \frac{5}{24}a^2y^2b + \frac{67}{432}ayb^2 - \frac{5}{108}b^3$ কে $\frac{a^2}{12}y^2 - \frac{ab}{16}y + \frac{5}{108}b^2$ দ্বারা।

13. $\frac{7}{2}a^3m^3 + \frac{161}{10}a^2m^2n + \frac{294}{5}amn^2 + 126n^3$ কে
$\frac{7}{2}a^2m^2 + \frac{28}{5}amn + 42n^2$ দ্বারা।

14. $\frac{4}{9}x^4 - x^2y^2 + \frac{8}{3}xy^3 - \frac{16}{9}y^4$ কে $\frac{2}{9}x^2 - \frac{xy}{3} + \frac{4}{9}y^2$ দ্বারা।

15. $\frac{1}{7}y^5 - \frac{3}{7}xy^4 + \frac{2}{21}x^2y^3 + \frac{5}{21}x^3y^2 - \frac{1}{3}x^4y + \frac{2}{21}x^5$ কে
$\frac{1}{21}y^2 - \frac{1}{7}xy + \frac{1}{21}x^2$ দ্বারা।

16. $\frac{13}{12}mn^3 + \frac{1}{6}m^2n^2 + \frac{m^4}{2} - \frac{1}{12}m^3n + \frac{1}{3}n^4$ কে $\frac{1}{6}mn + \frac{1}{8}m^2 + \frac{1}{24}n^2$ দ্বারা।

17. $\frac{2}{3}a^2y^3 + \frac{1}{4}y^5 + \frac{a^5}{12} - \frac{3}{4}a^3y^2 - \frac{1}{6}ay^4 - \frac{1}{12}a^4y$ কে
$\frac{1}{6}ay - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{12}a^2$ দ্বারা।

18. $x + y + z = -3a$ হইলে, $(2x - y - z)(2y - z - x)(2z - x - y)$ কে $a^2 + a(x + y) + xy$ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল নির্ণয় কর।

ভাগ কর (Divide) :

19. $\frac{1}{3}[(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3]$ কে $(x - y)(y - z)$ দ্বারা।

20. $x^6 - 2a^3x^3 + a^6$ কে $x^2 - 2ax + a^2$ দ্বারা।

21. $2x^3y^3 + y^6 + x^6$ কে $2xy + x^2 + y^2$ দ্বারা।

22. $x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$ কে $x+c$ দ্বারা।

23. $x^3 + (b-c-a)x^2 + (ca-ab-bc)x + abc$ কে $x^2 + (b-a)x - ab$ দ্বারা।

24. $a^3 + a^2b + a^2c - abc - b^2c - bc^2$ কে $a^2 - bc$ দ্বারা।

25. $a^2(b+c) - b^2(c+a) + c^2(a+b) + abc$ কে $a-b+c$ দ্বারা।

26. $a^2(b+c) + b^2(a-c) + c^2(a-b) + abc$ কে $a+b+c$ দ্বারা।

27. $x^3 - 2ax^2 + (a^2 - ab - b^2)x + a^2b + ab^2$ কে $x-a-b$ দ্বারা।

28. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ কে $a+b+c$ দ্বারা।

29. $x^3 + y^3 - 1 + 3xy$ কে $x+y-1$ দ্বারা।

30. $x^3 - 8y^3 - 27z^3 - 18xyz$ কে $x - 2y - 3z$ দ্বারা।

31. $x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz$ কে $x - y + z$ দ্বারা।

32. $8x^3 - 27y^3 - z^3 - 18xyz$ কে $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 3yz$ দ্বারা।

33. $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ কে $a-b$ দ্বারা।

34. $(x^2 - bx + cx)a - bc(x+a) + (x-b+c)x^2$ কে $(x+a)(x-b)$ দ্বারা।

35. $c(ab - x^2) + (a-b)(x-c)x + x(x^2 - ab)$ কে $(x-b)(x-c)$ দ্বারা।

36. $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ কে $ab + bc - ac - b^2$ দ্বারা।

37. $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$ কে
$a^2b - bc^2 - ac^2 + a^2c$ দ্বারা।

38. $xy^3 + 2y^3z - xy^2z + xyz^2 - x^3y - 2yz^3 + x^3z - xz^3$ কে
$y + z - x$ দ্বারা।

39. $b(x^3 + a^3) + ax(x^2 - a^2) + a^3(x+a)$ কে $(a+b)(x+a)$ দ্বারা।

40. $(a-b)^2c^2 + (a-b)c^3 - (c^2 - a^2)b^2 + (c-a)b^3$ কে
$(a-b)c^2 - (c-a)b^2$ দ্বারা।

[প্রদত্ত রাশিমালাকে c এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাও।]

41. $(ax+by)^3 + (ax-by)^3 - (ay-bx)^3 + (ay+bx)^3$ কে
$(a+b)^2x^2 - 3ab(x^2 - y^2)$ দ্বারা। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1888]

[ভাজ্য ও ভাজককে সরল করিয়া, উভয়কেই x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাও।]

42. $x(1+y^2)(1+z^2) + y(1+z^2)(1+x^2) + z(1+x^2)(1+y^2) + 4xyz$ কে
$1 + xy + yz + zx$ দ্বারা। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1878]

[প্রদত্ত রাশিমালাকে x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাও।]

43. $(4x^3 - 3a^2x)^2 + (4y^3 - 3a^2y)^2 - a^6$ কে $x^2 + y^2 - a^2$ দ্বারা।
[বোম্বাই প্রবেশিকা, 1884]

82. অসম্পূর্ণ ভাগ (Inexact Division) : যখন ভাজ্যটিকে ভাজক দ্বারা সম্পূর্ণরূপে ভাগ করা যায় না, অর্থাৎ, ভাগক্রিয়ার সর্ব্বশেষে এরূপ একটি অবশিষ্ট থাকিয়া যায়, যাহাকে ভাজক দ্বারা আর ভাগ করা চলে না, সেইপ্রকার ভাগ-কে **অসম্পূর্ণ ভাগ (Inexact Division)** বলে।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, 81 নিয়মের দ্বিতীয় উদাহরণের ভাজ্যটি যদি $16x^4+36x^2+6x+86$ হইত, তাহা হইলে দ্বিতীয় অবশিষ্টটি (অর্থাৎ বিয়োগফলটি) $36x^2+60x+86$, এবং সর্ব্বশেষ অবশিষ্টটি 0 না হইয়া $6x+5$ হইত। এখন, যেহেতু $6x+5$ কে $4x^2+6x+9$ দ্বারা ভাগ করা যায় না, এস্থলে ভাগের ক্রিয়া অসম্পূর্ণই রহিয়া যাইত, এবং পাটীগণিতের ন্যায় ভাগফলটিকে নিম্নলিখিতরূপে লিখিতে হইত। যথা,

$$\frac{16x^4+36x^2+6x+86}{4x^2+6x+9}=4x^2-6x+9+\frac{6x+5}{4x^2+6x+9}.$$

উপরিলিখিত অভেদটির ডা'নদিকের অংশটিকে **পূর্ণ ভাগফল** (complete quotient) বলে। ভাজ্যের যে সর্ব্বশেষ অংশটিকে ভাজক দ্বারা আর ভাগ করা যায় না, তাহাকে **ভাগশেষ** (remainder) বলে। অতএব, যদি D, d, Q এবং R যথাক্রমে ভাজ্য, ভাজক, ভাগফল এবং ভাগশেষ বুঝায়, তবে স্পষ্টতঃই

$$D=d\times Q+R.$$

83. 'সহগ-বিচ্ছিন্নকরণ' প্রক্রিয়া (Method of detached coefficients) : যদি ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই কোন একটি নির্দ্দিষ্ট অক্ষরবিশিষ্ট রাশি, অথবা উভয়ই একই অক্ষরসমূহের সমমাত্র রাশি হয়, তাহা হইলে উহাদের অন্তর্গত পদসমূহের সহগগুলিকে, অক্ষরসমূহ হইতে বিচ্ছিন্ন করিয়া এবং যথাস্থানে স্থাপন করিয়াই ভাগের ক্রিয়া সম্পন্ন করা যায় এবং এতদ্দ্বারা 'দীর্ঘ ভাগ'-সম্পন্নকরণ-জনিত কষ্টের লাঘব করা যায়।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি হইতে প্রক্রিয়া-প্রণালী স্পষ্টরূপে বুঝিতে পারা যাইবে।

উদা. 1. $6x^4+13x^3+39x^2+37x+45$ কে $3x^2+2x+9$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\begin{array}{r|l|l}
3+2+9 & 6+13+39+37+45 & 2+3+5 \\
 & \underline{6+\ \ 4+18\qquad\quad} & \\
 & \quad +\ 9+21+37 & \\
 & \quad \underline{+\ 9+\ \ 6+27} & \\
 & \qquad\quad 15+10+45 & \\
 & \qquad\quad \underline{15+10+45} &
\end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $=2x^2+3x+5$.

সাধারণ নিয়মানুসারে ঃ

$$
\begin{array}{r|l}
3x^2+2x+9 & 6x^4+13x^3+39x^2+37x+45 \;(\; 2x^2+3x+5 \\
 & \underline{6x^4+\;\;4x^3+18x^2} \\
 & 9x^3+21x^2+37x \\
 & \underline{9x^3+\;\;6x^2+27x} \\
 & 15x^2+10x+45 \\
 & \underline{15x^2+10x+45}
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= 2x^2+3x+5$.

উদা. 2. x^3-27 কে x^2+3x+9 দ্বারা ভাগ কর।

[**দ্রষ্টব্য।** যদি ভাজ্য কিংবা ভাজকে x এর কোন এক শক্তিবিশিষ্ট পদ বর্ত্তমান না থাকে, তবে উক্ত পদটির সহগ 'শূন্য' (zero) ধরিয়া উহাকে যথাস্থানে লিখিয়া লইতে হয়।]

$$
\begin{array}{r|l}
1+3+9 & 1+0+0-27 \;(\; 1-3 \\
 & \underline{1+3+9} \\
 & -3-9-27 \\
 & \underline{-3-9-27}
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $= x-3$.

প্রশ্নমালা 33

'সহগ-বিচ্ছিন্নকরণ' প্রণালী অনুসারে ভাগফল নির্ণয় কর (Apply the method of detached coefficient to find the quotient of) :

1. $2m^3-9m^2n+13mn^2-6n^3$ কে $2m-3n$ দ্বারা।

2. $a^4-3a^3b+3ab^3-b^4$ কে a^2-b^2 দ্বারা।

3. $2x^4-3x^3y-3xy^3-2y^4$ কে x^2+y^2 দ্বারা।

4. $2a^4-36a^2x^2-16ax^3$ কে $2a^2+8ax$ দ্বারা।

5. $3+2x+4x^2+5x^3-4x^4+2x^5$ কে $1+2x^2$ দ্বারা।

6. $x^4-4x^2+12x-9$ কে x^2+2x-3 দ্বারা।

7. $4a^4-9a^2b^2+24ab^3-16b^4$ কে $2a^2-3ab+4b^2$ দ্বারা।

8. $a^4+4a^2x^2+16x^4$ কে $a^2+2ax+4x^2$ দ্বারা।

9. a^4+4b^4 কে $a^2+2ab+2b^2$ দ্বারা।

10. $2x^5-7x^4-2x^3+18x^2-3x-8$ কে x^3-2x^2+1 দ্বারা।

11. x^4-81 কে $x-3$ দ্বারা। **12.** a^5-32 কে $a-2$ দ্বারা।

13. $3-9x+2x^2+5x^3-7x^4+2x^5$ কে $1-3x+x^2$ দ্বারা।

14. $82x^2+40-45x^3+18x^4-67x$ কে $6x^2+8-7x$ দ্বারা।

15. $64-x^6$ কে $2-x$ দ্বারা। 16. $1+x^6-2x^3$ কে x^2+1-2x দ্বারা।

17. $13ab^3+2a^2b^2+6a^4-a^3b+4b^4$ কে $4ab+b^2+3a^2$ দ্বারা।

18. $a^3b-15b^4-8a^2b^2+a^4+19ab^3$ কে a^2+3b^2-2ab দ্বারা।

19. x^6-a^6 কে $x^3-2x^2a+2xa^2-a^3$ দ্বারা।

20. $8a^2b^3+3b^5+a^5-9a^3b^2-2ab^4-a^4b$ কে $2ab-3b^2+a^2$ দ্বারা।

21. $y^6+x^6-2x^3y^3$ কে x^2+y^2-2xy দ্বারা।

পূর্ণ ভাগফল নির্ণয় কর (Find the complete quotient of) :

22. $\dfrac{x^2+11x+35}{x+5}$. 23. $\dfrac{x^3+\frac{1}{27}y^3}{x-\frac{1}{3}y}$.

24. x^3+px^2+qx+r কে x^2+px+q দ্বারা ভাগ করা হইলে, ভাগশেষ কত হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

25. ভাগফলে চারিটি পদ পর্য্যন্ত রাখিয়া $1+2x+4x^2$ কে $3-x$ দ্বারা ভাগ কর।

84. কতিপয় আবশ্যকীয় ফল (A few important results) :

শিক্ষার্থিগণের অবশ্যই জানা আছে যে, $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

এবং $x^3-a^3=(x-a)(x^2+xa+a^2)$. [79 নিয়মের উদা. 3.]

অতএব, x^4-a^4 [যাহা $=x^3(x-a)+a(x^3-a^3)$]

$$=(x-a)\{x^3+a(x^2+xa+a^2)\}$$
$$=(x-a)(x^3+x^2a+xa^2+a^3).$$

তদ্রূপ, x^5-a^5 [যাহা $=x^4(x-a)+a(x^4-a^4)$]

$$=(x-a)\{x^4+a(x^3+x^2a+xa^2+a^3)\}$$
$$=(x-a)(x^4+x^3a+x^2a^2+xa^3+a^4).$$

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, x^6-a^6, x^7-a^7, x^8-a^8 প্রভৃতি রাশিসমূহের প্রত্যেকটিরই একটি উৎপাদক (factor) $x-a$; অতএব, সাধারণভাবে বলা যায় যে, n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (positive integer) হইলে, x^n-a^n এর একটি উৎপাদক $x-a$ হইবে।

অতএব, সিদ্ধান্ত করা যায় যে, n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, x^n-a^n, $x-a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য (exactly divisible).

আবার, যেহেতু $x^n + a^n = (x^n - a^n) + 2a^n$, এবং $x^n - a^n$, $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য, কিন্তু $2a^n$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করা যায় না; অতএব, দেখা যায় যে, $x^n + a^n$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করা যায় না।

সুতরাং, n একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$x^n - a^n$ সকল ক্ষেত্রেই $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য ;
কিন্তু, $x^n + a^n$ কোন ক্ষেত্রেই $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য নহে। } … (ক)

অনুসি. 1. n কেবলমাত্র অখণ্ড যুগ্ম ধনসংখ্যা (even integer) হইলে, $x^n - a^n$, $x + a$ দ্বারা বিভাজ্য। কারণ,

n অখণ্ড যুগ্ম ধনসংখ্যা হইলে, $(-a)^n = a^n$; † সুতরাং, $x^n - a^n = x^n - (-a)^n$;
n অখণ্ড অযুগ্ম ধনসংখ্যা হইলে, $(-a)^n = -a^n$; † সুতরাং, $x^n - a^n = x^n + (-a)^n$
অধিকন্তু, $x + a = x - (-a)$.

এখন, (ক) হইতে দেখা যায় যে, $x - (-a)$ দ্বারা $x^n - (-a)^n$ বিভাজ্য, কিন্তু $x^n + (-a)^n$ বিভাজ্য নয়। সুতরাং, n অখণ্ড যুগ্ম ধনসংখ্যা হইলেই, $x^n - a^n$ কে $x + a$ দ্বারা ভাগ করা যায়, কিন্তু n অযুগ্ম হইলে ঐরূপ ভাগ করা যায় না।

অনুসি. 2. n একটি অখণ্ড অযুগ্ম ধনসংখ্যা হইলে, $x + a$ দ্বারা $x^n + a^n$ কে সম্পূর্ণরূপে ভাগ করা যায়। কারণ,

n অযুগ্ম হইলে, $(-a)^n = -a^n$; সুতরাং, $x^n + a^n = x^n - (-a)^n$;
n যুগ্ম হইলে, $(-a)^n = a^n$; সুতরাং, $x^n + a^n = x^n + (-a)^n$;
অধিকন্তু, $x + a = x - (-a)$.

এখন, (ক) হইতে দেখা যায় যে, $x - (-a)$ দ্বারা $x^n - (-a)^n$ বিভাজ্য, কিন্তু $x^n + (-a)^n$ বিভাজ্য নয়।

অতএব, n অযুগ্ম হইলেই, $x^n + a^n$, $x + a$ দ্বারা বিভাজ্য, কিন্তু n যুগ্ম হইলে, $x^n + a^n$ কে $x + a$ দ্বারা ভাগ করা যায় না।

---

† গুণনের চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়মের বার বার প্রয়োগ দ্বারা এইরূপ ফল পাওয়া যায়; যথা, $(-a)^2 = a^2$; সুতরাং, $(-a)^3 = (-a) \times (-a)^2 = (-a) \times a^2 = -a^3$; $(-a)^4 = (-a) \times (-a)^3 = (-a) \times (-a^3) = a^4$; $(-a)^5 = (-a) \times (-a)^4 = (-a) \times a^4 = -a^5$; ইত্যাদি। অর্থাৎ, − এর বিভিন্ন শক্তির সূচকগুলি প্রত্যেকে যুগ্ম সংখ্যা হইলে, শক্তিগুলি প্রত্যেকেই ধনাত্মক এবং সূচকগুলি অযুগ্ম সংখ্যা হইলে, শক্তিগুলি ঋণাত্মক হইবে।

অতএব, নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় :

$x-a$ দ্বারা x^n-a^n সকল ক্ষেত্রেই বিভাজ্য ;
কিন্তু, x^n+a^n কোন ক্ষেত্রেই বিভাজ্য নয়।

$x+a$ দ্বারা x^n-a^n বিভাজ্য, যখন n একটি অখণ্ড যুগ্ম ধনসংখ্যা ;
এবং x^n+a^n বিভাজ্য, যখন n একটি অখণ্ড অযুগ্ম ধনসংখ্যা।

প্রশ্নমালা 34

প্রকৃত ভাগ করিয়া দেখাও যে, নিম্নলিখিত রাশিসমূহ $x+a$ দ্বারা বিভাজ্য (Verify by actual division that the following expressions are divisible by $x+a$) :

1. x^3+a^3. 2. x^4-a^4. 3. x^5+a^5.
4. x^6-a^6. 5. x^7+a^7. 6. x^8-a^8.

প্রকৃত ভাগ করিয়া দেখাও যে, নিম্নলিখিত রাশিসমূহ $x+a$ দ্বারা বিভাজ্য নহে (Verify by actual division that the following expressions are not divisible by $x+a$) :

7. x^3-a^3. 8. x^4+a^4. 9. x^5-a^5.
10. x^6+a^6. 11. x^7-a^7. 12. x^8+a^8.

ভাগফল লিখ (Write down the quotient of) :

13. x^4-1 কে $x-1$ দ্বারা। 14. x^4-y^4 কে $x+y$ দ্বারা।
15. x^5-1 কে $x-1$ দ্বারা। 16. x^5+y^5 কে $x+y$ দ্বারা।
17. x^6-1 কে $x-1$ দ্বারা। 18. x^6-y^6 কে $x+y$ দ্বারা।
19. x^7-1 কে $x-1$ দ্বারা। 20. x^7+y^7 কে $x+y$ দ্বারা।

দশম অধ্যায়

সূত্রাবলী ও তাহাদের প্রয়োগ

(Formulæ and their applications)

85. তোমরা পূর্ব্ব শ্রেণীতে কয়েকটি বীজগণিতীয় সূত্র ও উহাদের ব্যবহার-প্রণালী শিখিয়াছ। বর্ত্তমানে আরও কয়েকটি সূত্র ও উহাদিগকে কিরূপে ব্যবহার করিতে হয়, তাহা দেখান যাইতেছে।

86. **সূত্র :** $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

অথবা, $= a^3+b^3+3ab(a+b)$.

$$[\ (a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$$
$$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\ ;$$

আবার, এই শেষোক্ত রাশি $= a^3+3ab(a+b)+b^3$

$$= a^3+b^3+3ab(a+b).\ ]$$

অনুসি. 1. $a^3+b^3 = \{a^3+b^3+3ab(a+b)\}-3ab(a+b)$

$$= (a+b)^3-3ab(a+b).$$

অনুসি. 2. প্রথম অনুসিদ্ধান্ত হইতে,

$$a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$= (a+b)[(a+b)^2-3ab]$$
$$= (a+b)[(a^2+2ab+b^2)-3ab]$$
$$= (a+b)[a^2+2ab+b^2-3ab]$$
$$= (a+b)(a^2-ab+b^2).$$

টীকা 1. যেহেতু $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$,

অতএব, a^3+b^3 এর আকারে প্রকাশ করা যায় এরূপ যে কোন রাশিকে সর্ব্বদা উপরিউক্তরূপ দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করা যায়।

টীকা 2. দুইটি রাশিকে যদি $a+b$ এবং a^2-ab+b^2 এর আকারে প্রকাশ করা যায়, তাহা হইলে উহাদের গুণফল হইবে a^3+b^3,

অর্থাৎ, $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$.

উদা. 1. $3a+5b$ এর ঘন (cube) নির্ণয় কর।

$$(3a+5b)^3=(3a)^3+3(3a)^2(5b)+3(3a)(5b)^2+(5b)^3$$
$$=27a^3+3(9a^2)(5b)+3(3a)(25b^2)+125b^3$$
$$=27a^3+135a^2b+225ab^2+125b^3.$$

উদা. 2. সরল কর :

$$(x-y)^3+(x+y)^3+3(x-y)^2(x+y)+3(x+y)^2(x-y).$$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

'$x-y$' এর পরিবর্ত্তে a এবং '$x+y$' এর পরিবর্ত্তে b লিখিলে,

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=a^3+b^3+3a^2b+3b^2a$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$=(a+b)^3=\{(x-y)+(x+y)\}^3$$
$$=(2x)^3=8x^3.$$

উদা. 3. $a+b=5$ এবং $ab=6$ হইলে, a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর।

এখন, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$$=5^3-3\times6\times5=125-90=35.$$

উদা. 4. $x+\frac{1}{x}=p$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=p^3-3p.$

যেহেতু $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,

$$\therefore \quad x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

অতএব, নির্ণেয় মান $=p^3-3p.$

উদা. 5. $p+q+r$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(p+q+r)^3=\{(p+q)+r\}^3$$
$$=(p+q)^3+3(p+q)^2r+3(p+q)r^2+r^3$$
$$=(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)+3(p^2+2pq+q^2)r$$
$$+3(p+q)r^2+r^3$$
$$=p^3+q^3+r^3+3p^2q+3pq^2+3p^2r+3pr^2+3q^2r$$
$$+3qr^2+6pqr.$$

উদা. 6. $x=5$ এবং $y=-2$ হইলে, $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = x^3+3x^2(3y)+3x(3y)^2+(3y)^3$$
$$=(x+3y)^3=(5-6)^3=(-1)^3=-1.$$

উদা. 7. x^4-x^2+1 কে x^2+1 দ্বারা গুণ কর।

x^2 এর পরিবর্তে a, এবং 1 এর পরিবর্তে b লিখিলে,

$$x^4-x^2+1=(x^2)^2-x^2.1+1^2$$
$$=a^2-ab+b^2.$$

অতএব, $(x^2+1)(x^4-x^2+1)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$=a^3+b^3$$
$$=(x^2)^3+1^3$$
$$=x^6+1.$$

উদা. 8. $9x^2-12x+16$ কে $3x+4$ দ্বারা গুণ কর।

$3x$ এর পরিবর্তে a, এবং 4 এর পরিবর্তে b লিখিলে,

$$9x^2-12x+16=(3x)^2-(3x).4+4^2$$
$$=a^2-ab+b^2.$$

সুতরাং, $(3x+4)(9x^2-12x+16)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$=a^3+b^3=(3x)^3+4^3$$
$$=27x^3+64.$$

উদা. 9. $16a^2-20ab+25b^2$ কে $4a+5b$ দ্বারা গুণ কর।

$4a$ এর পরিবর্তে x, এবং $5b$ এর পরিবর্তে y লিখিলে,

$$16a^2-20ab+25b^2=(4a)^2-(4a)(5b)+(5b)^2$$
$$=x^2-xy+y^2.$$

সুতরাং, $(4a+5b)(16a^2-20ab+25b^2)$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$$
$$=(4a)^3+(5b)^3=64a^3+125b^3.$$

উদা. 10. $a^3b^3+8c^3$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$a^3b^3+8c^3=(ab)^3+(2c)^3$$
$$=(ab+2c)\{(ab)^2-(ab)(2c)+(2c)^2\}$$
$$=(ab+2c)(a^2b^2-2abc+4c^2).$$

প্রশ্নমালা 35

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন নির্ণয় কর (Find the cube of) :

1. $x+3$. 2. $2x+1$. 3. $3a+b$. 4. $4x+3y$.
5. x^2+2y. 6. $xy+yz$. 7. a^2b+c^2d. 8. $a+b+2c$.
9. $2x+3y+z$. 10. x^3+y^3.

সরল কর (Simplify) :

11. $(3m+5n)^3+3(3m+5n)^2(2m-5n)$
$+3(3m+5n)(2m-5n)^2+(2m-5n)^3$.
12. $(3x-8y)^3+(9y-2x)^3+3(x+y)(3x-8y)(9y-2x)$.
13. $(3a-7b)^3+(10b-3a)^3+9b(3a-7b)(10b-3a)$.
14. $(5x-2)^3+(3-4x)^3+3(x+1)(5x-2)(3-4x)$.
15. $(3-7x)^3+(8x-1)^3+3(8x-1)(3-7x)(x+2)$.
16. $(a-b+c)^3+(a+b-c)^3+6a\{a^2-(b-c)^2\}$.

a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

17. যখন $a+b=6$ এবং $ab=7$.
18. যখন $a+b=7$ এবং $ab=8$.
19. $a+\frac{1}{a}=3$ হইলে, দেখাও যে, $a^3+\left(\frac{1}{a}\right)^3=18$.
20. $z+\frac{1}{z}=4$ হইলে, $z^3+\left(\frac{1}{z}\right)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

21. $x^3+6x^2+12x+8$, যখন $x=-2$.
22. $x^3+12x^2+48x+64$, যখন $x=-5$.
23. $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$, যখন $a=-3$ এবং $b=2$.
24. $x^3+18x^2+108x+351$, যখন $x=-11$.
25. $x+y=5$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+y^3+15xy=125$.
26. $a^2+b^2=c^2$ হইলে, দেখাও যে, $a^6+b^6+3a^2b^2c^2=c^6$.
27. $p+q=2$ হইলে, দেখাও যে, $p^3+q^3+6pq=8$.

গুণ কর (Multiply) :

28. x^2-x+1 কে $x+1$ দ্বারা। 29. $1-2x+4x^2$ কে $1+2x$ দ্বারা।
30. $25p^2-5p+1$ কে $5p+1$ দ্বারা।

31. $49a^2 - 28ab + 16b^2$ কে $7a + 4b$ দ্বারা।

32. $64x^2 - 24xy + 9y^2$ কে $8x + 3y$ দ্বারা।

33. $a^2b^2 - 4abc + 16c^2$ কে $ab + 4c$ দ্বারা।

34. $a^2x^2 - 5abx + 25b^2$ কে $ax + 5b$ দ্বারা।

35. $25a^2 - 45ab + 81b^2$ কে $5a + 9b$ দ্বারা।

উৎপাদক নির্ণয় কর (Find out the factors) :

36. $a^3 + 1$.
37. $x^3 + 8$.
38. $8x^3 + 1$.
39. $27a^3 + 8$.
40. $8m^3 + 64$.
41. $64p^3 + 125$.
42. $8x^3 + 216y^3$.
43. $27a^3 + 343y^3$.
44. $216a^3x^3 + y^3$.
45. $27a^3b^3 + 64x^3y^3$.
46. $729a^3b^3c^3 + 1000x^3y^3z^3$.
47. $1331a^3b^6x^9 + 729c^3y^6z^9$.

87. **সূত্র ঃ** $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

অথবা, $= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.

$$[\,(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$$
$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

এবং শেষোক্ত রাশি $= a^3 - 3ab(a-b) - b^3$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b).\,]$$

অনুসি. 1. $a^3 - b^3 = \{a^3 - b^3 - 3ab(a-b)\} + 3ab(a-b)$

$$= (a-b)^3 + 3ab(a-b).$$

অনুসি. 2. প্রথম অনুসিদ্ধান্ত হইতে,

যেহেতু, $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) = (a-b)(a-b)^2 + 3ab(a-b)$

$$= (a-b)\{(a-b)^2 + 3ab\}$$
$$= (a-b)\{(a^2 - 2ab + b^2) + 3ab\}$$
$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$
$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

বিপরীতক্রমে, $a^2 + ab + b^2$ কে $a - b$ দ্বারা গুণ করিলে $a^3 - b^3$ হয়।

অর্থাৎ, $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

টীকা। অনুসিদ্ধান্ত 2 হইতে দেখা যায় যে, দুইটি রাশিকে যদি $a-b$ এবং a^2+ab+b^2 এর আকারে প্রকাশ করা যায়, তাহা হইলে উহাদের গুণফল হইবে a^3-b^3, অর্থাৎ, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

বিপরীতভাবে বলিলে, দুইটি রাশিকে যদি a^3-b^3 এর আকারে প্রকাশ করা যায়, তাহা হইলে উহাকে সর্ব্বদা $a-b$ এবং a^2+ab+b^2 এই দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

অর্থাৎ, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

উদা. 1. $3x-4y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(3x-4y)^3&=(3x)^3-3(3x)^2(4y)+3(3x)(4y)^2-(4y)^3\\&=27x^3-3(9x^2)(4y)+3(3x)(16y^2)-64y^3\\&=27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3.\end{aligned}$$

উদা. 2. $a-b-c$ এর ঘন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}(a-b-c)^3&=\{(a-b)-c\}^3\\&=(a-b)^3-3(a-b)^2c+3(a-b)c^2-c^3\\&=(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)-3(a^2-2ab+b^2)c\\&\qquad+3(a-b)c^2-c^3\\&=a^3-b^3-c^3-3a^2b+3ab^2-3a^2c+3ac^2\\&\qquad-3b^2c-3bc^2+6abc.\end{aligned}$$

উদা. 3. $x=2\frac{1}{3}$ হইলে, $27x^3-54x^2+36x-64$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি}&=(3x)^3-3(9x^2).2+3(3x).4-8-56\\&=(3x-2)^3-56.\end{aligned}$$

অতএব, নির্ণেয় মান $=(7-2)^3-56=125-56=69$.

উদা. 4. $4a^2b^4+2ab^2+1$ কে $2ab^2-1$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{aligned}&(2ab^2-1)(4a^2b^4+2ab^2+1)\\&=(2ab^2-1)\{(2ab^2)^2+(2ab^2).1+1^2\}\\&=(2ab^2)^3-1^3=8a^3b^6-1.\end{aligned}$$

উদা. 5. $64x^6-a^3y^6$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}64x^6-a^3y^6&=(4x^2)^3-(ay^2)^3\\&=(4x^2-ay^2)\{(4x^2)^2+(4x^2)(ay^2)+(ay^2)^2\}\\&=(4x^2-ay^2)(16x^4+4ax^2y^2+a^2y^4).\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 36

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন নির্ণয় কর (Find the cube of) :

1. $x-2$. 2. $2x-1$. 3. $2-3a$. 4. $3-4a$.
5. $2a-3b$. 6. $5m-4n$. 7. $2x-5y$. 8. $2a-b-c$.
9. $2x-3y-z$. 10. $p^2-q^2-r^2$.

সরল কর (Simplify) :

11. $(a+2b)^3-3(a+2b)^2(a-2b)+3(a+2b)(a-2b)^2-(a-2b)^3$.
12. $(3x-8y)^3-(2x-7y)^3-3(3x-8y)(2x-7y)(x-y)$.
13. $(5x-8)^3-(3x-8)^3-6x(5x-8)(3x-8)$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

14. $m^3-12m^2n+48mn^2-64n^3$, যখন $m=12$ এবং $n=3$.
15. $27a^3-135a^2+225a-125$, যখন $a=4$.
16. $8-9a+27a^2-27a^3$, যখন $a=3$.
17. $216-144x+108x^2-27x^3$, যখন $x=3$.
18. $a-\frac{1}{a}=3$ হইলে, $a^3-\left(\frac{1}{a}\right)^3$ এর মান নির্ণয় কর।
19. $c-\frac{1}{c}=5$ হইলে, $c^3-\left(\frac{1}{c}\right)^3$ এর মান নির্ণয় কর।
20. $x-y=3$ হইলে, দেখাও যে, $x^3-y^3-9xy=27$.
21. $p-2q=4$ হইলে, দেখাও যে, $p^3-8q^3-24pq=64$.
22. $2a-3b=5$ হইলে, দেখাও যে, $8a^3-27b^3-90ab=125$.

গুণ কর (Multiply) :

23. $1+2x+4x^2$ কে $1-2x$ দ্বারা। 24. x^2+3x+9 কে $x-3$ দ্বারা।
25. $16a^2+4a+1$ কে $4a-1$ দ্বারা।
26. $x^4+2x^2yz+4y^2z^2$ কে x^2-2yz দ্বারা।
27. $9m^2+6mnq+4n^2q^2$ কে $3m-2nq$ দ্বারা।

উৎপাদক নির্ণয় কর (Find out the factors) :

28. $125a^3-1$. 29. $343x^3-8y^6$. 30. $216k^3-125l^3$.
31. $1-512k^3$. 32. $729m^3-64a^3n^6$.

পূর্ব্ব সূত্রাবলীর প্রয়োগ
(Application of previous formulæ)

88. প্রয়োগের সুবিধার জন্য, পূর্ব্বে বর্ণিত সূত্রাবলী নিম্নে পুনরায় সন্নিবেশিত করা হইল। বীজগণিতের অনেক প্রক্রিয়াই সরল ও নিপুণভাবে সম্পন্ন করিতে হইলে, এই সূত্রসমূহের সম্যক্ ধারণা থাকা একান্ত আবশ্যক। অতএব, বার বার দেখিয়া লইয়া উহাদের প্রয়োগ করা অপেক্ষা উহাদিগকে মুখস্থ করিয়া রাখাই কর্ত্তব্য।

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

(ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

(iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

(iv) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

(v) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.

(vi) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$.

(vii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$.

(viii) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$.

(ix) $(x-a)(x+b) = x^2 + (b-a)x - ab$.

(x) $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$.

89. **সূত্রাবলীর প্রয়োগ :**

উদা. 1. 999×999 এবং 9988×10012 এর গুণফল নির্ণয় কর।

এখন, $999 \times 999 = 999^2 = (1000-1)^2$

$= 1000^2 - 2 \times 1000 \times 1 + 1^2$ ··· [সূত্র (ii)]

$= 1000000 - 2000 + 1 = 998001$.

আবার, $9988 \times 10012 = 10012 \times 9988$

$= (10000+12)(10000-12)$

$= 10000^2 - 12^2$ ··· ··· [সূত্র (iii)]

$= 100000000 - 144$

$= 99999856$.

উদা. 2. $2931^3 + 1069^3 + 12000 \times 2931 \times 1069$ এর মান নির্ণয় কর।

a কে 2931 এবং b কে 1069 ধরিয়া,

প্রদত্ত রাশিমালা $= a^3 + b^3 + 12000ab$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

[যেহেতু $a + b = 2931 + 1069 = 4000$.]

$= (a+b)^3$ ... ... [সূত্র (iv)]

$= (4000)^3$

$= 4000 \times 4000 \times 4000$

$= 64000000000.$

টীকা। অধিকন্তু, পঞ্চম অধ্যায়ের উদাহরণগুলি দেখ।

90. কোন একটি রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করা (to express an algebraic quantity as the difference of two squares) :

যেহেতু $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

এবং $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$,

সুতরাং, (প্রথম অভেদ হইতে দ্বিতীয়টিকে বিয়োগ করিয়া)

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 ;$$

$$\text{অথবা, } ab = \tfrac{1}{4}(a+b)^2 - \tfrac{1}{4}(a-b)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

অতএব, দুইটি রাশির গুণফল = (রাশিদ্বয়ের সমষ্টির অর্দ্ধ)^2

− (রাশিদ্বয়ের অন্তরফলের অর্দ্ধ)^2 ।

উদা. 1. $(x+y+2z)(x+y)$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$$(x+y+2z)(x+y) = \left\{\frac{(x+y+2z)+(x+y)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(x+y+2z)-(x+y)}{2}\right\}^2$$

$$= \left[\frac{2x+2y+2z}{2}\right]^2 - \left[\frac{x+y+2z-x-y}{2}\right]^2$$

$$= (x+y+z)^2 - z^2.$$

উদা. 2. $(x+1)(2x+3)(x+5)$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $= \{(x+1)(2x+3)\}(x+5) = (2x^2+5x+3)(x+5)$

$$= \left\{\frac{(2x^2+5x+3)+(x+5)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(2x^2+5x+3)-(x+5)}{2}\right\}^2$$

$$= (x^2+3x+4)^2 - (x^2+2x-1)^2.$$

উদা. 3. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = \{(x+a)(x+4a)\}\{(x+2a)(x+3a)\}$$
$$= (x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)$$
$$= \left\{\frac{(x^2+5ax+4a^2)+(x^2+5ax+6a^2)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(x^2+5ax+6a^2)-(x^2+5ax+4a^2)}{2}\right\}^2$$
$$= (x^2+5ax+5a^2)^2-(a^2)^2.$$

উদা. 4. $(x+2a)(x+4a)(x+6a)(x+8a)+7a^4$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = \{(x+2a)(x+8a)\}\{(x+4a)(x+6a)\}+7a^4$$
$$= (x^2+10ax+16a^2)(x^2+10ax+24a^2)+7a^4$$
$$= \left\{\frac{(x^2+10ax+16a^2)+(x^2+10ax+24a^2)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(x^2+10ax+24a^2)-(x^2+10ax+16a^2)}{2}\right\}^2+7a^4$$
$$= (x^2+10ax+20a^2)^2-(4a^2)^2+7a^4$$
$$= (x^2+10ax+20a^2)^2-16a^4+7a^4$$
$$= (x^2+10ax+20a^2)^2-(3a^2)^2.$$

প্রশ্নমালা 37

[88 নিয়মের সূত্রাবলীর সাহায্যে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির সমাধান করিতে হইবে।]

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর (Find the square of) :

1. $5x+9y$. 2. $16a-13b$. 3. $x+100$. 4. $y+500$.
5. $a+999$. 6. $y+10001$. 7. 988. 8. 1012.
9. 100·5. 10. 99·6.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন নির্ণয় কর (Find the cube of) :

11. $2x+5$. 12. 105. 13. 99·5. 14. 800·6.

15. দেখাও যে, $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$.

ইহা হইতে a^2+b^2 এর মান নির্ণয় কর, যখন,

(i) $a=5004,\quad b=4996$; (ii) $a=1012,\quad b=988$.

16. দেখাও যে, $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

ইহা হইতে নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :

(i) $4(x+2y)(2x+y)$; (ii) $(6x+10y)(4x+6y)$;

(iii) $(x+98)(x+102)$; (iv) 505×495 ;

(v) $(2x+100{\cdot}4)(2x+99{\cdot}6)$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণফল নির্ণয় কর (Find the product of) :

17. $(a+x)(a-x)(a^2+x^2)$. **18.** $(2a+3)(2a-3)(4a^2+9)$.

19. $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

20. $98\times 102\times 10004$. **21.** $96\times 104\times 10016$.

22. $(2a+x)(4a^2+4ax+x^2)$.

23. $(a-2)(a+2)(a^2+4a+4)(a^2-4a+4)$.

24. $(x+4)(x^2-4x+16)$. **25.** $(2y-3)(4y^2+6y+9)$.

26. $(x+2)(x^2+2x+4)(x-2)(x^2-2x+4)$.

27. $(2x+105)(2x+15)$. **28.** $(6x-25)(6x+43)$.

29. $(6x-25)(6x-43)$.

সরল কর (Simplify) :

30. $(2a+x+y)^2+2(2a+x+y)(8a-x-y)+(8a-x-y)^2$.

31. $(17a+20x+19y)^2-2(19x+18y+17a)(20x+19y+17a)$
$+(19x+18y+17a)^2$.

32. $(16a+x+y)^3+(4a-x-y)^3+3(16a+x+y)^2(4a-x-y)$
$+3(16a+x+y)(4a-x-y)^2$.

33. $(121a+x+y)^3-(116a+x+y)^3-15a(121a+x+y)(116a+x+y)$.

34. $(5a-8x)^3+(6a+8x)^3+33a(5a-8x)(6a+8x)$.

35. $(2x+3y-16z)^3+3(3x-3y+16z)^2(2x+3y-16z)$
$+(3x-3y+16z)^3+3(3x-3y+16z)(2x+3y-16z)^2-120x^3$.

উৎপাদক নির্ণয় কর (Find out the factors) :

36. x^2+5x+6. **37.** $5y^2+65y+200$.

38. a^4+4b^4. **39.** $(x+y)^2+15(x+y)+36$.

40. $(5a+8b+2)^2-(4a+6)^2$.

41. $8x^3+125y^3$.

42. $(8a+13x)^3-64$.

43. $(15a+3b)^2-4$.

44. $5x^3-5x^2y-30xy^2$.

মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

45. $(16a+2b)^2-2(13a+2b)(16a+2b)+(13a+2b)^2$,
যখন $a=5$ এবং $b=7891$.

46. $(91x+5y)^3-3(91x+5y)^2(87x+5y)+3(91x+5y)(87x+5y)^2$
$-(87x+5y)^3$, যখন $x=2$ এবং $y=83$.

47. $(589963)^2-2\times589963\times589863+(589863)^2$.

48. $90\cdot002\times89\cdot998$.

49. 9238^2-9233^2.

50. $49856\times49856\times49856-3\times49856\times49855-49855$
$\times49855\times49855$.

51. $(x+2)(2x+1)(5x+2)-3x^4$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

52. দেখাও যে, $(ax+b)(bx+a)\{abx^2-(a^2+b^2)x+ab\}$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করা যায়।

53. $(5x+1)(2x+5)(3x+5)(4x+3)$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

54. $(7x+3a)(7x+5a)(7x+9a)(7x+11a)+61a^4$ কে দুইটি বর্গের সমষ্টি-রূপে প্রকাশ কর।

একাদশ অধ্যায়

সহজ উৎপাদক

(Simple Factors)

91. সংজ্ঞা : পূর্ব্বেই বলা হইয়াছে যে, কোন এক রাশি, দুই বা তদধিক রাশির গুণফল হইলে শেষোক্ত রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে পূর্ব্বোক্ত রাশিটির **উৎপাদক** বা **গুণনীয়ক** (factor) বলে।

'কোন রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা (to resolve an expression into factors)' এর অর্থ 'যে যে রাশির পরস্পর গুণন দ্বারা উপরিউক্ত রাশিটি উৎপন্ন হইয়াছে, সেই রাশিসমূহ নির্ণয় করা'।

[উৎপাদক-বিশ্লেষণের কতিপয় সহজ প্রণালী প্রসঙ্গক্রমে পূর্ব্বে বর্ণিত হইয়াছে। এস্থলে, সেইগুলি একেবারে উপেক্ষিত হইবে না, কারণ, এই অধ্যায়ে উৎপাদক-বিশ্লেষণের নিয়মাবলীই অধিকতর শৃঙ্খলার সহিত আলোচিত হইবে।]

টীকা। এই অধ্যায়ে, 'বীজগণিতীয় রাশিমালা (algebraical expression)' অর্থে '**মূলদ** (rational) এবং **পূর্ণ** বা **অখণ্ড** (integral) বীজগণিতীয় রাশিমালা' বুঝাইবে ; অর্থাৎ যে রাশিমালার কোন পদে মূলনির্ণয়সূচক মূল-চিহ্ন (radical sign) বা যাহার কোন পদের হরে (denominator এ) কোন অক্ষর (letter) বর্ত্তমান নাই, সেইরূপ রাশিমালা বুঝাইবে ; আবার, রাশিমালার 'উৎপাদক' অর্থেও 'মূলদ ও পূর্ণ উৎপাদক'ই সূচিত হইবে।

92. সহজ বিশ্লেষণ : যে রাশিমালার প্রত্যেক পদে কোন একটি উৎপাদক সাধারণ (common) থাকে, তাহাকে পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই, একটি সরল (simple) ও একটি মিশ্র (compound), এইরূপ দুইটি উৎপাদকে অবিলম্বে বিশ্লেষণ করা যায়। যথা,

(1) $a^2x + ax^2 = ax.a + ax.x = ax(a + x)$;

তদ্রূপ, (2) $2a^3b^2 - 3a^2b^3 = a^2b^2(2a - 3b)$;

এবং (3) $24x^4a^3 - 40x^3a^4 + 56x^2a^5 = 8x^2a^3(3x^2 - 5xa + 7a^2)$.

প্রশ্নমালা 38

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

1. $ab + ac$.

2. $a^2b^3 + a^3b^2$.

3. $x^3y^4 - 2x^4y^3$.

4. $2x^2yz + 4xy^2z - 6xyz^2$.

5. $4a^5b - 6a^4b^2 - 8a^3b^3$.

6. $ax^2y - 5a^2x^3y^2 + 3ax^3$.

7. $3x^4y^3z^2 - 12x^2y^4z^3 + 21x^3y^2z^4$. 8. $28a^8b^5 - 42a^5b^8$.

9. $72x^{10}y^8 + 108x^8y^{10}$. 10. $39a^5b^7c^7 - 65b^5c^7a^7 - 91c^5a^7b^7$.

93. $a^2 - b^2$ এর আকারে প্রকাশিত রাশিমালা : $a^2 - b^2$ এর আকারে প্রকাশিত রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার প্রণালী 61 নিয়মের টীকায় বর্ণিত হইয়াছে। শিক্ষার্থীদের অভ্যাসার্থ আরও কতিপয় প্রশ্ন নিম্নে সংযোজিত হইল।

প্রশ্নমালা 39

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

1. $9a^2 - 16b^2$. 2. $4a^3 - 25ax^2$. 3. $36x^4 - 1$.

4. $16x^4 - 1$. 5. $16x^5 - 9x$. 6. $16x^5 - 81x$.

7. $1 - 16a^4$. 8. $x^2 - 81x^6$. 9. $36 - x^4a^2$.

10. $64a^4 - 49x^6$. 11. $121 - m^6$. 12. $49x^6a^{10} - 81$.

13. $a^2b^2 - 25c^2d^2$. 14. $81x^{12} - 64a^{10}$. 15. $p^2q^4 - 100p^2$.

16. $144x^7 - 25x^3a^4$. 17. $192a^9 - 243a^5x^4$.

18. $98a^3x^5 - 128ax$. 19. $324x^{17}a^9 - 484x^5a^3$.

20. $245m^{23}n^{13} - 605m^{15}n^7$. 21. $(a+3b)^2 - 25c^2$.

22. $a^2 - (3b - 5c)^2$. 23. $(x+y)^2 - (x-y)^2$.

24. $(3a+2x)^2 - (2a+x)^2$. 25. $4(a-b)^2 - 9(c-d)^2$.

26. $49x^2 - (5y - 3z)^2$. 27. $(8x+5)^2 - (2x-7)^2$.

28. $(a+b-c)^2 - (a-b+c)^2$.

29. $(2a - 3b + 4c)^2 - (a + 4b - 5c)^2$.

30. $64(a + 3x - 4y)^2 - 9(2a - x + 3y)^2$.

31. $(4x^2 - 5a^2)^2 - (5x^2 - 4a^2)^2$.

32. $(5a^2 - 3a + 7)^2 - (5a^2 - 3a - 7)^2$.

94. পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই $a^2 - b^2$ এর আকারে প্রকাশ করা যায়, এইপ্রকার রাশিমালার বিশ্লেষণ : দৃষ্টান্তস্বরূপ নিম্নে কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদা. 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^4 + a^2b^2 + b^4$.

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 \\ &= \{(a^2 + b^2) + ab\}\{(a^2 + b^2) - ab\} \\ &= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : x^4+4.

$$x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$=\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}$$
$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

উদা. 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : x^4-6x^2+1.

$$x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2=(x^2-1)^2-(2x)^2$$
$$=\{(x^2-1)+2x\}\{(x^2-1)-2x\}$$
$$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1).$$

উদা. 4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^2-b^2+2bc-c^2$.

$$a^2-b^2+2bc-c^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)$$
$$=a^2-(b-c)^2$$
$$=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$$
$$=(a+b-c)(a-b+c).$$

উদা. 5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2$.

প্রদত্ত রাশি $=(c^2+2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)$
$$=(c+d)^2-(a-b)^2$$
$$=\{(c+d)+(a-b)\}\{(c+d)-(a-b)\}$$
$$=(c+d+a-b)(c+d-a+b).$$

প্রশ্নমালা 40

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

1. x^4+x^2+1.
2. x^8+x^4+1.
3. $a^4+a^2x^2+x^4$.
4. $a^8+a^4x^4+x^8$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1887.]
5. x^4+64.
6. $4x^4+81$.
7. $9x^4+36$.
8. a^4+2a^2+9.
9. x^4-7x^2+9.
10. $4x^4+8x^2+9$.
11. $4x^4-16x^2+9$.
12. $4x^4+3x^2+9$.
13. $4a^4-37a^2+9$.
14. $4a^4+625$.
15. $9x^4+23x^2+16$.
16. $9a^4-25a^2+16$.
17. $9x^4-33x^2+16$.
18. $9a^4-a^2+16$.
19. $16x^4+4x^2a^2+25a^4$.
20. $9a^4-19a^2x^2+25x^4$.
21. x^4+8x^2+144.
22. $a^4-35a^2b^2+25b^4$.
23. $36a^4-16a^2b^2+b^4$.
24. $49m^4+16n^4-60m^2n^2$.

25. $64a^4+81x^4$.

26. $4x^4+(7a)^4$.

27. $x^2-y^2+2yz-z^2$.

28. $4a^2-b^2-9c^2+6bc$.

29. $9x^2-4y^2+12yz-9z^2$.

30. $a^2-4b^2-25c^2+20bc$.

31. $30xz+16y^2-9x^2-25z^2$.

32. $a^2+4b^2-9c^2-4d^2-4ab+12cd$.

33. $(x^2-2xy)-(z^2-2yz)$.

34. $4x^2-1+9a^2-25b^2+12xa-10b$.

35. $9x^2-4y^2-49z^2-30x+28yz+25$.

36. $16a^2-16c^2-9b^2-24a+24bc+9$.

37. $49y^2+20z+x^2-14xy-25z^2-4$.

38. $16x^2+42by-9y^2+40xa-49b^2+25a^2$.

39. $49x^2-1+16y^2-64z^2+16z-56xy$.

40. $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$.

95. a^3+b^3 বা a^3-b^3 এর আকারে প্রকাশিত রাশিমালা : এইপ্রকার রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার প্রণালী 86 এবং 87 নিয়মের টীকায় বর্ণিত হইয়াছে। বর্ত্তমানে, এই আকারের অপেক্ষাকৃত একটু জটিল রাশি সম্বন্ধে আলোচনা করা যাইতেছে।

উদা. 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : a^9+x^9.

যেহেতু $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,

অতএব,
$$\begin{aligned} a^9+x^9 &= (a^3)^3+(x^3)^3 \\ &= (a^3+x^3)\{(a^3)^2-(a^3)(x^3)+(x^3)^2\} \\ &= (a^3+x^3)(a^6-a^3x^3+x^6) \\ &= (a+x)(a^2-ax+x^2)(a^6-a^3x^3+x^6). \end{aligned}$$

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : a^9-x^9.

যেহেতু $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,

অতএব,
$$\begin{aligned} a^9-x^9 &= (a^3)^3-(x^3)^3 \\ &= (a^3-x^3)\{(a^3)^2+(a^3)(x^3)+(x^3)^2\} \\ &= (a^3-x^3)(a^6+a^3x^3+x^6) \\ &= (a-x)(a^2+ax+x^2)(a^6+a^3x^3+x^6). \end{aligned}$$

উদা. 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $64x^7 - xa^6$.

$$\begin{aligned}64x^7 - xa^6 &= x(64x^6 - a^6)\\ &= x\{(8x^3)^2 - (a^3)^2\}\\ &= x(8x^3 + a^3)(8x^3 - a^3)\\ &= x\{(2x)^3 + a^3\}\{(2x)^3 - a^3\}\\ &= x\{(2x+a)(4x^2 - 2xa + a^2)\}\{(2x-a)(4x^2 + 2xa + a^2)\}\\ &= x(2x+a)(2x-a)(4x^2 - 2xa + a^2)(4x^2 + 2xa + a^2).\end{aligned}$$

অথবা,

$$\begin{aligned}64x^7 - xa^6 &= x(64x^6 - a^6)\\ &= x\{(4x^2)^3 - (a^2)^3\}\\ &= x(4x^2 - a^2)(16x^4 + 4x^2a^2 + a^4)\\ &= x(2x+a)(2x-a)\{(16x^4 + 8x^2a^2 + a^4) - 4x^2a^2\}\\ &= x(2x+a)(2x-a)\{(4x^2 + a^2)^2 - (2xa)^2\}\\ &= x(2x+a)(2x-a)(\overline{4x^2+a^2} + 2xa)(\overline{4x^2+a^2} - 2xa)\\ &= x(2x+a)(2x-a)(4x^2 + 2xa + a^2)(4x^2 - 2xa + a^2).\end{aligned}$$

টীকা। তৃতীয় উদাহরণে প্রদর্শিত নিয়ম দুইটির যে কোনটির সাহায্যেই বিশ্লেষণ-ক্রিয়া সম্পন্ন করা গেলেও, প্রথমোক্ত নিয়মটি প্রয়োগ করাই সুবিধাজনক।

প্রশ্নমালা 41

উৎপাদক নির্ণয় কর (Resolve into factors) :

1. $a^3 - 8b^3$. 2. $a^4 - 27ax^3$. 3. $512x^9 + 1$.

4. $a^9 - 512b^9$. 5. $27a^6 + 125x^6$. 6. $m^6 - n^6$.

7. $343x^3 + 512y^3$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1882.] 8. $64x^{12} - 1$.

9. $a^6 - 64x^{12}$. 10. $125x^9 - 216a^9$. 11. $64a^{13}b + 343ab^{13}$.

12. $729x^{20}y^2 - 64x^2y^{20}$. 13. $(a^2 + b^2)^3 + 8a^3b^3$.

14. $(2x^2 - 3y^2)^3 + y^6$. 15. $(2a^3 - b^3)^3 - b^9$.

দ্বাদশ অধ্যায়

দ্বিতীয়মানবিশিষ্ট রাশিমালার মধ্যপদ-বিশ্লেষণ-পূর্ব্বক উৎপাদক নির্ণয়

(Factors of a quadratic expression by breaking the middle term)

[**Lemma : মুখবন্ধ :** পূর্ব্বেই বলা হইয়াছে যে, এক বা একাধিক অক্ষরবিশিষ্ট কোন বীজগণিতীয় রাশিমালাতে, উহার অন্তর্ভুক্ত যে কোন একটি অক্ষরের শক্তির অধঃক্রম, বা উর্দ্ধক্রম অনুসারে রাশিমালাটিকে সাজাইয়া বীজগণিতীয় প্রক্রিয়া করিতে হয় ; এবং ঐ অক্ষরটির সর্ব্বোচ্চ শক্তির সূচক (index) দ্বারাই (ঐ অক্ষর সম্পর্কে), রাশিমালার মান (degree) নিরূপিত হয়। যথা, $ax+b$-এই দ্বিপদরাশিতে x এর শক্তির সূচক '1' বলিয়া, x এর সম্পর্কে এই রাশিটির মান (degree) '1' ; অর্থাৎ, ইহাকে x এর প্রথমমান-বিশিষ্ট রাশি (expression of the first degree in x) বলা হয়। তদ্রূপ, ax^2+bx+c এই ত্রিপদ-রাশিটিতে, x এর সর্ব্বোচ্চ শক্তির সূচক '2' বলিয়া, x এর সম্পর্কে ইহাকে একটি দ্বিতীয়মানবিশিষ্ট রাশি (expression of the second degree in x) বলে ; এইপ্রকার, $5x^3+9x^2+7x+b$ কে x এর সম্পর্কে একটি তৃতীয়মানবিশিষ্ট রাশি (expression of the third degree in x) ; $10x^4+9x^3+cx^2+11x+k$ কে x এর সম্পর্কে একটি চতুর্থমানবিশিষ্ট রাশি ; এবং সাধারণ ভাবে, $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+p$ কে x এর সম্পর্কে একটি n-তমমানবিশিষ্ট রাশি (expression of the nth degree in x) বলা হইয়া থাকে।]

96. বর্ত্তমান ক্ষেত্রে, কোন একটি অক্ষর (ধর, x) এর সম্পর্কে, একটি দ্বিতীয়মান-বিশিষ্ট রাশিমালার মধ্য-পদটিকে (অর্থাৎ x সমন্বিত পদটিকে) বিশ্লেষণ করিয়া কি ভাবে উক্ত রাশিটির উৎপাদক নির্ণয় করা যায়, তাহাই বুঝান যাইতেছে।

গুণনের নিয়মানুসারে আমরা দেখিতে পাই যে :—

(i) $\boldsymbol{(x+a)(x+b)}=x(x+a)+b(x+a)=x^2+xa+bx+ba$
$$=\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab}.$$

(ii) $(x+a)(x-b)=x(x+a)-b(x+a)=x^2+(a-b)x-ab.$

(iii) $(x-a)(x+b)=x(x-a)+b(x-a)=x^2-(a-b)x-ab.$

এবং (iv) $(x-a)(x-b)=x(x-a)-b(x-a)=x^2-(a+b)x+ab.$

উপরিউক্ত, চারিটি গুণনের ফল দ্বারা প্রাপ্ত সূত্র কয়টি প্রকৃতপক্ষে একটি সূত্র হিসাবেই গণ্য করা উচিত ; কারণ, (ii) (iii) এবং (iv)-চিহ্নিত সূত্র তিনটি প্রথমটির অনুসিদ্ধান্ত হিসাবেই প্রতিপন্ন করা যায়। প্রথমটিতে a এবং b এর পরিবর্ত্তে a এবং $-b$; বা $-a$ এবং b ; বা, $-a$ এবং $-b$ বসাইলেই যথাক্রমে (ii), (iii) এবং (iv)-চিহ্নিত ফলগুলি পাওয়া যায়।

97. বিপরীতক্রমে, কোন একটি অক্ষর সম্পর্কে দ্বিতীয়মানবিশিষ্ট কোন রাশিমালাকে উপরিউক্ত প্রথম সূত্রটির সহিত তুলনা করিয়া অতি সহজেই দুইটি প্রথমমান-বিশিষ্ট উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

x^2+px+q এর আকারে প্রকাশিত রাশিমালাকে পর্য্যবেক্ষণ দ্বারা উৎপাদকে বিশ্লেষণ : $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ এই সূত্রটি হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, x^2+px+q এর আকারে প্রকাশিত যে কোন রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে, দুইটি রাশি, a ও b, এরূপে নির্ণয় করিতে হয় যে, $a+b=p$ এবং $ab=q$. a ও b মূলদ (rational) এবং অখণ্ড বা পূর্ণ (integral) হইলে, উহাদিগকে পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই নির্ণয় করা যাইতে পারে। এই বিষয়ের আরও পরিষ্কার ধারণার জন্য, শিক্ষার্থিগণ 75 নিয়মের পরবর্ত্তী উদাহরণগুলি দেখিয়া লইতে পারে।

উদা. 1. $x^2+17x+30$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে, এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $=17$, এবং গুণফল $=30$. স্পষ্টতঃ, সংখ্যাদ্বয়ের প্রত্যেকটিই ধনাত্মক হইবে। কারণ, উহাদের গুণফল ও যোগফল উভয়ই ধনাত্মক।

এখন, যে যে সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল 30, তাহারা যথাক্রমে (i) 1 ও 30, (ii) 2 ও 15, (iii) 3 ও 10, (iv) 5 ও 6. ইহাদের মধ্যে পুনরায় যে যে সংখ্যা দুইটির যোগফল 17, সেই সংখ্যাদ্বয়কে নির্ণয় করিতে হইবে। স্পষ্টতঃ, 2 ও 15 সংখ্যা দুইটিই নির্ণেয় সংখ্যা ; কারণ, $2+15=17$ এবং $2\times15=30$.

$$\text{অতএব,}\quad x^2+17x+30=x^2+(2+15)x+30$$
$$=x^2+2x+15x+30$$
$$=x(x+2)+15(x+2)$$
$$=(x+2)(x+15).$$

উদা. 2. $x^2-11x+24$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে, যে সংখ্যা দুইটির গুণফল $=+24$ এবং সমষ্টি $=-11$, তাহাদিগকে নির্ণয়

করিতে হইবে। অতএব, ইহা সুস্পষ্ট যে, সংখ্যাদ্বয়ের প্রত্যেকটিই ঋণাত্মক (কারণ, উভয়ই ধনাত্মক হইলে, সমষ্টি ঋণাত্মক হইতে পারে না; আবার, একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক হইলেও, গুণফল ধনাত্মক হইতে পারে না)।

এখন, যে যে ঋণাত্মক সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল $= +24$, তাহারা যথাক্রমে (i) -1 ও -24, (ii) -2 ও -12, (iii) -3 ও -8, (iv) -4 ও -6. ইহাদের মধ্যে আবার সেই দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $= -11$. অতএব, -3 ও -8 ই নির্ণেয় সংখ্যা হইবে।

$$\text{অতএব, } x^2 - 11x + 24 = x^2 - (3+8)x + 24 = x^2 - 3x - 8x + 24$$
$$= x(x-3) - 8(x-3) = (x-3)(x-8).$$

উদা. 3. $x^2 + 6x - 40$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে, যে সংখ্যা দুইটির গুণফল $= -40$ এবং সমষ্টি $= +6$, তাহাদিগকে নির্ণয় করিতে হইবে।

গুণফল ঋণাত্মক হওয়ায়, সংখ্যা দুইটির একটি ধনাত্মক এবং অন্যটি ঋণাত্মক সংখ্যা হইবে।

এখন, যে যে সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল $= -40$, তাহারা যথাক্রমে (i) 1 ও -40, (ii) -1 ও 40, (iii) 2 ও -20, (iv) -2 ও 20, (v) 4 ও -10, (vi) -4 ও 10, (vii) 5 ও -8, (viii) -5 ও 8. ইহাদের মধ্যে যে সংখ্যা দুইটির সমষ্টি $+6$, তাহারা স্পষ্টতঃ, -4 ও $+10$. সুতরাং, -4 ও $+10$ ই নির্ণেয় দুই সংখ্যা।

$$\text{অতএব, } x^2 + 6x - 40 = x^2 + (10-4)x - 40$$
$$= x^2 + 10x - 4x - 40 = x(x+10) - 4(x+10) = (x+10)(x-4).$$

টীকা। পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইতেছে যে, একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক সংখ্যার যোগফল ধনাত্মক হইতে হইলে, উহাদের মধ্যে যেটির পরমমান (absolute value) বেশী, সেইটিই ধনাত্মক হইবে। এইটুকু মনে রাখিলে, প্রথমেই (i), (iii), (v) ও (vii) এ উল্লিখিত সংখ্যাদ্বয়কে বাদ দেওয়া যাইত।

উদা. 4. $x^2 - 5x - 36$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে, এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $= -5$ এবং গুণফল $= -36$. স্পষ্টতঃই, এইরূপ সংখ্যাদ্বয়ের একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক হইবে, এবং ঋণাত্মক সংখ্যাটি ধনাত্মকটি অপেক্ষা বড় হইবে। এখন, যে যে সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল $= -36$, এবং ঋণাত্মক সংখ্যাটির পরমমান বেশী, তাহারা যথাক্রমে, (i) 1 ও

-36, (ii) 2 ও -18, (iii) 3 ও -12, (iv) 4 ও -9 ; ইহাদের মধ্যে আবার যে সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি -5, সেই সংখ্যাদ্বয় স্পষ্টতঃই, $+4$ ও -9 হইবে।

অতএব, $x^2-5x-36=x^2-(9-4)x-36=x^2-9x+4x-36$
$$=x(x-9)+4(x-9)=(x-9)(x+4).$$

উদা. 5. $a^2+7ab+12b^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এক্ষেত্রে, রাশিটিকে a এর সম্পর্কে দ্বিতীয়মানবিশিষ্ট মনে করিয়া, আমাদিগকে এরূপ দুইটি রাশি, p ও q, নির্ণয় করিতে হইবে যে, $p+q=7b$ এবং $pq=12b^2$.

বর্ত্তমান ক্ষেত্রে, $p+q$, বা, pq, উভয়ের মানের সাংখ্যসহগ দুইটিই ধনাত্মক-সংখ্যা হওয়ায়, p এবং q এর মানের সাংখ্য-সহগদ্বয়ও ধনাত্মক সংখ্যা হইবে।

এখন, যে যে ধনাত্মক রাশি দুইটির যোগফল $7b$ তাহারা $6b$ এবং b, $5b$ এবং $2b$, $4b$ এবং $3b$, $3b$ এবং $4b$, $2b$ এবং $5b$, b এবং $6b$.

[বস্তুতঃ, শেষের তিনটি ও প্রথম তিনটি একই, শুধু, অন্যরূপে লিখিত। কাজেই, প্রথম তিনটি সম্পর্কে আলোচনা করিলেই যথেষ্ট হইবে।]

উপরিউক্ত রাশিযুগলদের মধ্যে $3b$ এবং $4b$ হইতেছে সেই যুগল যাহাদের গুণফল $12b^2$ এর সমান।

কাজেই, প্রদত্ত রাশি $=a^2+7b.a+12b^2=a^2+(4b+3b)a+12b^2$
$$=a^2+4b.a+3b.a+4b.3b$$
$$=a(a+4b)+3b(a+4b)$$
$$=(a+4b)(a+3b).$$

উদা. 6. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $m^2-12mn+20n^2$.

রাশিটিকে m এর সম্পর্কে দ্বিতীয়মানবিশিষ্ট মনে করিয়া লইলে, উহাকে $m^2-12n.m+20n^2$ রূপে লেখা যায়।

এস্থলে, এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি $=-12n$ এবং গুণফল $=+20n^2$. পূর্ব্বানুরূপ যুক্তি দ্বারা বুঝা যায় যে, $-10n$ ও $-2n$ ই নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় হইবে।

অতএব, $m^2-12mn+20n^2=m^2-(10n+2n).m+20n^2$
$$=m^2-10n.m-2n.m+20n^2$$
$$=m(m-10n)-2n(m-10n)$$
$$=(m-10n)(m-2n).$$

উদা. 7. a^4-a^2-12 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

a^2 এর পরিবর্ত্তে x ধরিলে, প্রদত্ত রাশি $=x^2-x-12$; এবং পূর্ব্বপ্রদর্শিত নিয়মানুসারে, $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$.

অতএব, $a^4-a^2-12=(a^2-4)(a^2+3)$; ... (1)

আবার, $a^2-4=a^2-2^2=(a+2)(a-2)$.

সুতরাং, (1) হইতে, $a^4-a^2-12=(a+2)(a-2)(a^2+3)$.

উদা. 8. $(x^2+2x)^2-3(x^2+2x)-18$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

x^2+2x এর পরিবর্ত্তে a ধরিলে,

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= a^2-3a-18\\ &= a^2-6a+3a-18\\ &= a(a-6)+3(a-6)\\ &= (a-6)(a+3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{সুতরাং,}\quad \text{প্রদত্ত রাশি} &= \{(x^2+2x)-6\}\{(x^2+2x)+3\}\\ &= (x^2+2x-6)(x^2+2x+3).\end{aligned}$$

উদা. 9. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$(5a+b)^2+(5a+b)(a+2b)-20(a+2b)^2.$$

$5a+b$ এর পরিবর্ত্তে x এবং $a+2b$ এর পরিবর্ত্তে y ধরিলে, প্রদত্ত রাশি $x^2+xy-20y^2$ তে পরিণত হয়; এবং স্পষ্টই, $x^2+xy-20y^2=(x+5y)(x-4y)$.

$$\begin{aligned}\text{অতএব, প্রদত্ত রাশি} &= \{(5a+b)+5(a+2b)\}\{(5a+b)-4(a+2b)\}\\ &= (10a+11b)(a-7b).\end{aligned}$$

উদা. 10. $8x^2+2x-3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রথম পদ্ধতি : x^2 এর সহগ দ্বারা রাশিমালার ধ্রুবক-(constant term) টিকে [অর্থাৎ যে পদটিতে x, বা x এর কোন শক্তি নাই, সেইটিকে] গুণ কর।

এক্ষেত্রে, গুণফল $=8\times(-3)=-24$.

এখন, এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের গুণফল $=-24$ এবং সমষ্টি $=+2$, (অর্থাৎ x এর সহগ)। স্পষ্টই, নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি 6 ও -4 হইবে।

$$\begin{aligned}\text{অতএব, প্রদত্ত রাশি} &= 8x^2+6x-4x-3=2x(4x+3)-(4x+3)\\ &= (4x+3)(2x-1).\end{aligned}$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

প্রদত্ত রাশি $= 8x^2 + 2x - 3 = \frac{1}{8}(8 \times 8x^2 + 2 \times 8x - 3 \times 8)$

$= \frac{1}{8}(a^2 + 2a - 24)$; [$8x$ এর পরিবর্ত্তে a লিখিয়া]

স্পষ্টতঃ, $a^2 + 2a - 24 = (a+6)(a-4)$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{8}(a+6)(a-4) = \frac{1}{8}(8x+6)(8x-4)$

$= \frac{1}{8}\{2(4x+3)\}\{4(2x-1)\} = (4x+3)(2x-1)$.

উদা. 11. $12x^2 + 7x - 10$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রথম পদ্ধতি : x^2 এর সহগ দ্বারা রাশিমালার ধ্রুবক-(constant term) টিকে (অর্থাৎ x-বর্জ্জিত পদটিকে) গুণ করিয়া, লব্ধ গুণফলকে এরূপ দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= x$ এর সহগ হইবে।

এক্ষেত্রে, গুণফল $= 12 \times (-10) = -120$; এবং পরীক্ষা করিয়া দেখা যায় যে, যে দুইটি সংখ্যার গুণফল $= -120$ এবং বীজগণিতীয় সমষ্টি $= x$ এর সহগ, অর্থাৎ $+7$, তাহারা $+15$ এবং -8 হইবে।

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= 12x^2 + 15x - 8x - 10 = 3x(4x+5) - 2(4x+5)$

$= (4x+5)(3x-2)$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

প্রদত্ত রাশি $= 12x^2 + 7x - 10 = \frac{1}{12}(12 \times 12x^2 + 7 \times 12x - 10 \times 12)$

$= \frac{1}{12}(a^2 + 7a - 120)$; [$12x$ এর পরিবর্ত্তে a লিখিয়া]

স্পষ্টই, $a^2 + 7a - 120 = (a+15)(a-8)$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{12}(12x+15)(12x-8) = \frac{1}{12}\{3(4x+5)\}\{4(3x-2)\}$

$= (4x+5)(3x-2)$.

উদা. 12. $13x^2 - 20ax + 7a^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রথম পদ্ধতি : রাশিমালার x-বর্জ্জিত পদটিকে x^2 এর সহগ দ্বারা গুণ কর। এক্ষেত্রে গুণফল $= 13 \times 7a^2 = 91a^2$; এখন $91a^2$ কে এরূপ দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি $= x$ এর সহগ, অর্থাৎ, $-20a$ হইবে।

স্পষ্টই দেখা যায় যে, নির্ণেয় উৎপাদকদ্বয় $-7a$ এবং $-13a$ হইবে।

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= 13x^2 - 13ax - 7ax + 7a^2$

$= 13x(x-a) - 7a(x-a) = (x-7a)(13x-a)$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

প্রদত্ত রাশি $= 13x^2 - 20ax + 7a^2$

$= \frac{1}{13}(13 \times 13x^2 - 20a \times 13x + 13 \times 7a^2)$

$= \frac{1}{13}(y^2 - 20ay + 91a^2)$ [$13x$ এর পরিবর্তে y লিখিয়া]

$= \frac{1}{13}(y^2 - 13ay - 7ay + 91a^2)$

$= \frac{1}{13}\{y(y - 13a) - 7a(y - 13a)\}$

$= \frac{1}{13}(y - 13a)(y - 7a)$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{13}(13x - 13a)(13x - 7a) = \frac{1}{13} \times 13(x - a)(13x - 7a)$

$= (x - a)(13x - 7a)$.

প্রশ্নমালা 42

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

1. $x^2 + 3x + 2$. **2.** $x^2 + 5x + 6$. **3.** $a^2 + 4a + 3$.
4. $x^2 - 5x + 4$. **5.** $x^2 + 7x + 10$. **6.** $x^2 - 7x + 12$.
7. $x^2 + 8x + 15$. **8.** $x^2 - 2x - 15$. **9.** $x^2 - 13x + 36$.
10. $x^2 - 5x - 36$. **11.** $x^2 - 14x + 24$. **12.** $x^2 - 22x + 40$.
13. $x^2 + 7x - 30$. **14.** $x^2 + 2x - 48$. **15.** $x^2 + 16x - 36$.
16. $x^2 + 9x - 36$. **17.** $x^2 + 11x - 42$. **18.** $x^2 + 14x - 72$.
19. $x^2 - 3x - 40$. **20.** $x^2 - 11x - 80$. **21.** $x^2 - 29x - 96$.
22. $x^2 - 10x - 56$. **23.** $x^2 - x - 42$. **24.** $x^2 - x - 72$.
25. $x^2 + 22x + 120$. **26.** $x^2 + 16x - 80$. **27.** $x^2 - 21x - 72$.
28. $x^2 + 5x - 84$. **29.** $x^2 - 20x + 96$. **30.** $x^2 + 23x - 78$.
31. $x^2 - 6x - 72$. **32.** $x^2 - 25x + 84$. **33.** $x^2 - 26x + 88$.
34. $x^2 + 7x - 120$. **35.** $x^2 - 2x - 80$. **36.** $x^2 + 8x - 84$.
37. $a^2 - a - 56$. **38.** $m^2 - 9m - 90$. **39.** $a^2 + 17a - 60$.
40. $a^2 - 15a + 54$. **41.** $p^2 - 22p - 48$. **42.** $m^2 + m - 72$.
43. $m^2 + 27m - 90$. **44.** $a^2 - 29a + 120$. **45.** $x^2 + 7x - 78$.
46. $a^2 - 49a - 102$. **47.** $a^2 - 19a + 60$. **48.** $x^2 + 12x - 64$.
49. $a^2 - 26a - 120$. **50.** $x^2 + 8x - 105$. **51.** $x^2 - xy - 42y^2$.
52. $a^2 - 12ab + 32b^2$. **53.** $m^2 + mn - 30n^2$. **54.** $a^2 + ab - 12b^2$.
55. $a^2 - 2ab - 15b^2$. **56.** $x^2 - 7xy - 8y^2$. **57.** $x^2 + 3xy - 40y^2$.
58. $p^2 - 14pq + 48q^2$. **59.** $p^2 + 2pq - 80q^2$. **60.** $x^2 + 20xy - 96y^2$.

61. a^4+4a^2-5. 62. x^4+2x^2-15. 63. x^4+3x^2-28.
64. x^6+2x^3-3. 65. a^6-10a^3+16. 66. x^6+26x^3-27.
67. a^6+7a^3-8. 68. x^8-20x^4+64. 69. a^8-11a^4-80.
70. $x^{12}-7x^6-8$. 71. $(a^2+2a)^2-(a^2+2a)-2$.
72. $(x^2+3x)^2+3(x^2+3x)+2$. 73. $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$.
74. $(a^2-3a)^2-3(a^2-3a)-4$. 75. $(x^2-4x)^2-4(x^2-4x)-5$.
76. $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12$. 77. $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24$.
78. $(a^2+7a)^2-8(a^2+7a)-180$. 79. $(a^2+6a)^2-32(a^2+6a)-320$.
80. $(x^2-8x)^2-29(x^2-8x)+180$. 81. $2x^2+x-15$.
82. $6a^2-a-15$. 83. $8m^2-6m-9$. 84. $6x^2+7xy-24y^2$.
85. $10a^2-41ab+21b^2$. 86. $12m^2-mn-20n^2$.
87. $12x^2+28xy-5y^2$. 88. $20a^2+ab-30b^2$.
89. $18x^2-51xy+35y^2$. 90. $12x^2+23xy-24y^2$.

98. x^2+px+q এর আকারে প্রকাশ করা যায়, এই প্রকার রাশিসমূহকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়ঃ

কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা উক্ত প্রণালী উত্তমরূপে বুঝান যাইবে।

উদা. 1. $x^2-7x+12$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$x^2-7x+12=x^2-7x+(\frac{7}{2})^2-(\frac{7}{2})^2+12$ [$(\frac{7}{2})^2$ কে যোগ আর বিয়োগ করিয়া]

$=\{x^2-7x+(\frac{7}{2})^2\}-(\frac{49}{4}-12)$

$=(x-\frac{7}{2})^2-\frac{1}{4}=(x-\frac{7}{2})^2-(\frac{1}{2})^2$

$=\{(x-\frac{7}{2})+\frac{1}{2}\}\{(x-\frac{7}{2})-\frac{1}{2}\}=(x-3)(x-4)$.

টীকা। ইহা অবশ্যই লক্ষ্য করিতে হইবে যে, একটি পূর্ণবর্গ পাইবার জন্য আমরা x^2-7x এর সহিত 7 এর অর্দ্ধেকের বর্গ (অর্থাৎ, x এর সহগের অর্দ্ধেকের বর্গ) যোগ করিয়াছি। সাধারণতঃ, x^2+2ax (অথবা, x^2-2ax) এর সহিত a^2 যোগ করিলে, এতল্লব্ধ রাশিমালা (অর্থাৎ যোগফলটি) একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

উদা. 2. $x^2+2xy-8y^2-4z^2+12yz$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^2+2xy+y^2)-(9y^2+4z^2-12yz)$

$=(x+y)^2-(3y-2z)^2$

$=\{(x+y)+(3y-2z)\}\{(x+y)-(3y-2z)\}$

$=(x+4y-2z)(x-2y+2z)$.

উদা. 3. $3x^2+11x-4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$3x^2+11x-4=3(x^2+\tfrac{11}{3}x-\tfrac{4}{3})=3\{x^2+\tfrac{11}{3}x+(\tfrac{11}{6})^2-(\tfrac{11}{6})^2-\tfrac{4}{3}\}$$
$$=3\{(x+\tfrac{11}{6})^2-(\tfrac{121}{36}+\tfrac{4}{3})\}=3\{(x+\tfrac{11}{6})^2-\tfrac{169}{36}\}$$
$$=3\{(x+\tfrac{11}{6})+\tfrac{13}{6}\}\{(x+\tfrac{11}{6})-\tfrac{13}{6}\},\quad [\because\ \tfrac{169}{36}=(\tfrac{13}{6})^2]$$
$$=3(x+4)(x-\tfrac{1}{3})=(x+4)(3x-1).$$

উদা. 4. $8x^2-10x+3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$8x^2-10x+3=8\{x^2-\tfrac{10}{8}x+\tfrac{3}{8}\}=8\{x^2-\tfrac{5}{4}x+(\tfrac{5}{8})^2-(\tfrac{25}{64}-\tfrac{3}{8})\}$$
$$=8\{(x-\tfrac{5}{8})^2-\tfrac{1}{64}\}=8\{(x-\tfrac{5}{8})+\tfrac{1}{8}\}\{(x-\tfrac{5}{8})-\tfrac{1}{8}\}$$
$$=8(x-\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{3}{4})=\{2(x-\tfrac{1}{2})\}\{4(x-\tfrac{3}{4})\}$$
$$=(2x-1)(4x-3).$$

উদা. 5. $2a^2+5ab-12b^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$2a^2+5ab-12b^2=2(a^2+\tfrac{5}{2}ab-6b^2)$$
$$=2\left\{a^2+\frac{5}{2}ab+\left(\frac{5b}{4}\right)^2-\left(\frac{25b^2}{16}+6b^2\right)\right\}$$
$$=2\{(a+\tfrac{5}{4}b)^2-\tfrac{121}{16}b^2\}$$
$$=2\{(a+\tfrac{5}{4}b)+\tfrac{11}{4}b\}\{(a+\tfrac{5}{4}b)-\tfrac{11}{4}b\}$$
$$=2(a+4b)(a-\tfrac{3}{2}b)=(a+4b)(2a-3b).$$

উদা. 6. $ax^2+(a^2+1)x+a$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$ax^2+(a^2+1)x+a$$
$$=a\left\{x^2+\frac{a^2+1}{a}\cdot x+1\right\}$$
$$=a\left\{x^2+\frac{a^2+1}{a}\cdot x+\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-\left(\frac{a^4+2a^2+1}{4a^2}-1\right)\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-\frac{a^4-2a^2+1}{4a^2}\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{a^2+1}{2a}\right)+\frac{a^2-1}{2a}\right\}\left\{\left(x+\frac{a^2+1}{2a}\right)-\frac{a^2-1}{2a}\right\}$$
$$=a\left(x+a\right)\left(x+\frac{1}{a}\right)=(x+a)(ax+1).$$

এইরূপভাবে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে,

$$ax^2-(a^2+1)x+a=(x-a)(ax-1),$$
$$ax^2+(a^2-1)x-a=(x+a)(ax-1),$$
$$ax^2-(a^2-1)x-a=(x-a)(ax+1).$$

টীকা। এই ফলগুলি মনে রাখা অবশ্য কর্ত্তব্য ; কারণ, ইহাদের সাহায্যে আমরা উপরিউক্ত রাশিসমূহের অনুরূপ আকারের যে কোন রাশিরই উৎপাদক অবিলম্বে লিখিতে পারি। উদাহরণস্বরূপ, $3x^2-10x+3=(x-3)(3x-1)$,

$4x^2-15x-4=(x-4)(4x+1)$,

$5x^2+24x-5=(x+5)(5x-1)$; ইত্যাদি।

উদা. 7. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$4(x^2+2x+5)^2+17(x^2+2x+5)(x^2+6x)+4(x^2+6x)^2.$$

x^2+2x+5 এর পরিবর্ত্তে a এবং x^2+6x এর পরিবর্ত্তে b লিখিলে, প্রদত্ত রাশিমালা $=4a^2+17ab+4b^2$; এবং সহজেই দেখান যায় যে,

$$4a^2+17ab+4b^2=(a+4b)(4a+b).$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\{(x^2+2x+5)+4(x^2+6x)\}\{4(x^2+2x+5)+(x^2+6x)\}$$
$$=(5x^2+26x+5)(5x^2+14x+20)$$
$$=(x+5)(5x+1)(5x^2+14x+20).$$

প্রশ্নমালা 43

পূর্ব্বোক্ত নিয়মানুসারে নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors applying the method of this article) :

1. x^2+4x+3. **2.** x^2+6x+5. **3.** $x^2+8x+15$.

4. $x^2-10x+21$. **5.** $x^2-2x-48$. **6.** $x^2-4x-45$.

7. $x^2-12x+32$. **8.** $x^2-6x-55$. **9.** $a^2+2ab-c^2+2bc$.

10. x^2+2x-y^2+2y. **11.** x^2+6x-y^2+4y+5.

12. $a^2+4ab-5b^2-c^2+6bc$. **13.** $x^2-6xy+5y^2-z^2+4yz$.

14. $x^2-10xy+16y^2-4z^2+12yz$. **15.** $a^2-12ab-13b^2-9c^2+42bc$.

16. $x^2+12xy-9z^2+36yz$. **17.** $x^2-14xy-15y^2-25z^2+80yz$.

18. $2x^2-5x-3$. **19.** $3x^2-5x-2$. **20.** $3x^2+14x+8$.

21. $4x^2+7x-2$. **22.** $6x^2+x-2$. **23.** $6x^2-5x-4$.

24. $6x^2+7x-3$. **25.** $8x^2+2x-15$. **26.** $4x^2+4x-35$.

27. $6x^2-x-12$. **28.** $3x^2-16x-12$. **29.** $2x^2-9x-35$.

30. $2x^2+5x-42.$ **31.** $3x^2+13x-30.$ **32.** $12x^2+x-6.$

33. $2a^2+7ab-15b^2.$ **34.** $6x^2-13xy+6y^2.$

35. $6m^2-11mn-10n^2.$ **36.** $3p^2+5pq-12q^2.$

37. $8a^2-14ab-15b^2.$ **38.** $10m^2+11mn-6n^2.$

39. $12x^2+13xy-4y^2.$ **40.** $15a^2-11ab-12b^2.$

41. $2a^2-5ab+2b^2.$ **42.** $3a^2-8ab-3b^2.$ **43.** $3x^2+8xy-3y^2.$

44. $4a^2+15a-4.$ **45.** $4a^2-17ab+4b^2.$ **46.** $5x^2-24x-5.$

47. $5x^2-26xy+5y^2.$ **48.** $6x^2+37x+6.$ **49.** $6a^2+35ab-6b^2.$

50. $6a^2-35ab-6b^2.$ **51.** $7a^2-50ab+7b^2.$ **52.** $7a^2+48ab-7b^2.$

53. $7a^2-48ab-7b^2.$ **54.** $8x^2+63xy-8y^2.$ **55.** $9x^2-82xy+9y^2.$

56. $10x^2+99xy-10y^2.$ 57. $2(a+b)^2+3(a+b)-2.$

58. $2(x^2+y^2)^2-3xy(x^2+y^2)-2x^2y^2.$

59. $2(a^2+b^2)^2+5ab(a^2+b^2)+2a^2b^2.$

60. $4(x^2-4xy+y^2)^2+15xy(x^2-4xy+y^2)-4x^2y^2.$

61. $2x^4-5x^2-12.$ **62.** $8a^4-14a^2b^2-9b^4.$

63. $9a^4+2a^2b^2-32b^4.$ **64.** $8x^6-65x^3+8.$

65. $4a^8-17a^4b^4+4b^8.$

ত্রয়োদশ অধ্যায়

উৎপাদক-সাহায্যে গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.

(H. C. F. and L. C. M. by factorisation)

I. গ. সা. গু. (গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক)

(Highest Common Factor)

99. **সংজ্ঞা:** দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশি, অপর কোন বীজগণিতীয় রাশি দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইলে, শেষোক্ত রাশিটিকে পূর্ব্বোক্ত রাশিদ্বয়ের বা রাশিসমূহের **সাধারণ গুণনীয়ক** বা উৎপাদক (common factor) বলে।

দ্রষ্টব্য। এস্থলে, **'রাশি'** অর্থে অবশ্য **মূলদ** (rational) এবং **অখণ্ড বা পূর্ণ** (integral) **রাশিই** সূচিত হইতেছে [নিয়ম 91 এর টীকা দেখ]।

যে গুণনীয়ককে (অর্থাৎ উৎপাদককে) আর কোনরূপ গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না, তাহাকে মৌলিক গুণনীয়ক (elementary factor) বলে।

দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশির ভিতর যতগুলি মৌলিক গুণনীয়ক (elementary factor) সাধারণ (common) থাকে, তৎসমুদয়ের গুণফলকে পূর্ব্বোক্ত রাশিদ্বয়ের বা রাশিসমূহের **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক** (Highest Common Factor) বলে, অর্থাৎ দুই বা ততোধিক রাশির অন্তর্গত বৃহত্তম-সংখ্যক সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কের গুণফলকেই ঐ রাশিদ্বয়ের বা রাশিসমূহের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক, বা সংক্ষেপে, **গ. সা. গু.** বলে। যথা,

যেহেতু $6a^2b(x^2-1)=2\times3\times a\times a\times b\times(x+1)\times(x-1)$,

এবং $15ab^2(x^2-3x+2)=3\times5\times a\times b\times b\times(x-1)\times(x-2)$.

অতএব, 3, a, b এবং $x-1$ ই প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের ভিতর সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক।

সুতরাং, প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের **গ. সা. গু.** $=3ab(x-1)$.

টীকা 1. প্রদত্ত রাশি দুইটির ভিতর নিম্নলিখিত গুণনীয়কগুলিও সাধারণ; যথা, $3a$, $b(x-1)$, ab, $3(x-1)$, $3ab$ ইত্যাদি। কিন্তু, ইহাদের কোনটিই বৃহত্তম-সংখ্যক মৌলিক গুণনীয়ক দ্বারা উৎপন্ন নহে।

টীকা 2. স্পষ্টই বুঝা যায় যে, আলোচ্য রাশিসমূহের ভিতর কোন অঙ্ক (numerical quantity) সাধারণ গুণনীয়করূপে বর্ত্তমান না থাকিলে, উহাদের গ. সা. গু. এর মান (degree), অন্যান্য যে কোন সাধারণ গুণনীয়কের মান অপেক্ষা বড় হইবে। অতএব, যে রাশিসমূহের ভিতর কোন অঙ্ক সাধারণ গুণনীয়করূপে বর্ত্তমান নাই, তাহাদের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ককে ঐ রাশিসমূহের 'সর্ব্বোচ্চমানবিশিষ্ট ভাজক-রাশি (divisor of the highest degree)' রূপে বর্ণনা করা যায়।

টীকা 3. কোন এক রাশি B অপর এক রাশি A দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইলে, A ই স্পষ্টতঃ A এবং B এই রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. হইবে।

টীকা 4. কোন রাশি H অন্য কতিপয় রাশি A, B, C এর গ. সা. গু. হইলে, $\frac{A}{H}, \frac{B}{H}, \frac{C}{H}$ প্রভৃতি রাশিসমূহের (অর্থাৎ A, B, C প্রভৃতিকে H দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলসমূহের) কোন গুণনীয়ক, সাধারণ (common) থাকিতে পারে না।

টীকা 5. দুই বা ততোধিক রাশির প্রত্যেকটিতে কোন মৌলিক গুণনীয়কের যে সর্ব্বোচ্চ শক্তি সকল রাশির ভিতরই সাধারণ, উক্ত গুণনীয়ক সেই (সর্ব্বোচ্চ) শক্তিবিশিষ্ট হইয়া রাশিসমূহের গ. সা. গু. তে গুণনীয়করূপে বর্ত্তমান থাকিবে।

টীকা 6. $A=p\times q$ এবং $B=p'\times q'$ হইলে, এবং q ও q' এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক না থাকিলে, A ও B এর গ. সা. গু., এবং p ও p' এর গ. সা. গু., উভয়ই এক হইবে।

টীকা 7. $A=m\times n$ ও $B=m'\times n'$ হইলে, এবং A ও B এর যাবতীয় একপদ-রাশিবিশিষ্ট উৎপাদক (monomial factor) যথাক্রমে m ও m' এর অন্তর্ভুক্ত হইলে, A ও B এর গ. সা. গু. $=$ (m ও m' এর গ. সা. গু.) $\times$ (n ও n' এর গ. সা. গু.)।

টীকা 8. m, A এর কোন গুণনীয়ক না হইলে, A ও B এর গ. সা. গু. এবং A ও mB এর গ. সা. গু., উভয়ই এক হইবে।

100. সরলরাশিসমূহের গ. সা. গু. নির্ণয় : সরলরাশিসমূহকে সহজেই মৌলিক গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়; কাজেই, উহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করা অত্যন্ত সহজ।

উদা. 1. $a^2b^4c^5$, $a^4b^3c^7$ এবং $a^3b^5c^4$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এস্থলে, a, b, c ই রাশি তিনটির সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক; এবং a, b, c এর যে যে উচ্চতম শক্তি রাশিত্রয়ের ভিতর সাধারণ, তাহারা যথাক্রমে a^2, b^3 এবং c^4.

সুতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=a^2b^3c^4$.

উদা. 2. $24ab^2x^3y^4$, $36a^2x^4z^5$ এবং $240b^3x^6y^2z$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এখন,
$$24ab^2x^3y^4 = 3\times 2^3\times ab^2x^3y^4\ ;$$
$$36a^2x^4z^5 = 2^2\times 3^2\times a^2x^4z^5\ ;$$
$$240b^3x^6y^2z = 3\times 5\times 2^4\times b^3x^6y^2z.$$

স্পষ্টতঃ, ইহাদের ভিতর 3, 2 এবং x, এই মৌলিক গুণনীয়ক তিনটিই সাধারণ; এবং এই মৌলিক গুণনীয়কগুলির যে যে উচ্চতম শক্তি সকল রাশির ভিতরই সাধারণ, তাহারা যথাক্রমে 3, 2^2 এবং x^3.

স্থতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 3\times 2^2\times x^3 = 12x^3$.

টীকা। রাশিসমূহের প্রত্যেকটিকে, তদন্তর্গত বিভিন্ন মৌলিক গুণনীয়কের শক্তির গুণফলরূপে প্রকাশ করার পর, যদি প্রথম রাশির সেই সকল মৌলিক গুণনীয়ক লিখিত হয় যাহা অন্যান্য রাশিতে বর্তমান আছে, তাহা হইলেই, রাশিসমূহের সমুদয় সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক পাওয়া যায়। যথা, উপরিউক্ত উদাহরণে প্রথম রাশির মৌলিক গুণনীয়ক 3, 2, a, b, x এবং y এর মধ্যে 3, 2 এবং x অন্য রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটিতেই বর্তমান আছে।

প্রশ্নমালা 44

গ. সা. গু. নির্ণয় কর (Find the H. C. F. of):

1. a^2b^3 এবং a^3b^2.
2. $12a^3b$ এবং $20a^2c^3$.
3. $9xy^2z^3$ এবং $24x^3y^4$.
4. $20a^3x^4y^5$ এবং $75a^2y^3$.
5. $18m^2n^4$ এবং $45m^5n^3$.
6. $16a^3x^4y$, $40a^2y^3x$ এবং $28x^3a$.
7. $24m^2np^5$, $60mn^2p$ এবং $84m^3p^2$.
8. $45x^3y^2z^4$, $75x^2y^4z^3$ এবং $90x^4y^3z^2$.
9. $36a^2b^2c^4x^5$, $54a^5c^2x^4$ এবং $90a^4b^3c^5$.
10. $72a^3b^4c^5$, $96b^3c^4d^5$ এবং $120c^3d^4a^5$.
11. $48a^5x^4y^3z^2$, $60x^5y^4z^3b^2$, $72y^5z^4b^3a^2$ এবং $84z^5b^4a^3x^2$.
12. $75m^4n^3p^5q^6$, $90m^3n^5p^6q^4$, $105m^6n^4p^3q^5$ এবং $135m^5n^6p^4q^3$.
13. $54a^2b^5c^3d^4$, $72a^5b^2c^4d^3$, $108a^3b^4c^5d^2$ এবং $126a^4b^3c^2d^5$.
14. $18a^3x^4y^5$, $42a^4y^3z^4$, $60x^3y^4z^5$ এবং $78a^2x^4z^3$.
15. $32a^2b^3x^4y^5z^6$, $40a^3x^5y^4z^3$, $56b^3x^2y^7z^4$, $72x^6a^5y^2z^3$ এবং $96b^4a^3x^3y^3$.

101. যে সকল রাশিকে সহজে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়, তাহাদের গ. সা. গু. নির্ণয়ঃ পূর্ব্বনিয়মে প্রদর্শিত প্রক্রিয়া-পদ্ধতি এই সকল ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

উদা. 1. $a^3b^2 + 2a^2b^3$ এবং $a^5b - 4a^3b^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$a^3b^2 + 2a^2b^3 = a^2b^2(a+2b) ;$$

এবং $$a^5b - 4a^3b^3 = a^3b(a^2 - 4b^2) = a^3b(a+2b)(a-2b).$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= a^2b(a+2b)$.

উদা. 2. $x^4y^2 + xy^5$ এবং $x^4y + 2x^3y^2 + x^2y^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$x^4y^2 + xy^5 = xy^2(x^3 + y^3) = xy^2(x+y)(x^2 - xy + y^2) ;$$

এবং $$x^4y + 2x^3y^2 + x^2y^3 = x^2y(x^2 + 2xy + y^2) = x^2y(x+y)^2.$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= xy(x+y)$.

উদা. 3. $24(x^4 - 2ax^3 - 8a^2x^2)$ এবং $54(x^5 - ax^4 - 6a^2x^3)$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 3 \times 8 \times x^2(x^2 - 2ax - 8a^2) = 3 \times 2^3 \times x^2(x+2a)(x-4a)$.

দ্বিতীয় রাশি $= 6 \times 9 \times x^3(x^2 - ax - 6a^2) = 2 \times 3^3 \times x^3(x+2a)(x-3a)$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 3 \times 2 \times x^2(x+2a) = 6x^2(x+2a)$.

উদা. 4. $a^4 - 16x^4$ এবং $a^3 + a^2x - 10ax^2 + 8x^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= (a^2 + 4x^2)(a^2 - 4x^2) = (a^2 + 4x^2)(a+2x)(a-2x)$.

দ্বিতীয় রাশি $= (a-2x)(a^2 + 3ax - 4x^2) = (a-2x)(a-x)(a+4x)$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= a - 2x$.

টীকা। এই উদাহরণটি হইতে দেখা যায় যে, যদিও প্রথম রাশির ন্যায় দ্বিতীয় রাশিটিকে তত সহজে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না, তথাপি উহার গুণনীয়কসম্বন্ধে ধারণা করা কষ্টকর নহে ; কারণ, ধরিয়া লইতে পারা যায় যে, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির মধ্যে অন্ততঃ একটি গুণনীয়ক সাধারণ থাকিবে। অতএব, প্রথম রাশিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করার পর, একটু পরীক্ষা করিয়া দেখিলেই বুঝা যায় যে, দ্বিতীয় রাশির একটি গুণনীয়ক $a - 2x$ হইবে। কাজেই, উক্ত বিশ্লেষণ-প্রক্রিয়া সহজসাধ্য।

প্রশ্নমালা 45

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর (Find the H. C. F. of) :

1. $a^3 - ab^2$ এবং $a^4 + 2a^3b + a^2b^2$.
2. $x^5y^3 - x^3y^5$ এবং $x^5y^4 + x^4y^5$.
3. $6(x^2 - 9)$ এবং $15(x^3 + 27)$.
4. $12(a^6 - a^2b^2c^2)$ এবং $20(a^4b^2c^2 + a^2b^3c^3)$.
5. $m^6n^3 - 2m^5n^4 + m^4n^5$ এবং $(m^2n - mn^2)^3$.
6. $4a^4x - 9a^2x^3$ এবং $4a^2x^2 + 6ax^3$.
7. $18a^4b^3 - 32a^2b^5$ এবং $18a^4b^2 + 24a^3b^3$.
8. $9x^4y^4 - 36x^2y^6$ এবং $24x^4y^2 - 48x^3y^3$.
9. $6a^3b^2 - 24ab^4$ এবং $4a^5b + 32a^2b^4$.
10. $48x^2a^2(x + a)^2(x^2a^2 - xa^3)$ এবং $64(x^5a^2 - x^2a^5)(x^3a + x^2a^2)$.
11. $24(x^3 - a^3)$ এবং $40(x^4 + x^2a^2 + a^4)$.
12. $56(x^6a^2 - x^2a^6)$ এবং $72(x^5a^3 + 3a^5x^3 + 2a^7x)$.
13. $30(a^2 + 4ab + 3b^2)$ এবং $42(a^2 + ab - 6b^2)$.
14. $28(x^3 - 3x^2 - 10x)$ এবং $52(x^4 - 8x^3 + 15x^2)$.
15. $x^4y + 3x^3y^2 - 18x^2y^3$ এবং $x^3y^2 + 10x^2y^3 + 24xy^4$.
16. $a^4x^3 - 4a^3x^4 - 12a^2x^5$ এবং $a^5x^2 + 8a^4x^3 + 12a^3x^4$.
17. $4x^3 + 12x^2 + 9x$ এবং $4x^2 - 2x - 12$.
18. $a^2 - ab - 2b^2$ এবং $a^3 - a^2b - 4ab^2 + 4b^3$.
19. $x^2 + 3x - 10$ এবং $x^3 - x^2 - 14x + 24$.
20. $54(x^3 + 8a^3)$ এবং $90(x^3 + 7ax^2 + 16a^2x + 12a^3)$.
21. $(a^3 - b^3)(a + b)^2$, $a^4 - b^4$ এবং $3a^4 + 2a^3b - 5a^2b^2$.
22. $(2x - 3)^2(x^2 + x - 2)$, $4x^2 - x - 18$ এবং $2x^2 - 23x - 54$.
23. $8(27a^5b + a^2b^4)$, $12(6a^4b^2 - 7a^3b^3 - 3a^2b^4)$ এবং $40(3a^3b^2 + 13a^2b^3 + 4ab^4)$.
24. $x^4 - 13x^2 + 36$, $3x^3 + 13x^2 + 8x - 12$ এবং $4x^3 + 17x^2 + 9x - 18$.

II. ল. সা. গু. (লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক)

(Lowest Common Multiple)

102. সংজ্ঞা : কোন এক রাশি, অপর এক রাশি দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইলে, প্রথমোক্ত রাশিকে শেষোক্ত রাশিটির **গুণিতক** (multiple) বলে।

যদি কোন রাশি, দুই বা ততোধিক রাশির প্রত্যেকটি দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে প্রথমোক্ত রাশিকে শেষোক্ত রাশিদ্বয়ের বা রাশিসমূহের **সাধারণ গুণিতক** (common multiple) বলে।

দুই বা ততোধিক রাশির বিভিন্ন সাধারণ গুণিতকসমূহের মধ্যে যেটিতে সর্ব্বাপেক্ষা ন্যূনসংখ্যক মৌলিক উৎপাদক (elementary factors) বর্ত্তমান, সেইটিকে রাশি দুইটির, বা রাশিসমূহের **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক** (Lowest Common Multiple) বলে। অর্থাৎ, দুই বা ততোধিক রাশির সেই সাধারণ গুণিতকটিকেই 'লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক' বলে, যেটি, ঐ রাশিসমূহের প্রত্যেকটির গুণিতক হইতে হইলে ন্যূনপক্ষে যতগুলি মৌলিক উৎপাদকবিশিষ্ট হওয়া উচিত, ঠিক ততগুলি মৌলিক উৎপাদকেরই গুণফল। যথা,

ab, $2ab$, a^2b, ab^2, a^2b^2,.......... ইত্যাদির প্রত্যেকটিই a এবং b এর সাধারণ গুণিতক ; কিন্তু, ইহাদের মধ্যে ab ই সর্ব্বাপেক্ষা ন্যূনসংখ্যক মৌলিক উৎপাদকবিশিষ্ট বলিয়া, ইহাকেই a ও b এর 'লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক' বলে।

অনুসি.। দুই বা ততোধিক রাশির যে কোন সাধারণ গুণিতকই, উহাদের 'লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক' দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

টীকা। 'লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক' এর পরিবর্ত্তে সাধারণতঃ **'ল. সা. গু.'** লিখিত হইয়া থাকে।

103. একপদ-রাশিসমূহের ল. সা. গু. নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম :

মনে কর, $x^ay^bz^c$, $x^ly^mz^n$ ও $x^py^qz^r$ এই রাশি তিনটির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

এস্থলে, ধর প্রদত্ত রাশি তিনটির ভিতর x^a, x^l, x^p এই সদৃশ উৎপাদক তিনটির সূচক a, l ও p এর মধ্যে 'p' বৃহত্তম ; তদ্রূপ, y^b, y^m, y^q এর সূচক b, m ও q এর মধ্যে 'q' বৃহত্তম ; এবং z^c, z^n, z^r এর সূচক c, n ও r এর মধ্যে 'c' বৃহত্তম। তাহা হইলে,

প্রদত্ত রাশি তিনটির ল. সা. গু. $= x^py^qz^c$.

যদি প্রদত্ত রাশি তিনটিতে সাংখ্য-সহগ থাকে, তাহা হইলে ঐ সাংখ্য-সহগগুলির ল. সা. গু. উক্ত বীজগণিতীয় ল. সা. গু.র সাংখ্য-সহগরূপে বর্ত্তমান থাকিবে।

যথা, $3x^2y^5zt^3$, $6x^3y^5t^3$, $10y^2zt$, $15xyzt^2$ এর ল. সা. গু. নিম্নলিখিতরূপে নির্ণয় করিতে হইবে :

যেহেতু,

(i) 3, 6, 10, 15 এর ল. সা. গু. = 30 ;

(ii) x^2, x^3, x উৎপাদকগুলির মধ্যে বৃহত্তম সূচকবিশিষ্ট উৎপাদক $= x^3$;

(iii) y^5, y^5, y^2, y " " " " " " $= y^5$;

(iv) z, z, z " " " " " " $= z$;

(v) t^3, t^3, t, t^2 " " " " " " $= t^3$.

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 30x^3y^5zt^3$.

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী বুঝান যাইতেছে।

উদা. 1. $4a^2bc$ এবং $6ab^2d$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 2^2 \times a^2 \times b \times c$.

দ্বিতীয় রাশি $= 2 \times 3 \times a \times b^2 \times d$.

যেহেতু,

(i) 4 ও 6 এর ল. সা. গু. $= 2^2 \times 3$;

(ii) a^2, a এর মধ্যে বৃহত্তম সূচকবিশিষ্ট উৎপাদক $= a^2$;

(iii) b, b^2 " " " " " $= b^2$;

(iv) c প্রথম রাশিতে বর্ত্তমান আছে, কিন্তু দ্বিতীয় রাশিতে নাই ; কাজেই প্রথম রাশিদ্বারা বিভাজ্য হইতে হইলে, ল. সা. গু.তে অন্ততঃ পক্ষে 'c' (অর্থাৎ, c এর প্রথম শক্তি) বর্ত্তমান থাকিবে।

(v) 'd' প্রথম রাশিতে নাই, কিন্তু দ্বিতীয় রাশিতে আছে ; অতএব, দ্বিতীয় রাশিদ্বারা বিভাজ্য হইতে হইলে, ল. সা. গু.তে ন্যূনকল্পে, d এর প্রথম শক্তি 'd' থাকিবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 2^2 \times 3 \times a^2 \times b^2 \times c \times d$
$= 12a^2b^2cd$.

উদা. 2. $24x^2yz$, $18xy^3z^2$ এবং $27x^4y^2z^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 2^3 \times 3 \times x^2 \times y \times z$.

দ্বিতীয় রাশি $= 2 \times 3^2 \times x \times y^3 \times z^2$.

তৃতীয় রাশি $= 3^3 \times x^4 \times y^2 \times z^2$.

যেহেতু, রাশি তিনটির মধ্যে,

2 এর উচ্চতম শক্তি $= 2^3$;
3 " " " $= 3^3$;
x " " " $= x^4$;
y " " " $= y^3$;
z " " " $= z^2$;

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 2^3 \times 3^3 \times x^4 \times y^3 \times z^2$
$= 216x^4y^3z^2$.

উদা. 3. $4x^2(x+a)^2$, $6a^2x(x^2-a^2)$ এবং $9x^3(x^3-a^3)$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 2^2 \times x^2 \times (x+a)^2$.
দ্বিতীয় রাশি $= 2 \times 3 \times a^2 \times x \times (x+a)(x-a)$.
তৃতীয় রাশি $= 3^2 \times x^3 \times (x-a)(x^2+ax+a^2)$.

যেহেতু, রাশি তিনটির মধ্যে,

2 এর উচ্চতম শক্তি $= 2^2$;
3 " " " $= 3^2$;
a " " " $= a^2$;
x " " " $= x^3$;
$x+a$ " " " $= (x+a)^2$;
$x-a$ " " " $= x-a$;
x^2+ax+a^2 " " " $= x^2+ax+a^2$;

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু.
$= 2^2 \times 3^2 \times a^2 \times x^3 \times (x+a)^2(x-a)(x^2+ax+a^2)$
$= 36a^2x^3(x+a)^2(x^3-a^3)$.

টীকা। লক্ষ্য করিবে যে, $x+a$, $x-a$, x^2+ax+a^2 কে এক একটি রাশি বলিয়া গণ্য করিয়া ইহাদের 'শক্তি'-এর বিষয়ই বিবেচনা করা হইয়াছে।

উদা. 4. x^2-3x+2, x^3+2x^2-3x এবং $x^4+x^3-6x^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= (x-1)(x-2)$.
দ্বিতীয় রাশি $= x(x^2+2x-3) = x(x-1)(x+3)$.
তৃতীয় রাশি $= x^2(x^2+x-6) = x^2(x-2)(x+3)$.

যেহেতু, রাশি তিনটির মধ্যে,

x এর উচ্চতম শক্তি $= x^2$;

$x-1$ " " " $= x-1$;

$x-2$ " " " $= x-2$;

$x+3$ " " " $= x+3$;

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. $= x^2(x-1)(x-2)(x+3)$.

উদা. 5. x^3-3x^2+3x-1, x^3-x^2-x+1, x^4-2x^3+2x-1 এবং $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3.$$

$$x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1).$$

$$x^4-2x^3+2x-1=(x^4-1)-2x(x^2-1)$$
$$=(x^2-1)\{(x^2+1)-2x\}$$
$$=(x^2-1)(x-1)^2=(x-1)^3(x+1).$$

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1=x^2(x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)$$
$$=(x^2-2x+1)(x^2+1)=(x-1)^2(x^2+1).$$

রাশি চারিটির মধ্যে বিভিন্ন উৎপাদক হইতেছে, $x-1$, $x+1$ এবং x^2+1.

ইহাদের উচ্চতম শক্তি যথাক্রমে $(x-1)^3$, $x+1$ এবং x^2+1.

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. $=(x-1)^3(x+1)(x^2+1)$.

প্রশ্নমালা 46

ল. সা. গু. নির্ণয় কর (Find the L. C. M. of) :

1. a^2b এবং ab^2.
2. a^3b^2 এবং a^2bc.
3. $6x^2y^4$ এবং $10xy^2$.
4. $4m^2n^3$ এবং $14m^4n^2p$.
5. $8x^2y^3z$ এবং $12x^3y^2z^2$.
6. $4a^2bc$, $10ab^2c$ এবং $14abc^2$.
7. $8a^3b^2c$, $12ab^3c^2$ এবং $20a^2bc^3$.
8. $6x^4y$, $9x^2y^2z$, $12a^2xy^3$ এবং $15axz^2$.
9. a^3b-ab^3 এবং $a^3b^2+a^2b^3$.
10. $4(x-y)^2$, $6(x^2-y^2)$ এবং $8(x+y)^2$.

11. x^2-4x+3 এবং x^2-5x+6.

12. $a^3+2a^2x-3ax^2$ এবং $a^4+a^3x-6a^2x^2$.

13. $a^2(a^2-4)$ এবং $a^4+2a^3-8a^2$.

14. $4a^2x^2$, $2x(x^2-a^2)$ এবং $6a^3x(x^3+a^3)$.

15. $12(x^2+3x-10)$ এবং $16(x^2+4x-12)$.

16. $x^2+2x-15$, $x^2+9x+20$ এবং $x^2+4x-21$.

17. $12a^4-27a^2b^2$, $2a^2+ab-3b^2$ এবং $2a^2-ab-3b^2$.

18. $8a^3+27b^3$, $8a^3-27b^3$ এবং $16a^4+36a^2b^2+81b^4$.

19. $8x^4-50x^2y^2$, $12x^3+24x^2y-15xy^2$ এবং $16x^2-48xy+20y^2$.

20. $4x^2-12ax+9a^2$, $6x^2-7ax-3a^2$ এবং $6x^2-11ax+3a^2$.

21. $2x^2+6x+9$, $4x^3-12x^2+18x$ এবং $4x^4+81$.

22. $9a^2-6ax+x^2$, $6a^2+10ax-4x^2$ এবং $9a^2-21ax+6x^2$.

23. $8x^3-12x^2+6x-1$, $8x^3-4x^2-2x+1$ এবং $2x^2+5x-3$.

24. $x^2-6xy+8y^2$, $x^2-7xy+12y^2$, $x^2+2xy-15y^2$ এবং $x^2+xy-20y^2$.

25. $6x^2-x-1$, $3x^2+7x+2$ এবং $2x^2+3x-2$.
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1869]

26. $1+4x+4x^2-16x^4$ এবং $1+2x-8x^3-16x^4$.
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1871]

27. $9x^4-28x^2+3$, $27x^4-12x^2+1$, $27x^4+6x^2-1$ এবং x^4-6x^2+9.
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1886]

[সর্ব্বশেষ রাশিটির উৎপাদকসমূহ হইতেই প্রথম রাশিটির একটি উৎপাদকসম্বন্ধে ধারণা করা যায়।]

চতুর্দ্দশ অধ্যায়

সহজ ভগ্নাংশ (Easy Fractions)

104. সংজ্ঞা : a এবং b এর যে কোন মানই হউক না কেন, $\frac{a}{b}$ কে একটি বীজগণিতীয় **ভগ্নাংশ** বলে ; এবং ইহাকে এরূপ একটি রাশি বলিয়া গণ্য করা হয়, যাহাকে b দ্বারা গুণ করিলে, গুণফল a এর সমান হয়। অর্থাৎ, $\frac{a}{b}$ কে '$a \div b$' এর সমতুল্য বলিয়া ধরা হয়। $\frac{a}{b}$ ভগ্নাংশটিতে, a কে **লব** (numerator) এবং b কে **হর** (denominator) বলা হইয়া থাকে।

টীকা। কোন রাশিকে অন্য কোন রাশি দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে, উপরে ভাজ্য ও নীচে ভাজক এবং উভয়ের মধ্যে একটি অনুভূমিক রেখা (horizontal line) টানিয়া প্রকাশ করা ভিন্ন বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ আর কিছুই নহে। এইরূপে লিখিত ভাজ্য ও ভাজককে যথাক্রমে ভগ্নাংশের 'লব' ও 'হর' বলা হয়।

105. কোন ভগ্নাংশের 'লব' ও 'হর'কে যে কোন একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না।

a, b এবং m যে কোন তিনটি রাশি হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

ধর, $x=\frac{a}{b}$; তাহা হইলে, $x \times b=\frac{a}{b} \times b=a.$ [সংজ্ঞানুসারে]

$\therefore \ x \times b \times m=a \times m$; অথবা, $x \times bm=am$;

$\therefore \ x=am \div bm$; অর্থাৎ $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$

বিপরীতক্রমে, $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}=\frac{am \div m}{bm \div m}.$

অনুসি.। $\frac{a}{b}=\frac{a \times (-1)}{b \times (-1)}=\frac{-a}{-b}.$ অতএব, লব ও হর, এই উভয়েরই চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিলে ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না।

106. ভগ্নাংশকে 'লঘিষ্ঠ আকারে' পরিবর্ত্তন (Reduction of a fraction to its lowest terms) ঃ

সংজ্ঞা ঃ কোন ভগ্নাংশের লব ও হরের ভিতর কোন গুণনীয়ক সাধারণ (common) না থাকিলে, ভগ্নাংশটিকে 'লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশ' বলা হয়।

অতএব, কোন ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন করিতে হইলে (অথবা, সংক্ষেপে বলিতে গেলে 'সরল করিতে হইলে') এরূপ একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় করিতে হয়, যাহা প্রদত্ত ভগ্নাংশটির সমান এবং যাহার লব ও হরের ভিতর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই ; কাজেই, প্রদত্ত ভগ্নাংশটির লব ও হরের গ. সা. গু. দ্বারা উভয়কে ভাগ করিলেই নির্ণেয় লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশটি পাওয়া যায়।

টীকা। যে সকল ক্ষেত্রে লব ও হরকে পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, সেই সকল ক্ষেত্রে লব ও হর হইতে ঐ সাধারণ উৎপাদকগুলি অপসারণ করিলেই অবিলম্বে লঘিষ্ঠ আকার পাওয়া যায়।

উদা. 1. $\frac{4a^2b^3c^2}{10ab^4c^2}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর।

$$\frac{4a^2b^3c^2}{10ab^4c^2}=\frac{2\times2\times a^2\times b^3\times c^2}{2\times5\times a\times b^4\times c^2}=\frac{2a}{5b}.$$

উদা. 2. সরল কর ঃ $\frac{a^2b^3(a^2-b^2)}{3ab^4(a^3+b^3)}$.

$$\frac{a^2b^3(a^2-b^2)}{3ab^4(a^3+b^3)}=\frac{a^2b^3(a+b)(a-b)}{3ab^4(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{a(a-b)}{3b(a^2-ab+b^2)}.$$

উদা. 3. $\frac{x^2+3x-40}{x^2+4x-32}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর।

লব $=(x+8)(x-5)$.

হর $=(x+8)(x-4)$.

অতএব, প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\frac{(x+8)(x-5)}{(x+8)(x-4)}=\frac{x-5}{x-4}$.

উদা. 4. সরল কর ঃ $\frac{2a^2+3ax-2ab-3bx}{3a^2-2ax-3ab+2bx}$.

লব $=2a(a-b)+3x(a-b)=(a-b)(2a+3x)$.

হর $=3a(a-b)-2x(a-b)=(a-b)(3a-2x)$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=\frac{(a-b)(2a+3x)}{(a-b)(3a-2x)}=\frac{2a+3x}{3a-2x}$.

প্রশ্নমালা 47

লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন কর (Reduce to lowest terms) :

1. $\frac{2a^2b^3}{4a^2b^4}$. 2. $\frac{6x^2y^3}{8xy^4}$. 3. $\frac{4a^2xy^2}{10ax^2y^2}$.

4. $\frac{15x^3y^2z^4}{25x^2y^4z^3}$. 5. $\frac{18a^2bc^4d^5}{27a^3b^2c^4d^4}$. 6. $\frac{16x^2a^4y^3z^5}{40a^3z^4x^3y^4}$.

7. $\frac{70a^2b^3c^4d^7}{105c^4d^2a^3b^3}$. 8. $\frac{39m^2n^5p^3q^6}{65p^2m^3n^4q^5}$. 9. $\frac{x^2-a^2}{x^2+ax}$.

10. $\frac{x^2-3x}{9x-x^3}$. 11. $\frac{4x^2-9a^2}{4x^2+6ax}$. 12. $\frac{3a^2-12ab}{48b^2-3a^2}$.

13. $\frac{3ax-12a^2}{x^2-16a^2}$. 14. $\frac{2x^4-4a^2x^2}{x^4-4a^2x^2+4a^4}$. 15. $\frac{4x^2+8x}{x^2+5x+6}$.

16. $\frac{x^2+2x-8}{x^2+x-12}$. 17. $\frac{x^2+2x-15}{x^2+9x+20}$. 18. $\frac{a^2-3ab-4b^2}{a^2-4ab-5b^2}$.

19. $\frac{a^4-a^3b+a^2b^2}{a^3+b^3}$. 20. $\frac{1-7x+12x^2}{1-8x+15x^2}$.

21. $\frac{x^2-6xy+5y^2}{x^2+2xy-35y^2}$. 22. $\frac{1-9a^2+14a^4}{1-4a^2-21a^4}$.

23. $\frac{x^4-8x^2-65}{x^4+x^2-20}$. 24. $\frac{3a^3x+9a^2x^2+27ax^3}{a^3-27x^3}$.

25. $\frac{2x^2-x-6}{3x^2-2x-8}$. 26. $\frac{3x^2-5ax+2a^2}{3x^2+ax-2a^2}$.

27. $\frac{3x^2+16ax+5a^2}{3x^2+22ax+7a^2}$. 28. $\frac{6x^2-7x-20}{9x^2+6x-8}$.

29. $\frac{2x^2+3ax-20a^2}{3x^2+5ax-28a^2}$. 30. $\frac{10-17ax+3a^2x^2}{5-26ax+5a^2x^2}$.

31. $\frac{x^2-(a-b)x-ab}{x^3+bx^2+ax+ab}$. 32. $\frac{6ac+10bc+9ax+15bx}{6c^2+9cx-2c-3x}$.

33. $\frac{8bx+12ab+6xy+9ay}{12bx+8ab+9xy+6ay}$. 34. $\frac{2a^2+ab-b^2}{a^3+a^2b-a-b}$.

35. $\frac{a^2-b^2-2bc-c^2}{a^2+2ab+b^2-c^2}$.

107. দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশকে সাধারণ হর-বিশিষ্ট করা (Reduction of two or more fractions to a common denominator) ঃ

ধর, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, ইত্যাদি কতকগুলি ভগ্নাংশ নির্দ্দেশ করিতেছে এবং L উহাদের হরসমূহের (অর্থাৎ, b, d, f, ইত্যাদির) ল. সা. গু.। এখন, যেহেতু কোন ভগ্নাংশের লব ও হরকে যে কোন **একই** রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না, অতএব,

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times(L\div b)}{b\times(L\div b)}=\frac{a\times(L\div b)}{L};$$

$$\frac{c}{d}=\frac{c\times(L\div d)}{d\times(L\div d)}=\frac{c\times(L\div d)}{L};$$

$$\frac{e}{f}=\frac{e\times(L\div f)}{f\times(L\div f)}=\frac{e\times(L\div f)}{L};\text{ ইত্যাদি।}$$

কাজেই, তৃতীয় স্তম্ভ (column)-এর ভগ্নাংশগুলি যথাক্রমে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির সমান এবং ইহাদের প্রত্যেকের হরই L.

সুতরাং, কতিপয় ভগ্নাংশকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করার নিম্নলিখিত নিয়মটি পাওয়া গেল ঃ

ভগ্নাংশসমূহের হরগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া, লব্ধ ল. সা. গু. কে এক একটি হর দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগফল পাওয়া যায়, তদ্দ্বারা উক্ত হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ কর।

উদা. 1. $\frac{x}{a+b}$, $\frac{x^2}{a(a-b)}$ এবং $\frac{x^3}{b(a^2-b^2)}$ কে সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তন কর।

প্রদত্ত হরসমূহের ল. সা. গু. $=ab(a^2-b^2)$; এবং ইহাকে ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকের হর দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলি যথাক্রমে $ab(a-b)$, $b(a+b)$ এবং a হইবে।

অতএব, $$\frac{x}{a+b}=\frac{x\times ab(a-b)}{(a+b)\times ab(a-b)}=\frac{xab(a-b)}{ab(a^2-b^2)};$$

$$\frac{x^2}{a(a-b)}=\frac{x^2\times b(a+b)}{a(a-b)\times b(a+b)}=\frac{x^2b(a+b)}{ab(a^2-b^2)};$$

$$\frac{x^3}{b(a^2-b^2)}=\frac{x^3\times a}{b(a^2-b^2)\times a}=\frac{x^3a}{ab(a^2-b^2)}.$$

উদা. 2. $\frac{x-1}{x^2-5x+6}, \frac{x-2}{x^2-4x+3}$ এবং $\frac{x-3}{x^2-3x+2}$ কে সাধারণ হর-বিশিষ্ট কর।

হরগুলি যথাক্রমে $(x-2)(x-3)$, $(x-1)(x-3)$ এবং $(x-1)(x-2)$ এবং ইহাদের ল. সা. গু. $=(x-1)(x-2)(x-3)$; এই ল. সা. গু. কে হরসমূহের প্রত্যেকটি দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফলগুলি যথাক্রমে $x-1$, $x-2$ এবং $x-3$ হয়। অতএব,

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{(x-1)(x-1)}{(x^2-5x+6)(x-1)}=\frac{x^2-2x+1}{x^3-6x^2+11x-6};$$

$$\frac{x-2}{x^2-4x+3}=\frac{(x-2)(x-2)}{(x^2-4x+3)(x-2)}=\frac{x^2-4x+4}{x^3-6x^2+11x-6};$$

$$\frac{x-3}{x^2-3x+2}=\frac{(x-3)(x-3)}{(x^2-3x+2)(x-3)}=\frac{x^2-6x+9}{x^3-6x^2+11x-6}.$$

প্রশ্নমালা 48

সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্তন কর (Reduce to a common denominator):

1. $\frac{a}{2b}, \frac{3c}{4d}, \frac{e}{f}$.

2. $\frac{x^2}{2bc}, \frac{y^2}{3ca}, \frac{z^2}{4ab}$.

3. $\frac{ab}{4xy^2}, \frac{bc}{6x^2y}, \frac{ca}{10x^3}$.

4. $\frac{a}{a-b}, \frac{b}{a+b}, \frac{c}{a(a+b)}$.

5. $\frac{x^2}{a^2+2ab}, \frac{y^2}{a-2b}$.

6. $\frac{2a}{a-b}, \frac{a-c}{ab-a^2}$.

7. $\frac{2a}{a-b}, \frac{3b}{b-a}, \frac{4c}{a+b}$.

8. $\frac{2x}{a^2(a+x)}, \frac{3y}{b^2(a-x)}, \frac{4z}{c^2(a^2-x^2)}$.

9. $\frac{a^2}{2xy-3y^2}, \frac{b^2}{2x^2+3xy}, \frac{c^2}{4x^3y-9xy^3}$.

10. $\frac{a^2}{x^2+x+1}, \frac{b^2}{x^2-x+1}$.

11. $\frac{3}{x^2-x-2}, \frac{4}{x^2+x-6}$.

12. $\frac{a-2b}{a(a^2-2ab+4b^2)}, \frac{bc}{a^3+8b^3}$.

13. $\frac{a}{a-3b}, \frac{b}{a^2+3ab+9b^2}, \frac{c}{a^3-27b^3}$.

14. $\frac{a}{b(a-b-c)}, \frac{b}{a(a-b+c)}, \frac{c}{a^2+b^2-c^2-2ab}$.

15. $\frac{c-a}{(a-b)(b-c)}, \frac{b-a}{(a-c)(b-c)}, \frac{b-c}{(c-a)(a-b)}$.

108. ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ : 52 নিয়মের তৃতীয় অনুসিদ্ধান্তে দেখা গিয়াছে যে, a, b, c, d, e যে কোন রাশিই হউক না কেন,

$$a(b+c+d+e)=ab+ac+ad+ae.$$

অতএব, বিপরীতভাবে, $\frac{ab+ac+ad+ae}{a}=b+c+d+e=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}+\frac{ad}{a}+\frac{ae}{a}.$

সুতরাং, ab, ac, ad, ae এর পরিবর্তে যথাক্রমে p, q, r, s বসাইলে, দেখা যায় যে, $\frac{p+q+r+s}{a}=\frac{p}{a}+\frac{q}{a}+\frac{r}{a}+\frac{s}{a}$, এবং এক্ষেত্রে, p, q, r, s ও a যে কোন রাশি।

কাজেই, কতকগুলি সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের যোগফল এরূপ একটি ভগ্নাংশ হইবে, যাহার লব, প্রদত্ত ভগ্নাংশসমূহের লবের সমষ্টির সমান এবং হর, উহাদের সাধারণ হর।

অতএব, ভগ্নাংশসমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে উহাদিগকে সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া, লব্ধ লবগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টিকে সাধারণ হর দ্বারা ভাগ করিতে হয়।

উদা. 1. $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}$ এর মান নির্ণয় কর।

যেহেতু $\frac{b}{b-a}=\frac{b\times(-1)}{(b-a)\times(-1)}=\frac{-b}{a-b}$,

অতএব, $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}=\frac{a}{a-b}+\frac{-b}{a-b}=\frac{a+(-b)}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}=1.$

উদা. 2. $\frac{x}{x+a}+\frac{a}{x-a}$ এর মান নির্ণয় কর।

যেহেতু হরগুলির ল. সা. গু. $=x^2-a^2$,

সুতরাং, $\frac{x}{x+a}=\frac{x(x-a)}{x^2-a^2}$ এবং $\frac{a}{x-a}=\frac{a(x+a)}{x^2-a^2}$.

অতএব, নির্ণেয় মান $=\frac{x(x-a)}{x^2-a^2}+\frac{a(x+a)}{x^2-a^2}=\frac{x(x-a)+a(x+a)}{x^2-a^2}=\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$

উদা. 3. $\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a^2+b^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

এস্থলে, তিনটি ভগ্নাংশকেই একসঙ্গে সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্তন করা তত সুবিধাজনক নহে ; কাজেই, নিম্নলিখিত পদ্ধতি অবলম্বিত হইল।

এখন, $\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)+b}{a^2-b^2}=\frac{a}{a^2-b^2}.$

অতএব, নির্ণেয় মান $= \frac{a}{a^2-b^2} - \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{a(a^2+b^2)-a(a^2-b^2)}{a^4-b^4} = \frac{2ab^2}{a^4-b^4}$.

উদা. 4. সরল কর : $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2+4} + \frac{32}{x^4+16}$.

এখন, $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2)-(x-2)}{x^2-4} = \frac{4}{x^2-4}$;

$$\frac{4}{x^2-4} - \frac{4}{x^2+4} = \frac{4(x^2+4)-4(x^2-4)}{x^4-16} = \frac{32}{x^4-16}.$$

সর্ব্বশেষে, $\frac{32}{x^4-16} + \frac{32}{x^4+16} = \frac{32(x^4+16)+32(x^4-16)}{x^8-256}$

$= \frac{64x^4}{x^8-256}$; ইহাই নির্ণেয় ফল।

উদা. 5. সরল কর : $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{a+4b}$.

প্রদত্ত রাশি $= \left\{\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b}\right\} - \left\{\frac{1}{a+3b} - \frac{1}{a+4b}\right\}$.

এখন দেখা যায় যে,

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} = \frac{(a+2b)-(a+b)}{(a+b)(a+2b)} = \frac{b}{(a+b)(a+2b)};$$

এবং $\frac{1}{a+3b} - \frac{1}{a+4b} = \frac{(a+4b)-(a+3b)}{(a+3b)(a+4b)} = \frac{b}{(a+3b)(a+4b)}$;

সর্ব্বশেষে,

$$\frac{b}{(a+b)(a+2b)} - \frac{b}{(a+3b)(a+4b)} = \frac{b(a+3b)(a+4b)-b(a+b)(a+2b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)};$$

ইহার লব $= b(a^2+7ab+12b^2) - b(a^2+3ab+2b^2)$

$= b(4ab+10b^2) = 2b^2(2a+5b)$.

অতএব, নির্ণেয় ফল $= \frac{2b^2(2a+5b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)}$.

প্রশ্নমালা 49

মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

1. $\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b}$.

2. $\frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz} + \frac{z-x}{zx}$.

3. $\frac{a}{a-x}+\frac{x}{x-a}$.

4. $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$.

5. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{2(a+b)}$.

6. $\frac{4x^2+9y^2}{4x^2-9y^2}-\frac{2x-3y}{2x+3y}$.

7. $\frac{a}{(a+b)^2}-\frac{b}{a^2-b^2}$.

8. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$.

9. $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}$.

10. $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}$.

11. $\frac{1}{x^2+7x+10}+\frac{1}{x^2+13x+40}$.

12. $\frac{1}{2x+3y}-\frac{(2x-3y)^2}{8x^3+27y^3}$.

13. $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}+\frac{2ab}{b^2-a^2}$.

14. $\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a-2b}+\frac{2a}{4b^2-a^2}$.

15. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}-\frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

16. $\frac{a-2x}{a+2x}-\frac{a+2x}{a-2x}+\frac{8ax}{a^2+4x^2}$.

17. $\frac{3x+1}{x-3}-\frac{x-3}{3x+9}-\frac{5x^2+24x}{2x^2-18}$.

18. $\frac{4a-b}{1-4ab}-\frac{4a+b}{1+4ab}-\frac{4b(1-8a^2)}{16a^2b^2-1}$.

19. $\frac{x}{x-2a}+\frac{x}{x+2a}+\frac{2x^2}{x^2+4a^2}$.

20. $\frac{b}{a-b}+\frac{b}{a+b}+\frac{2ab}{a^2+b^2}+\frac{4a^3b}{a^4+b^4}$.

21. $\frac{x}{3x-y}+\frac{x}{3x+y}+\frac{6x^2}{9x^2+y^2}$.

22. $\frac{1}{x-3a}-\frac{1}{2x+6a}-\frac{x-9a}{2x^2+18a^2}$.

23. $\frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a-b)^2}-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-2$.

24. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$.

25. $\frac{1}{x-a}-\frac{2}{2x+a}+\frac{1}{x+a}-\frac{2}{2x-a}$.

26. $\frac{3}{a-x}-\frac{1}{x+3a}+\frac{3}{a+x}+\frac{1}{x-3a}$.

27. $\frac{2}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^2-1}$.

28. $\frac{a-c}{(a-b)(x-a)}+\frac{b-c}{(b-a)(x-b)}$.

29. $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{2}{x^2-8x+15}$.

30. $\frac{1}{x^2+5ax+4a^2}+\frac{1}{x^2+11ax+28a^2}+\frac{2}{x^2+20ax+91a^2}$.

31. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{2x}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}$.

32. $\dfrac{1}{1-x+x^2}-\dfrac{1}{1+x+x^2}-\dfrac{2x}{1+x^2+x^4}$.

33. $\dfrac{1}{1+x+x^2}-\dfrac{1}{1-x+x^2}+\dfrac{2x}{1-x^2+x^4}$.

34. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x^2+2x+4}+\dfrac{6x}{x^3+8}$.

35. $\dfrac{11}{16(2x^2-6ax+9a^2)}-\dfrac{11}{32x^2+96ax+144a^2}+\dfrac{33ax}{4(4x^4-81a^4)}$.

109. **ভগ্নাংশের গুণন :** $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{c}{d}$ যে কোন দুইটি ভগ্নাংশ হইলে, $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\text{ধর, } x=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}.$$

$$\text{তাহা হইলে, } x\times b\times d=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times b\times d=\frac{a}{b}\times b\times\frac{c}{d}\times d$$

$$=\left(\frac{a}{b}\times b\right)\times\left(\frac{c}{d}\times d\right)=a\times c;$$

$$\text{অথবা, } x\times bd=ac; \qquad \therefore\ x=\frac{ac}{bd};\ \text{অর্থাৎ, } \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

$$\text{এইরূপ, } \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf};$$

$$\text{এবং, } \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{ace}{bdf}\times\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh};\ \text{ইত্যাদি।}$$

সুতরাং, কতকগুলি ভগ্নাংশের গুণফলও এইরূপ একটি ভগ্নাংশ, যাহার লব, প্রদত্ত লবগুলির গুণফলের সমান এবং যাহার হর, প্রদত্ত হরগুলির গুণফলের সমান।

অনুসি.। যেহেতু $c=\frac{c}{1}$, অতএব, $\frac{a}{b}\times c=\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}$.

উদা.।1. গুণ কর : $\frac{x^2}{yz}$, $\frac{y^2}{zx}$ এবং $\frac{z^2}{xy}$.

$$\text{নির্ণেয় গুণফল}=\frac{x^2\times y^2\times z^2}{yz\times zx\times xy}=\frac{x^2\times y^2\times z^2}{y^2\times z^2\times x^2}=1.$$

উদা. 2. $\dfrac{x(a-x)}{a^2+2ax+x^2}$ কে $\dfrac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$ দ্বারা গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=\dfrac{x(a-x)\times a(a+x)}{(a^2+2ax+x^2)(a^2-2ax+x^2)}=\dfrac{ax(a-x)(a+x)}{(a+x)^2(a-x)^2}$

$$=\frac{ax}{(a+x)(a-x)}=\frac{ax}{a^2-x^2}.$$

উদা. 3. গুণ কর : $\dfrac{1-x^2}{1+y}$, $\dfrac{1-y^2}{x+x^2}$ এবং $1+\dfrac{x}{1-x}$.

যেহেতু $1+\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1-x+x}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$,

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=\dfrac{(1+x)(1-x)}{1+y}\times\dfrac{(1+y)(1-y)}{x(1+x)}\times\dfrac{1}{1-x}$

$$=\frac{(1+x)(1-x)(1+y)(1-y)}{(1+y)x(1+x)(1-x)}=\frac{1-y}{x}.$$

প্রশ্নমালা 50

গুণ কর (Multiply together) :

1. $\dfrac{2a^2}{3ab}$, $\dfrac{9b^2}{16ac}$ এবং $\dfrac{8c^2}{9bc}$.

2. $\dfrac{4a^2b^2}{3c^2}$, $\dfrac{9c^2}{16d^2}$ এবং $\dfrac{4d^2}{27b^2}$.

3. $\dfrac{x^3}{yz}$, $\dfrac{y^3}{zx}$ এবং $\dfrac{z^3}{xy}$.

4. $\dfrac{7a^2b^2c^2}{12xyz}$ এবং $\dfrac{4x^3y^3z^3}{21a^4b^4c^4}$.

5. $\dfrac{12m^2n^3}{7xy^2z}$ এবং $\dfrac{35x^3yz}{96m^3n}$.

সরল কর (Simplify) :

6. $\dfrac{x+1}{x-1}\times\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x}$.

7. $\dfrac{a^2-9b^2}{a^2+3ab}\times\dfrac{3a^2}{a^2-3ab}$.

8. $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab}\times\dfrac{(a+b)^2}{a^2+ab+b^2}$.

9. $\dfrac{a^3+8x^3}{a^3-2a^2x}\times\dfrac{a^2-4ax+4x^2}{a^2-2ax+4x^2}$.

10. $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4}\times\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9}$.

11. $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-2x-15}\times\dfrac{x^2-3x-18}{x^2-8x+12}$.

12. $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}\times\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$.

13. $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\times\dfrac{a-b}{a^2+ab}$.

14. $\dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2-5x-2}\times\dfrac{3x^2+x}{4x-2}$.

15. $\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-4x-21}\times\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-12x+32}$.

16. $\dfrac{a^2-x^2}{a+b}\times\dfrac{a^2-b^2}{ax+x^2}\times\left(a+\dfrac{ax}{a-x}\right)$.

17. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{x}{a}+1\right)\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x}{a}+1\right)$. 18. $\left(\dfrac{4a}{3x}+\dfrac{3x}{2b}\right)\left(\dfrac{2b}{3x}+\dfrac{3x}{4a}\right)$.

19. $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{c}\right)-\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{c}{d}-\dfrac{d}{c}\right)$.

20. $\dfrac{2x^2-7x+3}{2x^2+7x-4}\times\dfrac{3x^2+11x-4}{3x^2+8x-3}\times\dfrac{2x^2+x-15}{2x^2-11x+15}$.

21. $\dfrac{b^2-c^2-a^2+2ac}{c^2+a^2-b^2+2ac}\times\dfrac{b^2+c^2-a^2-2bc}{a^2-b^2+c^2-2ac}$.

22. $\dfrac{c^2-a^2-b^2+2ab}{b^2-c^2-a^2+2ac}\times\dfrac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2+b^2-c^2-2ab}$.

110. ভগ্নাংশের ভাগ : $\dfrac{a}{b}$ এবং $\dfrac{c}{d}$ যে কোন দুইটি ভগ্নাংশ হইলে, $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

ধর, $x=\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}$. তাহা হইলে, $x\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}$;

[$\because$ m ও n যে কোন রাশিই হউক না কেন, $m\div n\times n=m$]

$\therefore$ $x\times\dfrac{c}{d}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$; অথবা, $x=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$. $\left[\because\ \dfrac{c}{d}\times\dfrac{d}{c}=1.\right]$

স্বতরাং, একটি ভগ্নাংশকে অপর একটি ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ করিতে হইলে, প্রথমটিকে শেষোক্তটির অন্যোন্যক (reciprocal) দ্বারা গুণ করিতে হয়।

অনুসি.। $\dfrac{a}{b}\div c=\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{1}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{1}{c}=\dfrac{a}{bc}$.

উদা. 1. সরল কর : $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}\div\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}$.

$$\text{নির্ণেয় ফল}=\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}\times\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}=\frac{(a^3+b^3)(a-b)}{(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)}$$
$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)}{(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)}=1.$$

উদা. 2. সরল কর : $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+7x+12}\div\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+x-12}\times\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-4x+3}$.

$$\text{নির্ণেয় ফল}=\frac{x^2+x-2}{x^2+7x+12}\times\frac{x^2+x-12}{x^2-3x-10}\times\frac{x^2-4x-5}{x^2-4x+3}$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}\times\frac{(x+4)(x-3)}{(x-5)(x+2)}\times\frac{(x-5)(x+1)}{(x-3)(x-1)}$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)(x+4)(x-3)(x-5)(x+1)}{(x+3)(x+4)(x-5)(x+2)(x-3)(x-1)}=\frac{x+1}{x+3}.$$

উদা. 3. সরল কর : $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}\div\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}\times\dfrac{a^2}{a^2+b^2}.$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

এখন, $$\frac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}=\frac{\dfrac{a(a+b)-a(a-b)}{a^2-b^2}}{\dfrac{b(a+b)-b(a-b)}{a^2-b^2}}=\frac{2ab}{a^2-b^2}\div\frac{2b^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{2ab}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{2b^2}=\frac{a}{b}\,; \qquad \cdots\ (1)$$

এবং $$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}=\frac{\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2}}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\div\frac{4ab}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab}. \qquad \cdots\ (2)$$

অতএব, (1) এবং (2) হইতে, প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{a}{b}\div\frac{a^2+b^2}{2ab}\times\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a}{b}\times\frac{2ab}{a^2+b^2}\times\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{2a^4}{(a^2+b^2)^2}.$$

প্রশ্নমালা 51

সরল কর (Simplify) :

1. $\dfrac{4a^2bc}{15xy^2z}\div\dfrac{8ab^2c}{25x^2yz}.$ 2. $\dfrac{a^2+ab}{a-b}\div\dfrac{ab}{a^2-b^2}.$ 3. $\dfrac{x^2-49}{x^2-25}\div\dfrac{x+7}{x+5}.$

4. $\dfrac{a^4-b^4}{a^2+2ab+b^2}\div\dfrac{a^2+b^2}{a+b}.$ 5. $\dfrac{m^2-9n^2}{m^2+5mn+6n^2}\div\dfrac{m^2-2mn-3n^2}{m^2-n^2}.$

6. $\dfrac{m^3-n^3}{m+n}\div\dfrac{m^2+mn+n^2}{m^2-n^2}.$ 7. $\left(\dfrac{2x+y}{x+y}-1\right)\div\left(1-\dfrac{y}{x+y}\right).$

8. $\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}\right)\div\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}\right).$

9. $\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$. 10. $\frac{x^2-4}{x^2+3x-18}\div\frac{x^2-5x-14}{x^2-36}$.

11. $\left(1-\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)\div\left(\frac{p^3-q^3}{p-q}-3pq\right)$.

12. $\frac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{(a+b)^2-4ab}\div\frac{(a-b)^2+4ab}{a^3-b^3-3ab(a-b)}$.

13. $\frac{x^3+y^3}{(x-y)^2+3xy}\div\frac{(x+y)^2-3xy}{x^3-y^3}\times\frac{xy}{x^2-y^2}$.

14. $\frac{a(a-b)^2+4a^2b}{ab+b^2}\div\frac{a^2-b^2}{ab}\times\frac{b(a+b)^2-4ab^2}{a^2-ab}$.

15. $\frac{x^2-x-30}{x^2-36}\div\frac{x^2+3x-10}{x^2+2x-8}\div\frac{x+4}{2x^2+12x}$.

16. $\frac{x^2+3x-108}{x^2-64}\div\frac{x^2+6x-72}{x^2+x-56}\div\frac{x^2-16x+63}{x^2-14x+48}$.

17. $\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$.

18. $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\div\left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1868]

19. $\frac{a^4-b^4}{(a+b)^3-3ab(a+b)}\div\frac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)^2-3ab}\times\frac{a}{(a+b)^2-2ab}$.

20. $\frac{(a-b)\{(a+b)^2-ab\}}{(a-b)^2+2ab}\div\frac{(a-b)^2+3ab}{(a+b)\{(a-b)^2+ab\}}\times\frac{(a+b)^2-2ab}{(a+b)^2-3ab}$.

21. $\dfrac{\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}}{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)}\times\dfrac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1874]

সরল সমীকরণ (Simple Equation)

111. সংজ্ঞা: বীজগণিতীয় প্রতীকসমন্বিত দুইটি রাশি সমতাচিহ্ন দ্বারা সম্বদ্ধ হইলে, একটি **সমীকরণ** (equation) উৎপন্ন হইল, বলা হইয়া থাকে; এবং সমতাচিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থিত রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে সমীকরণের একটি **পার্শ্ব** (side) বা **পক্ষ** (member) বলা হয়।

সমীকরণ শব্দটিকে অবশ্য এইরূপ ব্যাপক অর্থে প্রয়োগ করা হয় না। একটি বীজগণিতীয় রাশি অন্য একটি বীজগণিতীয় রাশির সমান হইলে, উহাদের সমতা, রাশিদ্বয়ের অন্তর্গত অক্ষর বা অক্ষরসমূহের যে কোন মানের জন্যও রক্ষিত হইতে পারে; যথা, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; অথবা, অক্ষর বা অক্ষরসমূহের এক বা একাধিক নির্দ্দিষ্ট মানের জন্যই কেবলমাত্র রক্ষিত হয়; যথা, $8=4x$ (যাহা কেবলমাত্র, $x=2$ হইলেই রক্ষিত হয়)। এই শেষোক্ত শ্রেণীকেই শুধু **সমীকরণ** (equation) [প্রকৃতপক্ষে, **সাপেক্ষ সমীকরণ** (equation of condition)] বলে, এবং পূর্ব্বোক্ত শ্রেণীকে **অভেদ** (identity)] বলে।

যথা, $(x+1)+(2x+3)=3x+4$ একটি অভেদ; কিন্তু $(x+1)+(x+3)=3x+2$ একটি সমীকরণ; কারণ, প্রথম সমতাটি x এর যে কোন মানের জন্যই রক্ষিত হয়, কিন্তু দ্বিতীয়টি কেবলমাত্র $x=2$ হইলেই বজায় থাকে, অন্য কোন মানের জন্য বজায় থাকে না।

সমীকরণস্থিত যে অক্ষরটির এক বা একাধিক নির্দ্দিষ্ট মান সমীকরণের উভয় পক্ষকে সমানমানবিশিষ্ট করে, সেই অক্ষরটিকে সমীকরণের **অজ্ঞাত রাশি** (unknown quantity) বলে। সাধারণতঃ, সমীকরণের অজ্ঞাত রাশিকে বর্ণমালার শেষাংশের অক্ষরসমূহের (যথা, x, y, z,...এর) যে কোন একটি দ্বারা সূচিত করা হয়।

অজ্ঞাত রাশির যে নির্দ্দিষ্ট মানটি বা মানগুলি সমীকরণের উভয় পক্ষকে সমান করে, সেই মানটি বা মানগুলিদ্বারা সমীকরণটি **সিদ্ধ** হইয়াছে, এরূপ বলা হয়; এবং ঐ মানটি বা মানগুলিকে সমীকরণের **বীজ** (root) বলে।

কোন সমীকরণ '**সমাধান করা** (to solve)' অর্থে 'উহার বীজ নির্ণয় করা' বুঝায়।

যে সমীকরণে প্রথমশক্তিবিশিষ্ট একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাহাকে **সরল সমীকরণ** (simple equation) বলে।

112. স্বতঃসিদ্ধ: সমীকরণের সমাধান-প্রণালী সাধারণতঃ নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধগুলির উপর নির্ভর করে:

(1) সমান সমান বস্তুর সহিত সমান সমান বস্তু যোগ করিলে যোগফলগুলিও সমান হইবে।

(2) সমান সমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলিও সমান হইবে।

(3) সমান সমান বস্তুকে সমান সমান সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফলগুলিও সমান হইবে।

(4) সমান সমান বস্তুকে সমান সমান সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলিও সমান হইবে।

অনুসি. 1. স্বতঃসিদ্ধ (1) ও (2) হইতে আমরা সমীকরণের বীজ নির্ণয় করিবার নিম্নলিখিত অত্যাবশ্যকীয় নিয়মটি প্রবর্ত্তন করিতে পারি।

সমীকরণের যে কোন পার্শ্বের একটি পদকে উহার চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিয়া অপর পার্শ্বে পক্ষান্তর (transpose) করা যাইতে পারে।

এই প্রক্রিয়াকে **পক্ষান্তরকরণ** (transposition) বলে।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, ধর, $x-a=b+c$; এই সমতার দুই পার্শ্বেই a যোগ করিলে,

$x-a+a=b+c+a$, [স্বতঃসিদ্ধ 1]

অথবা, $x=b+c+a$;

আবার, উপরিউক্ত সমতার দুই পার্শ্ব হইতে c বিয়োগ করিলে,

$x-a-c=b+c-c=b$. [স্বতঃসিদ্ধ 2]

অতএব, প্রথম ক্ষেত্রে, বাম পার্শ্ব হইতে $-a$ কে পক্ষান্তর করিয়া ডা'ন পার্শ্বে $+a$ রূপে পাওয়া গেল, এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, ডা'ন পার্শ্ব হইতে $+c$ কে পক্ষান্তর করিয়া বাম পার্শ্বে $-c$ রূপে পাওয়া গেল।

তদ্রূপ, $x-a=b-c+d$ হইলে, $x-a-b+c-d=0$ হইবে।

অনুসি. 2. সমীকরণস্থিত প্রত্যেকটি পদের চিহ্ন যুগপৎ পরিবর্ত্তন করিলে সমীকরণের সমতা নষ্ট হয় না।

কারণ, ধর, $x-a=b+c$;

তাহা হইলে, তৃতীয় স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে,

$$(x-a)\times(-1)=(b+c)\times(-1);$$

অথবা, $-x+a=-b-c$.

113. সহজ উদাহরণ : উপরিউক্ত নিয়মাবলীর সাহায্যে সরল সমীকরণের বীজ নির্ণয় করিবার পদ্ধতি পরিষ্কার করিয়া বুঝাইবার জন্য নিম্নে কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া গেল :

উদা. 1. সমাধান কর : $18x = 54$.

[দ্রষ্টব্য : প্রশ্নটিকে অন্যরূপেও বলা যায় ; যথা, $18x = 54$ হইলে, x এর মান কত ? অথবা, কোন্ সংখ্যাকে 18 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 54 হইবে ?]

যেহেতু $18x = 54$,

অতএব, উভয় পক্ষকে 18 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{18x}{18} = \frac{54}{18}; \quad \text{অথবা, } x = 3.$$

সুতরাং, x এর নির্ণেয় মান $= 3$.

উদা. 2. সমাধান কর : $3x + 5 = x + 19$.

[দ্রষ্টব্য : অন্যরূপেও বলা যায় ; যথা, যদি $3x + 5 = x + 19$ হয়, তবে x এর মান কত ?]

যেহেতু $3x + 5 = x + 19$,

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$3x - x = 19 - 5$; অথবা, $2x = 14$;

এখন, উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$x = 7$ পাওয়া গেল। [স্বতঃসিদ্ধ 4]

সুতরাং, x এর নির্ণেয় মান $= 7$.

উদা. 3. সমাধান কর : $-11x + 2(3 - x) = 32$.

বন্ধনী অপসারণ করিয়া, $-11x + 6 - 2x = 32$,

অথবা, $-13x + 6 = 32$,

অথবা, $-13x = 32 - 6$, [পক্ষান্তর করিয়া]

অথবা, $-13x = 26$.

এখন, উভয় পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করিয়া,

$(-1) \times (-13x) = (-1) \times 26$.

অথবা, $13x = -26$;

∴ উভয় পক্ষকে 13 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$x = -\tfrac{26}{13} = -2.$$

সুতরাং, x এর নির্ণেয় মান $= -2$.

উদা. 4. সমাধান কর : $(x+2)(3x+4)-6x=10+(3x+2)(x+1)$.

বাম পক্ষ $=3x^2+10x+8-6x=3x^2+4x+8$;

ডা'ন পক্ষ $=10+3x^2+5x+2=3x^2+5x+12$.

অতএব, $3x^2+4x+8=3x^2+5x+12$.

উভয় পক্ষ হইতে $3x^2$ বাদ দিয়া,

$4x+8=5x+12$; [স্বতঃসিদ্ধ 2]

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$4x-5x=12-8$; বা, $-x=4$;

কাজেই, $x=-4$. [পূর্ব্ব নিয়মের দ্বিতীয় অনুসি.]

সুতরাং, x এর নির্ণেয় মান $=-4$.

টীকা। অতি সহজেই প্রত্যক্ষ করা যাইতে পারে যে, সমীকরণের উভয় পক্ষে x এর পরিবর্ত্তে উহার এই মান (অর্থাৎ -4) বসাইলে, প্রত্যেক পক্ষই 40 এর সমান হয়।

উদা. 5. $\frac{x}{6}+5=\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$ হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

যেহেতু $\frac{x}{6}+5=\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$,

উভয় পক্ষকে 12 (হরগুলির ল. সা. গু.) দ্বারা গুণ করিয়া,

$12\left(\frac{x}{6}+5\right)=12\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right)$, [স্বতঃসিদ্ধ 3]

অথবা, $2x+60=4x+3x=7x$;

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $2x-7x=-60$,

অথবা, $-5x=-60$;

কাজেই, -5 দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করিয়া, $x=12$.

সুতরাং, সমীকরণের নির্ণেয় বীজ $=12$.

প্রশ্নমালা 52

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $4x=16$.
2. $3x=-15$.
3. $7x=-28$.
4. $-5x=25$.
5. $\frac{x}{5}=-1$.
6. $\frac{-x}{3}=20$.
7. $3x+5(2-x)=-16$.
8. $5(1-x)+3(2-x)=-29$.

9. $4(2-x)+2(3-2x)=30.$

10. $7(3-2x)+5(x-1)=34.$

11. $4x+3=2x+5.$

12. $3x+2=x+6.$

13. $5x-6=2x+3.$

14. $15x-9=11x-25.$

15. $4(x-3)=2(x-6).$

16. $2(x-15)=5(x-11)+4.$

17. $19-3x=5x+35.$

18. $3(x-2)+7(2x-3)=5(1-2x)-59.$

19. $13x-4(5x-8)+17=0.$

20. $14(x-4)+3(x+5)=6(7-2x)+4.$

21. $8(2x-7)-9(3x-14)=15.$

22. $3x-13(2x-13)=4x-20.$

23. $49+13(5x+27)=8(5+x)-3x.$

24. $16-5(7x-2)=13(x-2)+4(13-x).$

25. $8x+5(x+7)+9(2x+23)-3(x+6)=0.$

26. $(x-7)(4x-29)=(2x-5)(2x-17)+1.$

27. $(3x+2)(2x-6)=(4-3x)(1-2x)-10.$

28. $(3x+5)(6x-7)=(3x+2)(9x-13)-(3x+1)(3x-1).$

29. $(x+2)(2x+5)=2(x+1)^2+13.$

30. $(x+1)(4x-7)-(x-1)(x+5)=3(x+2)^2+5.$

31. $\frac{x}{2}+5=\frac{x}{3}+7.$

32. $\frac{x}{6}-\frac{x}{5}=\frac{x}{15}-\frac{x}{3}+7.$

33. $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=2-\frac{x}{6}+\frac{5x}{12}.$

ষোড়শ অধ্যায়

সরল সমীকরণবিষয়ক প্রশ্নাবলী

(Problems leading to Simple Equations)

114. সমীকরণসম্বন্ধীয় সহজ সহজ প্রশ্নাবলীর সহিত, সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্য বিষয়-বস্তুতে, তোমরা কিছু পরিচিত হইয়াছ। উক্ত বিষয়ের সহিত আরও ঘনিষ্ঠ হইবার নিমিত্ত নিম্নে কতকগুলি দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল। প্রত্যেক ক্ষেত্রেই অজ্ঞাত রাশিটিকে (unknown quantity কে) x দ্বারা সূচিত করা হইবে।

উদা. 1. A ও B একত্রে 540 টাকা মূলধন লইয়া একটি যৌথ কারবার আরম্ভ করিল; মূলধনে A এর অংশ B এর অংশ অপেক্ষা দ্বিগুণ হইলে, প্রত্যেকের অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

ধর, B এর অংশ x দ্বারা সূচিত হইতেছে; তাহা হইলে, A এর অংশ অবশ্যই $2x$.

অতএব, মোট মূলধন $= x + 2x = 3x$.

কিন্তু, মোট মূলধন 540 টাকা বলিয়া দেওয়া আছে;

অতএব, $3x = 540$ টাকা।

$\therefore$ $x = 180$ টাকা।

অর্থাৎ, B এর অংশ $= 180$ টাকা।

সুতরাং, A এর অংশ $= (2 \times 180)$ টাকা, অর্থাৎ, 360 টাকা।

উদা. 2. 34 সংখ্যাটিকে এরূপ দুইটি অংশে ভাগ কর, যেন ঐ অংশদ্বয়ের বিয়োগফল 8 এর সমান হয়।

ধর, বড় অংশটি x দ্বারা সূচিত হইতেছে।

তাহা হইলে, ছোট অংশটি $34 - x$ দ্বারা সূচিত হইবে।

অতএব, প্রদত্ত সর্তানুসারে,

$x - (34 - x) = 8$,

অর্থাৎ, $2x - 34 = 8$;

অথবা, $2x = 34 + 8 = 42$;

অতএব, $x = 21$.

সুতরাং, বড় অংশটি 21এবং ছোট অংশটি $34 - 21$, অর্থাৎ, 13.

উদা. 3. কোন্ সংখ্যাটির এক-তৃতীয়াংশ, উহার এক-পঞ্চমাংশ অপেক্ষা 4 বড় ?

ধর, নির্ণেয় সংখ্যাটি x.

তাহা হইলে, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 4$; অথবা, $5x - 3x = 60$;

অথবা, $2x = 60$; $\therefore \; x = 30$.

উদা. 4. 10 বৎসর পূর্ব্বে B এর যে বয়স ছিল, 10 বৎসর পরে A এর বয়স তাহার দ্বিগুণ হইবে ; বর্ত্তমানে B অপেক্ষা A, 9 বৎসর বড় হইলে, উহাদের প্রত্যেকের বর্ত্তমান বয়স কত ?

ধর, B এর বর্ত্তমান বয়স x দ্বারা সূচিত হইল।

তাহা হইলে, A এর বর্ত্তমান বয়স $x + 9$ দ্বারা সূচিত হইবে।

কাজেই, 10 বৎসর পরে, A এর বয়স $= x + 9 + 10 = x + 19$;

এবং 10 বৎসর পূর্ব্বে, B এর বয়স $= x - 10$;

এখন, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, $x + 19 = 2(x - 10)$; অথবা, $x + 19 = 2x - 20$;

পক্ষান্তর করিয়া, $2x - x = 20 + 19$; বা, $x = 39$;

অর্থাৎ, B এর বর্ত্তমান বয়স 39 বৎসর।

কাজেই, A এর বর্ত্তমান বয়স 48 বৎসর।

প্রশ্নমালা 53

1. 9 ফুট দীর্ঘ একটি সরলরেখাকে এরূপ দুইটি অংশে ভাগ করা হইল যে, এক অংশ অপর অংশের দ্বিগুণ ; প্রত্যেক অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[A straight line, whose length is 9 feet, is divided into two portions, one being double of the other. Find the length of each portion.].

2. একটি থলিতে যতসংখ্যক টাকা আছে, ঠিক ততসংখ্যক আধুলি আছে। থলিতে সর্ব্বশুদ্ধ 30 টাকা থাকিলে, উহাতে কতগুলি আধুলি আছে ?

[A bag contains as many rupees in it as there are eight-anna pieces. Find the number of eight-anna pieces if there be Rs. 30 in all.]

3. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 50 এবং অন্তরফল 30 হইলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[Find two numbers whose sum is 50, and whose difference is 30.]

4. এমন একটি সংখ্যা বাহির কর, যাহা 96 ও উক্ত সংখ্যাটির অন্তরফলের পাঁচগুণ হয়।

[Find a number such that it is equal to five times its defect from 96.]

5. একটি সংখ্যার আটগুণ, সেই সংখ্যাটির অর্দ্ধভাগ অপেক্ষা 90 বেশী ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[Find a number which being multiplied by 8, the product will be greater than half the number by 90.]

6. একটি সংখ্যা হইতে 40 বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল সংখ্যাটির এক-তৃতীয়াংশের সমান ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[What number is that from which if you subtract 40, the difference will be one-third of the original number ?]

7. কোন একটি সংখ্যা 35 অপেক্ষা যত বড় এবং 67 অপেক্ষা যত ছোট, সেই বৃদ্ধি ও হ্রাসের অন্তরফল 22 ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[What number is that of which the excess over 35 is less by 22 than its defect from 67 ?]

8. কোন একটি সংখ্যা 16 অপেক্ষা যত বড় তাহার চারিগুণ, 416 অপেক্ষা সংখ্যাটি যত ছোট তাহার সমান ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[Four times the excess of a number over 16 is equal to the defect of the number from 416 ; find the number.]

9. তিনটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি 129 হইলে, সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

[Find 3 consecutive numbers whose sum will be 129.]

10. এরূপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাকে 7 দ্বারা গুণ করিলে, গুণফল 132 অপেক্ষা যত বড়, সংখ্যাটি 132 অপেক্ষা তত ছোট।

[Find a number which when multiplied by 7 is as much above 132 as it was originally below it.]

11. 90 কে এরূপ দুইটি অংশে ভাগ কর, যেন এক অংশের তিনগুণ অপর অংশের চারিগুণের সহিত যোগ করিলে, যোগফল 335 হয়।

[Divide 90 into two parts such that three times one of the parts together with four times the other may be equal to 335.]

12. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 39 এবং একটির এক-পঞ্চমাংশ অন্যটির এক-অষ্টমাংশের সমান ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[The sum of two numbers is 39 and *one-fifth* of one of them is equal to *one-eighth* of the other. Find them.]

13. কোন সংখ্যার এক-চতুর্থাংশ উহার এক-নবমাংশ অপেক্ষা 5 বেশী ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[Find a number whose *fourth* part exceeds its *ninth* part by 5.]

14. কোন সংখ্যার এক-ষষ্ঠাংশ উহার এক-অষ্টমাংশ অপেক্ষা 3 বেশী হইলে, সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[Find a number whose *sixth* part exceeds its *eighth* part by 3.]

15. 21 কে এরূপ দুই অংশে ভাগ কর, যেন এক অংশের দশগুণ অবশিষ্টাংশের নয়গুণ অপেক্ষা 1 বেশী হয়।

[Divide 21 into two parts, so that ten times one of them may exceed nine times the other by 1.]

16. একটি বাড়ীর এবং একটি বাগানের মূল্য একত্রযোগে £850 এবং বাগানের মূল্য বাড়ীর মূল্যের $\frac{5}{12}$ অংশ; প্রত্যেকটির মূল্য নির্ণয় কর।

[A house and a garden cost £850 and the price of the garden $=\frac{5}{12}$ths of the price of the house; find the price of each.]

17. £420 দুই ব্যক্তির মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন এক ব্যক্তির প্রত্যেক শিলিং এর জন্য অপর ব্যক্তি অর্দ্ধ-ক্রাউন পায়।

[Divide £420 among two persons, so that for every shilling one receives, the other may receive half a crown.]

18. দুইজন মেষপালক তাহাদের একপাল মেষকে নিজেদের মধ্যে মূল্যানুসারে সমানভাবে ভাগ করিয়া লইতে রাজি হইল। *A* 72টি মেষ লইল এবং *B*, *A* কে £35 দিয়া 92টি মেষ লইল। প্রত্যেক মেষের মূল্য সমান হইলে, একটির মূল্য নির্ণয় কর।

[*A* and *B*, two shepherds, owning a flock of sheep, agree to divide its value. *A* takes 72 sheep, while *B* takes 92 sheep and pays *A* £35. Find the value of a sheep.]

19. দুই ব্যক্তির বয়সের অন্তর 10 বৎসর। 15 বৎসর পূর্ব্বে জ্যেষ্ঠের বয়স কনিষ্ঠের ঠিক দ্বিগুণ ছিল; প্রত্যেকের বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় কর।

[The ages of two men differ by 10 years, and 15 years ago the elder was just twice as old as the younger; find the ages of the men.]

20. পিতার বয়স বর্ত্তমানে পুত্রের বয়সের তিনগুণ, এবং 10 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে; প্রত্যেকের বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় কর।

[A father's age is three times that of his son, and in 10 years it will be twice as great; how old are they ?]

সপ্তদশ অধ্যায়

(a) বাস্তব দৃষ্টান্ত সহকারে স্তম্ভ-লেখ (Column graph) অঙ্কন

(Column graph with practical illustrations)

115. তোমরা সপ্তম শ্রেণীতে তোমাদের দৈনন্দিন বিভিন্নরূপ অভিজ্ঞতার সাহায্যে অর্গল-লেখ (Bar-graph) কিরূপে অঙ্কন করিতে হয় তাহা শিখিয়াছ। বর্ত্তমানে তোমাদিগকে বাস্তবক্ষেত্রে বিভিন্ন বস্তুর সাহায্যে স্তম্ভাকারে অঙ্কিত-লেখ (graph) কি করিয়া অঙ্কন করিতে হয় তাহা, কয়েকটি দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝান যাইতেছে।

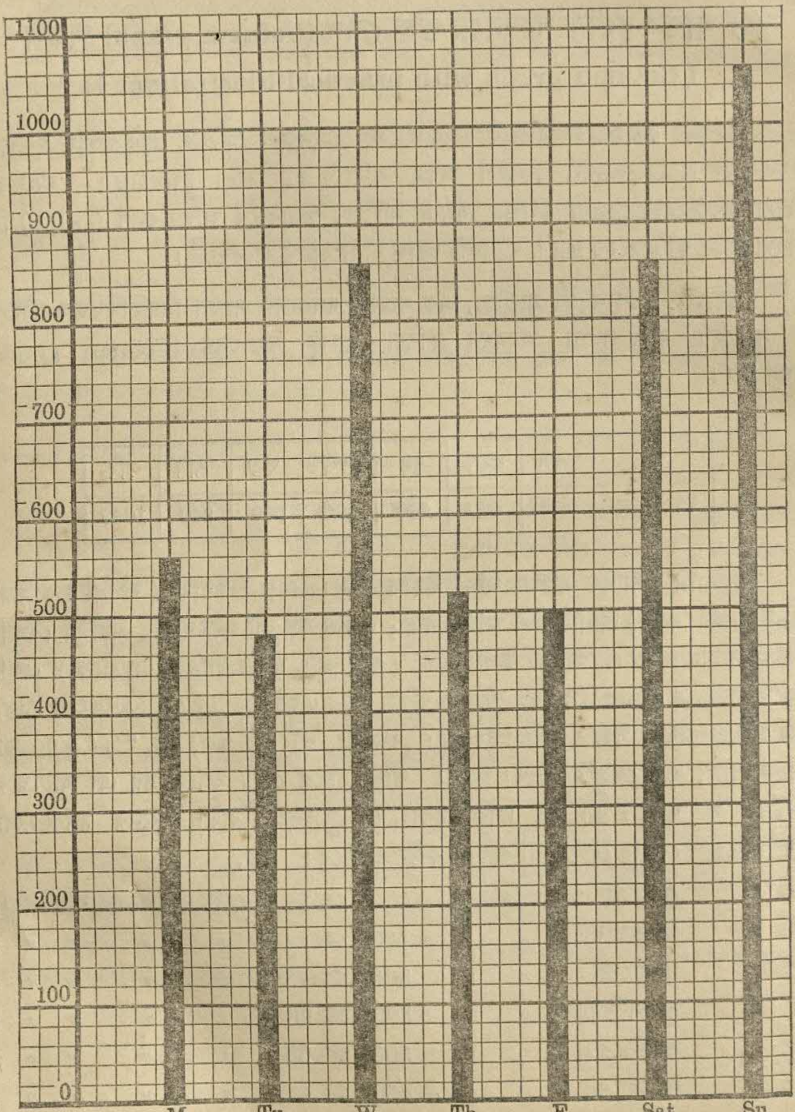
উদা. 1. কোন এক সার্কাসে, এক সপ্তাহে দর্শকদের সংখ্যা নিম্নলিখিতরূপ হইলে, ঐ সপ্তাহের দর্শক-সংখ্যা অবলম্বন করিয়া একটি স্তম্ভ-লেখ (Column graph) অঙ্কন কর।

বার	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র	শনি	রবি
দর্শক-সংখ্যা	560	480	860	520	500	860	1060

একখানি বর্গাঙ্কিত কাগজ লইয়া উহার প্রস্থ (width) বরাবর (যথাসম্ভব কাগজখানির নীচের দিকে) একটি রেখা অঙ্কিত কর ; একটি বড় বর্গক্ষেত্রের বাহু বরাবর রেখাটি লওয়াই সুবিধাজনক। উহার উপরিস্থিত, (যথাসম্ভব কাগজখানির বামদিকে) একটি বিন্দুতে পূর্ব্বোক্ত রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত আর একটি রেখা লও। দর্শকদের সংখ্যা 480 হইতে 1060 পর্য্যন্ত বৃদ্ধি হইয়াছে। সুতরাং, সুবিধার জন্য, ধর, "·1″ = 20 জন দর্শক-সংখ্যা", এই স্কেলটি লওয়া হইল। তাহা হইলে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু দ্বারা (অর্থাৎ, ·1″ দ্বারা) 20 জন দর্শক বুঝাইবে ; কাজেই বিভিন্ন দিনের দর্শক-সংখ্যা নিম্নলিখিতরূপে রেখার দৈর্ঘ্য দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে। যথা,

সোমবারের	দর্শক-সংখ্যা	= 560	কে 28 টি	ছোট	বর্গক্ষেত্রের	বাহু	দ্বারা ;		
মঙ্গলবারের	,, ,,	= 480	কে 24 ,,	,,	,,	,,	,, ;		
বুধবারের	,, ,,	= 860	কে 43 ,,	,,	,,	,,	,, ;		
বৃহস্পতিবারের	,, ,,	= 520	কে 26 ,,	,,	,,	,,	,, ;		
শুক্রবারের	,, ,,	= 500	কে 25 ,,	,,	,,	,,	,, ;		
শনিবারের	,, ,,	= 860	কে 43 ,,	,,	,,	,,	,, ;		
রবিবারের	,, ,,	= 1060	কে 53 ,,	,,	,,	,,	,, ।		

পূর্ব্বোক্ত সর্ত্তগুলি (data) হইতে লেখটি অঙ্কিত করিয়া নিম্নে দেখান হইল।



উদা. 2. ১৯৫৩ সালের জুন মাসে পশ্চিমবঙ্গের বিভিন্ন জিলায় বারিপাতের পরিমাণ, এক ইঞ্চিকে একক ধরিয়া, নিম্নলিখিত সংখ্যা দ্বারা প্রকাশিত হইল। ইহা দ্বারা বিভিন্ন জিলার বারিপাত সম্বন্ধীয় একটি স্তম্ভ-লেখ (column graph) অঙ্কন কর।

[Table 5.2 ; West Bengal Statistical Digest, Vol. VI, No. 4. (July 1953)]

জিলা	দার্জ্জিলিং	জলপাইগুড়ি	মালদহ	কলিকাতা	মেদিনীপুর
বারিপাত (ইঞ্চি এককে)	36·0	11·2	9·9	12·2	12·4

বর্দ্ধমান	আসানসোল	বহরমপুর	কালিম্পং	সাগরদ্বীপ
13·4	7·8	17·2	19·5	12·4

একখানি বর্গাঙ্কিত কাগজের যথাসম্ভব নীচের দিকে প্রস্থ বরাবর একটি সরলরেখা (অনুভূমিক সরলরেখা, horizontal line) লও এবং উহাকে আসানসোলের বারিপাতের রেখা হিসাবে গণ্য কর, কারণ উহাই নিম্নতম বারিপাত; এবং উহার উপর লম্বভাবে অবস্থিত রেখাসমূহ দ্বারা বিভিন্ন জিলার অতিরিক্ত (additional) [অর্থাৎ, আসানসোলের বারিপাত হইতে অতিরিক্ত] বারিপাতের সংখ্যাসমূহ প্রকাশ কর।

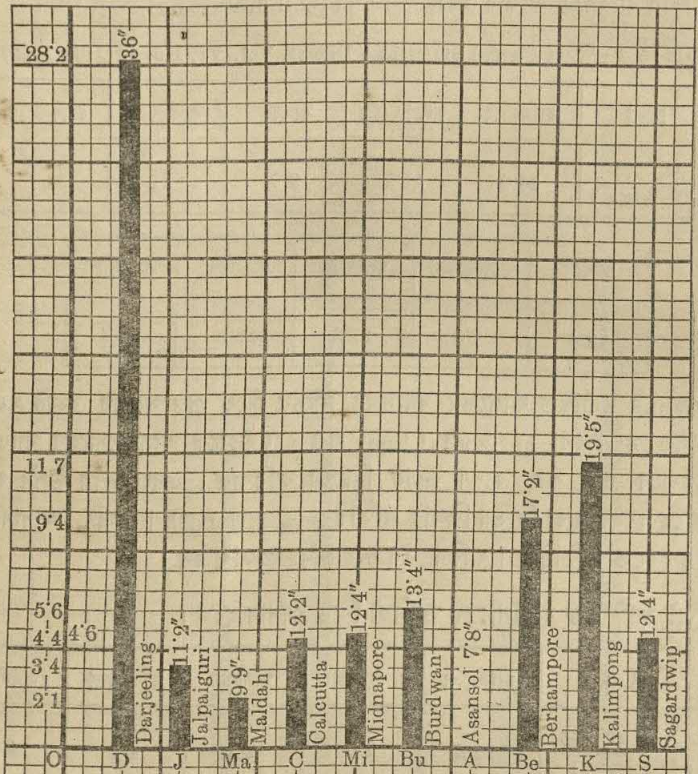
এই অতিরিক্ত বারিপাতের তালিকা নিম্নে দেখান হইল।

জিলা	দার্জ্জিলিং	জলপাইগুড়ি	মালদহ	কলিকাতা	মেদিনীপুর
অতিরিক্ত বারিপাত (ইঞ্চি এককে)	28·2	3·4	2·1	4·4	4·6

বর্দ্ধমান	আসানসোল	বহরমপুর	কালিম্পং	সাগরদ্বীপ
5·6	0	9·4	11·7	4·6

এখন, উপরিউক্ত অনুভূমিক (horizontal) রেখাটির উপর, যথাসম্ভব বামদিকে একটি বিন্দু 0 লও; এবং উহা হইতে আরম্ভ করিয়া অনুভূমিক রেখাটির উপর পর পর সমদূরবর্ত্তী দশটি বিন্দু স্থাপন কর এবং উহাদিগকে যথাক্রমে D, J, Ma, C, Mi, Bu, A, Be, K, S প্রভৃতি জিলাসমূহের নামের আদ্যক্ষরগুলি দ্বারা চিহ্নিত কর।

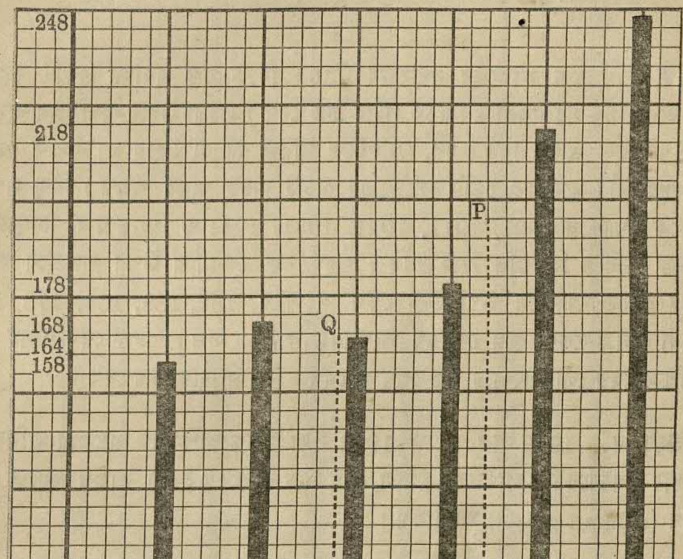
এখন, "5" দৈর্ঘ্য (অর্থাৎ, বড় বর্গক্ষেত্রের এক বাহু) = 4" বারিপাত' এই স্কেল অনুসারে উপরিউক্ত চিহ্নিত বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক রেখার উপর লম্বভাবে



অবস্থিত রেখাগুলি হইতে যথাক্রমে বারিপাত-প্রকাশক দৈর্ঘ্য কাটিয়া লও। এই রেখাগুলিই নির্ণেয় স্তম্ভ-লেখ হইবে। (উপরের চিত্র দেখ)

উদা. 3. আদমসুমারির (census এর) হিসাব অনুসারে 1901 সাল হইতে 1951 সাল পর্য্যন্ত প্রতি দশ বৎসর অন্তর পশ্চিমবঙ্গের লোকসংখ্যা নিম্নলিখিতরূপ হইলে, ঐ লোকসংখ্যার একটি স্তম্ভ-লেখ (column graph) অঙ্কন কর।

সাল	1901	1911	1921	1931	1941	1951
লোকসংখ্যা (100,000 কে একক ধরিয়া)	158	168	164	178	218	248


248
218
178
168
164
158
0
P
Q
1,58,00,000
1,68,00,000
1,64,00,000
1,78,00,000
2,18,00,000
2,48,00,000
1935
1901
1911
M 1921
1931 N
1941
1951

এখন, 25 = '5" (অর্থাৎ বড় বর্গক্ষেত্রের এক বাহু) [অর্থাৎ 5 = '1" (ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু)]—এই স্কেল লইয়া পূর্ব্ব দৃষ্টান্তগুলির নিয়মানুসারে লেখটি অঙ্কন কর।

যথা—বর্গাঙ্কিত কাগজের যথাসম্ভব নীচের দিকে প্রস্থ বরাবর একটি সরলরেখা (অর্থাৎ অনুভূমিক সরলরেখা) (২১৩ পৃষ্ঠার চিত্র দেখ) লইয়া উহার যথাসম্ভব বামদিকে, উহার উপরিস্থিত একটি বিন্দু (ধর, O) হইতে আরম্ভ করিয়া উহার ডা'নদিকে পর পর ছয়টি সমদূরবর্ত্তী (মনে কর, ছোট বর্গক্ষেত্রের পাঁচটি বাহুর অন্তর অন্তর) বিন্দু লও এবং উহাদিগকে যথাক্রমে 1901, 1911, 1921, 1931, 1941 ও 1951 দ্বারা চিহ্নিত কর। এখন উক্ত চিহ্নিত বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক রেখাটির উপর লম্বভাবে অবস্থিত রেখাসমূহ হইতে যথাক্রমে উপরিউক্ত স্কেল অনুসারে, 158, 168, 164, 178, 218 ও 248 সংখ্যাগুলি নির্দ্দেশ করে সেইরূপ অংশসমূহ কাটিয়া লও। উক্ত রেখাগুলিই বিভিন্ন সালে পশ্চিমবঙ্গের লোকসংখ্যার স্তম্ভ-লেখ হইবে। [পূর্ব্বপৃষ্ঠার চিত্র দেখ]

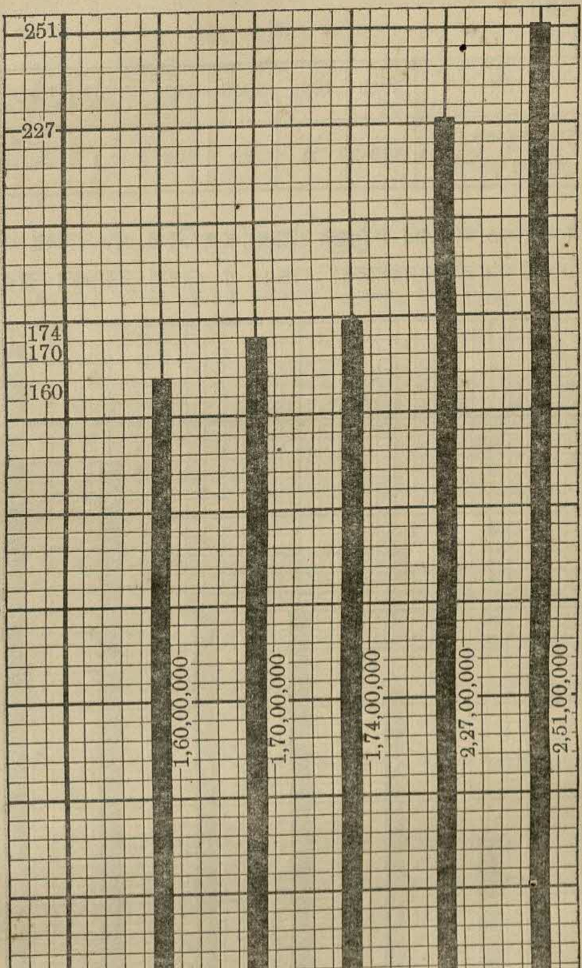
উদা. 4. 1948 সাল হইতে 1952 সাল পর্য্যন্ত পশ্চিমবঙ্গ রাজ্যের মাসিক মোট রাজস্ব আয় স্থূলভাবে নিম্নলিখিতরূপ হইলে, এই পাঁচ বৎসরের ইহার রাজস্ব আয়ের একটি স্তম্ভ-লেখ (column graph) অঙ্কন কর।

সাল	1948	1949	1950	1951	1952
মাসিক রাজস্ব আয় (লক্ষ টাকা এককের তুলনায়)	160	170	174	227	251

[Table 17-2, page 61, Monthly Statistical Digest, Vol. VI. July 1953, Govt. of West Bengal.]

একখানি বর্গাঙ্কিত কাগজের যথাসম্ভব নীচের দিকে প্রস্থ বরাবর একটি সরলরেখা (অর্থাৎ, একটি অনুভূমিক সরলরেখা) টানিয়া উহার যথাসম্ভব বামদিকে, উহার উপরিস্থিত একটি বিন্দু, O, হইতে উহার ডা'নদিকে সমদূরবর্ত্তী পাঁচটি বিন্দু ঐ রেখাটির উপর লও এবং উহাদিগকে 1948, 1949, 1950, 1951, 1952 এই সংখ্যাগুলি দ্বারা পর পর চিহ্নিত কর। [পরপৃষ্ঠার চিত্র দেখ]। এখন, 25 কে '5" দৈর্ঘ্য দ্বারা (অর্থাৎ, বড় বর্গক্ষেত্রের এক বাহু দ্বারা) সূচিত কর। তারপর, উপরিউক্ত চিহ্নিত বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক রেখাটির উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখা হইতে যথাক্রমে 160, 170, 174, 227, 251 সংখ্যাসমূহ-নির্দ্দেশক দৈর্ঘ্য কাটিয়া লইলে, এই নির্দ্দিষ্ট রেখাগুলিই নির্ণেয় স্তম্ভ-লেখ হইবে।

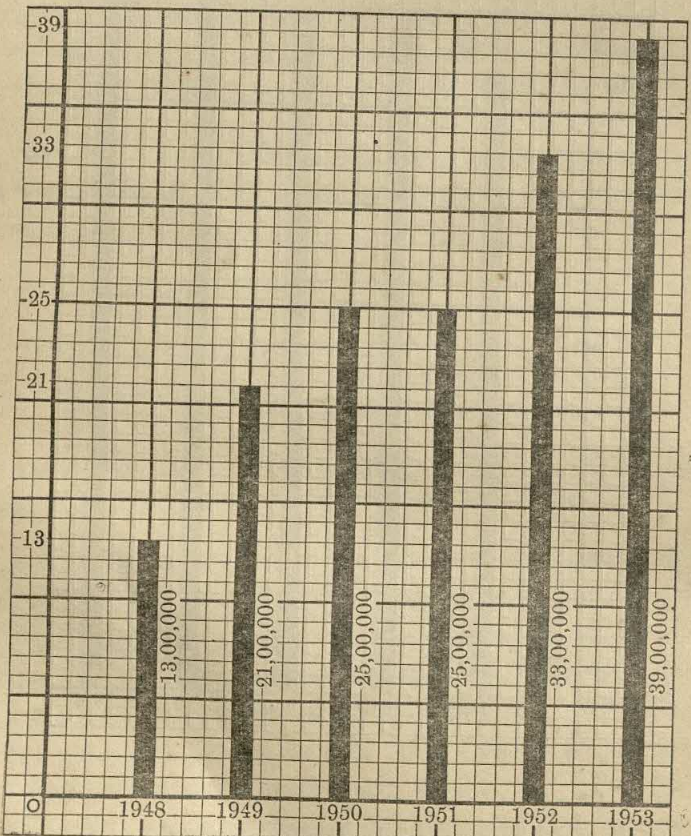
স্কেল—'5″ = 25 ['1″ = 5]


251
227
174
170
160
0
1,60,00,000
1,70,00,000
1,74,00,000
2,27,00,000
2,51,00,000
1948
1949
1950
1951
1952

উদা. 5. 1948 সাল হইতে 1953 সাল পর্য্যন্ত পশ্চিমবঙ্গ সরকারের শিক্ষাখাতে স্থূল হিসাবমতে মাসিক গড় ব্যয় নিম্নলিখিত রূপ হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ (column graph) অঙ্কন কর।

সাল	1948	1949	1950	1951	1952	1953
শিক্ষাব্যয় (লক্ষ টাকা এককের তুলনায়)	13	21	25	25	33	39

একখানি বর্গাঙ্কিত কাগজের যথাসম্ভব নীচের দিকে উহার প্রস্থ বরাবর একটি সরল-রেখা (অর্থাৎ, একটি অনুভূমিক সরলরেখা) লও। ঐ রেখার যথাসম্ভব বামদিকে একটি



বিন্দু, O, লইয়া উহার ডা'নদিকে পর পর সমদূরবর্ত্তী ছয়টি বিন্দুকে যথাক্রমে 1948, 1949, 1950, 1951, 1952 ও 1953 দ্বারা চিহ্নিত কর। এখন, ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু দ্বারা '1' (অর্থাৎ, এক লক্ষ) সূচিত করিয়া চিহ্নিত বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত রেখাগুলি হইতে স্ব স্ব সাল নির্দ্দিষ্ট সংখ্যা-নির্দ্দেশক রেখাংশসমূহ কাটিয়া লইলেই নির্ণেয় স্তম্ভ-লেখটি অঙ্কিত হইবে। [চিত্র দেখ]

মনে রাখিবে, এস্থলে 1 = ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু (অর্থাৎ, '1")।

প্রশ্নমালা 54

1. পশ্চিমবঙ্গের বিভিন্ন জিলার আয়তন, একশত বর্গমাইলের তুলনায়, স্থূলভাবে নিম্নলিখিত সংখ্যা দ্বারা জ্ঞাপিত হইলে

জিলা	বৰ্দ্ধমান	বীরভূম	বাঁকুড়া	মেদিনীপুর	হাওড়া	হুগলী	২৪ পরগনা
আয়তন	27	17	26	53	6	12	52

নদীয়া	মুর্শিদাবাদ	পশ্চিম দিনাজপুর	মালদহ	দার্জ্জিলিং	জলপাইগুড়ি	কুচবিহার
15	21	14	14	12	24	13

(a) বর্দ্ধমান বিভাগের জিলাসমূহের আয়তনগুলি দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

(b) প্রেসিডেন্সি বিভাগের জিলাসমূহের আয়তন দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

2. 1951 সালের আদমসুমারি (census) হিসাবে বর্দ্ধমান বিভাগের বিভিন্ন জিলার লোকসংখ্যা, এক লক্ষ এককের তুলনায়, স্থূলভাবে নিম্নলিখিত সংখ্যাসমূহ দ্বারা জ্ঞাপিত হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

জিলা	বৰ্দ্ধমান	বীরভূম	বাঁকুড়া	মেদিনীপুর	হাওড়া	হুগলী
লোকসংখ্যার মান	22	11	13	34	16	16

3. 1951 সালের আদমসুমারি (census) হিসাবে প্রেসিডেন্সি বিভাগের বিভিন্ন

জিলার লোকসংখ্যা, এক লক্ষ এককের তুলনায়, স্থূলভাবে নিম্নলিখিত সংখ্যাসমূহ দ্বারা জ্ঞাপিত হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

জিলা	২৪ পরগনা	কলিকাতা	নদীয়া	মুর্শিদাবাদ	পশ্চিম দিনাজপুর	মালদহ	জলপাইগুড়ি	দার্জিলিং	কুচবিহার
লোকসংখ্যার মান (লক্ষে)	46	25	11	17	7	9	9	4	7

4. 1951 সালে প্রেসিডেন্সি বিভাগের কতিপয় জিলায় মাসিক গড় মৃত্যুসংখ্যা নিম্নলিখিতরূপ হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

জিলা	২৪ পরগনা	কলিকাতা	নদীয়া	মুর্শিদাবাদ	পশ্চিম দিনাজপুর	মালদহ	জলপাইগুড়ি	দার্জিলিং
মৃত্যুসংখ্যা	3370	3958	1173	1804	1085	1013	1336	691

5. 1946 সাল হইতে 1953 সাল পর্য্যন্ত কলিকাতার মাসিক গড় মৃত্যুসংখ্যা নিম্নলিখিতরূপ হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

সাল	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953
মৃত্যুসংখ্যা	3011	3428	4015	3489	4350	3958	3454	3404

6. 1951 সালের মে মাস হইতে ডিসেম্বর মাস পর্য্যন্ত কলিকাতার শিশুমৃত্যু-সংখ্যা নিম্নলিখিতরূপ হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

মাস	মে	জুন	জুলাই	আগষ্ট	সেপ্টেম্বর	অক্টোবর	নভেম্বর	ডিসেম্বর
শিশুমৃত্যু-সংখ্যা	803	697	815	963	870	1014	1173	1052

7. 1951 সালে পশ্চিমবঙ্গে বিভিন্ন রোগের দরুণ মাসিক মৃত্যুসংখ্যা নিম্নলিখিতরূপ হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

বিভিন্ন রোগ	কলেরা	বসন্ত	আমাশয় প্রভৃতি	ম্যালেরিয়া	অন্যান্য জ্বর	যক্ষ্মা	অন্যান্য শ্বাসযন্ত্র সম্পর্কিত রোগ
মৃত্যুসংখ্যা	473	2241	1541	3025	7887	653	2002

8. 1953 সালে মে মাসে পশ্চিমবঙ্গের কয়েকটি শহরের (*a*) সর্ব্বোচ্চ তাপমাত্রা, (*b*) সর্ব্বনিম্ন তাপমাত্রা, নিম্নলিখিতরূপ হইলে, উহা দ্বারা পৃথকভাবে দুইটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

শহর	দার্জ্জিলিং	জলপাইগুড়ি	মালদহ	কলিকাতা	মেদিনীপুর	বর্দ্ধমান
(*a*) সর্ব্বোচ্চ তাপমাত্রা (ডিগ্রীতে)	71	97	110	106	111	110
(*b*) সর্ব্বনিম্ন তাপমাত্রা (ডিগ্রীতে)	49	69	69	71	72	71

আসানসোল	বহরমপুর	কালিম্পং	সাগরদ্বীপ	কুচবিহার
114	111	90	92	95
72	70	61	61	68

(*c*) একই স্তম্ভ-লেখ-তে উপরিউক্ত দুইটি তাপমাত্রাই প্রকাশ কর।

9. 1948 সাল হইতে 1953 সাল পর্য্যন্ত কলিকাতায় মাসিক গড়ে নিম্নলিখিত পরিমাণ চাউল আমদানি হইয়াছে ; উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

সাল	1948	1949	1950	1951	1952	1953
চাউলের পরিমাণ (এক হাজার টন এককের তুলনায়)	12	17	13	14	12	18

10. 1948 সাল হইতে 1953 সাল পর্য্যন্ত পশ্চিমবঙ্গ সরকারের বিক্রয়কর (Sales Tax) হইতে মাসিক আয় স্থূলভাবে নিম্নলিখিতরূপ হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

সাল	1948	1949	1950	1951	1952	1953
বিক্রয়কর হইতে আয় (এক লক্ষ টাকা এককের তুলনায়)	35	36	41	46	44	45

11. 1950-51 সালে কলিকাতা কর্পোরেশনের বিভিন্ন খাতে ব্যয় নিম্নলিখিতরূপ হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

বিভিন্ন খাতে	জল সরবরাহ	ময়লা জল প্রভৃতি নিষ্কাশন	জনস্বাস্থ্য	দাতব্য চিকিৎসা	আলো	জঞ্জাল পরিষ্কার	সূতিকাগৃহ ও শিশুমঙ্গল	শিক্ষা ও শিশুশিক্ষা	কার্য্য-নির্ব্বাহক ব্যয়	মহার্ঘ-ভাতা	অন্যান্য
ব্যয় (1000 টাকা এককের তুলনায়)	59,01	22,18	11,84	10,61	20,42	69,06	4,47	20,02	50,13	94,26	1,25,67

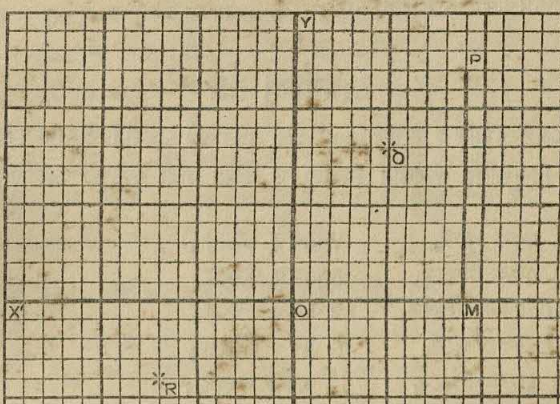
12. 1950-51 সালে কলিকাতা কর্পোরেশনের বিভিন্ন খাতে আয় নিম্নলিখিতরূপ হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর।

বিভিন্ন খাতে	নির্দ্দিষ্ট কর	সনন্দ কর Licence fee	জল বিক্রয়	ট্রাম ও বিদ্যুৎ কোম্পানি হইতে	বাজার	পশু-হত্যা	বিবিধ
আয় (1000 টাকা এককের তুলনায়)	2,93,99	32,71	9,99	78	24,79	1,98	1,20,10

(b) বিন্দুসংস্থাপন-প্রণালী (Plotting of Points)

116. মুখবন্ধ (Introduction) : কোন সমতলে যদি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরলরেখা অবস্থিত থাকে, তবে ঐ রেখাদ্বয়ের সম্পর্কে সমতলস্থিত যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দ্দেশ করা যাইতে পারে।

ধর, কোন নির্দ্দিষ্ট সমতলে XOX' এবং YOY' দুইটি পরস্পরচ্ছেদী নির্দ্দিষ্ট সরলরেখা, এবং উহারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত (চিত্র দেখ)। এখন P যদি সমতলস্থিত যে কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হয়, তবে P এর অবস্থান নিম্নলিখিতরূপে নির্ণয় করা হইয়া থাকে। প্রথম শিক্ষার্থিগণের জন্য আমরা XOX' রেখাটিকে পূর্ব্ব-পশ্চিম রেখা এবং YOY' রেখাটিকে উত্তর-দক্ষিণ রেখা বলিয়া ধরিয়া লইতে পারি। P বিন্দু দিয়া YOY' এর সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা আঁক এবং মনে কর, উহা XOX' রেখাটির সহিত M বিন্দুতে মিলিত হইল। (চিত্রানুসারে) স্পষ্টই, M, O বিন্দুর পূর্ব্বে এবং



P, M বিন্দুর উত্তরে অবস্থিত। উপরিস্থিত বর্গাঙ্কিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু দৈর্ঘ্যের একক নির্দ্দেশ করিতেছে ইহা ধরিয়া লইলে দেখা যায় যে, $OM = 9$ একক দীর্ঘ এবং $MP = 12$ একক দীর্ঘ। অতএব, P বিন্দুর অবস্থান আমরা নিম্নলিখিতভাবে সূচিত করিতে পারি ; যথা, P বিন্দুটি XOX' ও YOY' সরলরেখা দুইটির সম্পর্কে,

পূর্ব্বে 9 একক দূরে, উত্তরে 12 একক দূরে অবস্থিত।

বিপরীতক্রমে (i) Q যদি এরূপ একটি বিন্দু হয়, যাহার অবস্থান 'পূর্ব্বে 5 একক দূরে, উত্তরে 8 একক দূরে' এই বর্ণনা দ্বারা নির্দ্দিষ্ট, তাহা হইলে, Q বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করিতে আমাদিগকে OX রেখার বরাবর, O বিন্দুর পূর্ব্বে 5 একক পরিমিত দূরে একটি বিন্দু লইয়া, তৎপরে ঐ বিন্দু হইতে উত্তরে OY এর সমান্তরাল রেখার বরাবর, 8 একক পরিমিত দূরে যাইতে হইবে।

(ii) R যদি এরূপ একটি বিন্দু হয়, যাহার অবস্থান 'O হইতে পশ্চিমে 7 একক দূরে, দক্ষিণে 4 একক দূরে', এই বর্ণনা দ্বারা সূচিত হইতেছে, তবে R বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করিতে হইলে, আমাদিগকে O বিন্দুর পশ্চিমে 7 একক পরিমিত দূরে যাইয়া, তথা হইতে দক্ষিণে 4 একক পরিমিত দূরে যাইতে হইবে।

উপরিলিখিত সঙ্কেত হইতে দেখা যায় যে, সমতলে যে কোন বিন্দু নির্দ্দিষ্টরূপে দেওয়া থাকিলে, XOX' ও YOY' হইতে উহার দূরত্বদ্বয় নির্দ্দিষ্টরূপে জানা যায়, এবং XOX' ও YOY' রেখা দুইটি হইতে কোন বিন্দুর অবস্থানের দূরত্বদ্বয় দেওয়া থাকিলে, উক্ত বিন্দুর অবস্থান নির্দ্দিষ্টরূপে জানা যায়।

প্রশ্নমালা 55

[প্রতিক্ষেত্রেই বর্গাঙ্কিত কাগজ (squared paper) ব্যবহার করিতে হইবে।]

1. যে বিন্দুগুলির অবস্থান নিম্নলিখিত বর্ণনা দ্বারা সূচিত, তাহাদিগকে সংস্থাপন কর :

(1) 5 একক পূর্ব্বে, 7 একক উত্তরে ;
(2) 8 একক পশ্চিমে, 5 একক উত্তরে ;
(3) 10 একক পশ্চিমে, 12 একক দক্ষিণে ;
(4) 15 একক পূর্ব্বে, 6 একক দক্ষিণে ;
(5) 8 একক পশ্চিমে, 13 একক উত্তরে ;
(6) 14 একক পূর্ব্বে, 15 একক দক্ষিণে।

2. তৃতীয় অধ্যায়ের (অর্থাৎ, ধনরাশি ও ঋণরাশি সম্বন্ধীয় অধ্যায়ের) ব্যাখ্যা হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে, '6 একক পশ্চিমে' অথবা '-6 একক পূর্ব্বে' একই কথা। তদ্রূপ, '8 একক দক্ষিণে' বা '-8 একক উত্তরে' একই কথা, ইত্যাদি। এই অনুসারে, যে বিন্দুগুলির অবস্থান নিম্নলিখিত বর্ণনা দ্বারা নির্দ্দিষ্ট, তাহাদিগকে সংস্থাপন কর :

(1) 7 একক পূর্ব্বে, -8 একক উত্তরে ;
(2) -10 একক পূর্ব্বে, 6 একক উত্তরে ;
(3) -9 একক পূর্ব্বে, -13 একক উত্তরে।

3. বিন্দুর অবস্থান বর্ণনা করার সময় 'পূর্ব্বে ও উত্তরে' শব্দ দুইটির উল্লেখ না করিলেও চলে, যদি ইহা সর্ব্বসম্মতিক্রমে স্বীকৃত হয় যে, পূর্ব্বদিকের দূরত্বগুলিকে সকল ক্ষেত্রেই প্রথমে লেখা হইবে। উপরিউক্ত স্বীকৃতি অনুসারে, যে বিন্দুগুলির অবস্থান নিম্নোক্ত বর্ণনা দ্বারা নির্দ্দিষ্ট হইতেছে, উহাদিগকে সংস্থাপন কর :

(1) 8 একক, 9 একক ; (2) 6 একক, −11 একক ;
(3) −12 একক, 15 একক ; (4) −10 একক, −14 একক।

4. প্রত্যেক স্থলেই 'একক' শব্দটিকে বাদ দিয়া, বিন্দুর অবস্থান আরও সংক্ষেপে সূচিত করা যায় ; এই প্রথা অনুসারে, নিম্নলিখিত বর্ণনা দ্বারা নির্দ্দিষ্ট বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর :

(1) 6, 4 ; (2) 13, 8 ; (3) −7, 6 ;
(4) 8, −6 ; (5) −10, −13 ; (6) −9, −15.

117. সংজ্ঞা : পূর্ব্বনিয়মে দেখান হইয়াছে যে, পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত XOX' এবং YOY' রেখা দুইটির সাহায্যে (পূর্ব্বনিয়মের চিত্র দেখ) সমতলস্থিত যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দ্দেশ করা যায়। এই স্থির রেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে **অক্ষ** (axis) বলে ; এবং XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু O কে **মূলবিন্দু** (origin), XOX' কে **x-অক্ষরেখা** (axis of x) এবং YOY' কে **y-অক্ষরেখা** (axis of y) বলা হয়। আবার, OM এবং MP এর দৈর্ঘ্যমানদ্বয়কে P বিন্দুর **ভুজ-কোটি** (co-ordinates) বলে ; OM এর দৈর্ঘ্যমানকে **ভুজ** (abscissa বা x-co-ordinate) এবং MP এর দৈর্ঘ্যমানকে **কোটি** (ordinate বা y-co-ordinate) বলা হয়।

বিন্দুসংস্থাপনের কয়েকটি আবশ্যকীয় সঙ্কেত :

(i) '(x, y) বিন্দু' বা শুধু 'x, y' এর অর্থ 'এরূপ একটি বিন্দু, যাহার ভুজ (abscissa) x-একক দীর্ঘ এবং যাহার কোটি (ordinate) y-একক দীর্ঘ'।

(ii) একটি বিন্দুর 'x এবং y' এর কথা বলা হইলে, প্রকৃতপক্ষে তদ্দ্বারা ঐ বিন্দুর যথাক্রমে ভুজ (x-co-ordinate) ও কোটি (y-co-ordinate)-এর কথাই বলা হইয়া থাকে।

(iii) মূলবিন্দু O এর ডা'নদিকে M বিন্দু থাকিলে, P বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক এবং বামদিকে থাকিলে, ঐ ভুজটি ঋণাত্মক, বলা হইয়া থাকে। তদ্রূপ, P বিন্দু XOX' এর উপরিভাগে থাকিলে, P বিন্দুর কোটি ধনাত্মক, এবং P বিন্দু XOX' এর নীচে থাকিলে, P বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক, বলা হয়।

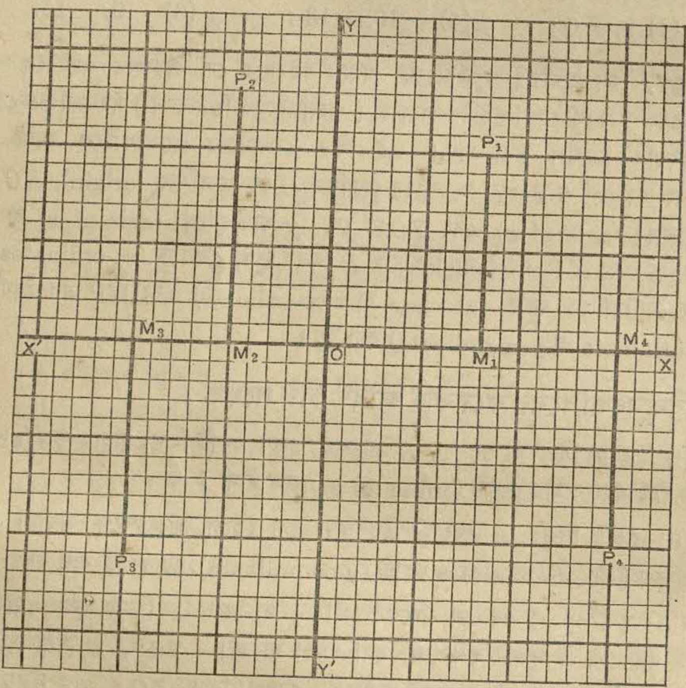
(iv) কোন বিন্দুর অবস্থান, উহার ভুজ-কোটি দ্বারা সূচিত করিতে হইলে, **প্রথমে ভুজ-** ও **তৎপর কোটি**-নির্ণয়ক সংখ্যা লিখিতে হয়।

(v) **'বিন্দু সংস্থাপন করা** (to plot a point)'-এর অর্থ বিন্দুটির ভুজ-কোটি দেওয়া থাকিলে, উহার অবস্থান নিরূপণ করা।

উদা. 1. নিম্নে প্রদর্শিত চিত্রে, P_1, P_2, P_3, P_4 বিন্দুগুলির প্রত্যেকটির ভুজ-কোটি লিখ।

চিত্রের ব্যাখ্যা অনাবশ্যক। ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিলে,

(1) $OM_1 = 8$ একক, এবং M_1, O বিন্দুর ডা'নদিকে অবস্থিত; আবার, $M_1P_1 = 10$ একক, এবং P_1 বিন্দুটি XOX' এর উপরিভাগে অবস্থিত। অতএব, P_1 বিন্দুটির ভুজ ও কোটি যথাক্রমে **8** এবং **10.**



(2) $OM_2 = 5$ একক, এবং M_2, O এর বামদিকে; আবার, $M_2P_2 = 13$ একক, এবং P_2 বিন্দুটি XOX' রেখার উপরিভাগে। অতএব, P_2 বিন্দুটির ভুজ ও কোটি যথাক্রমে **−5 ও 13.**

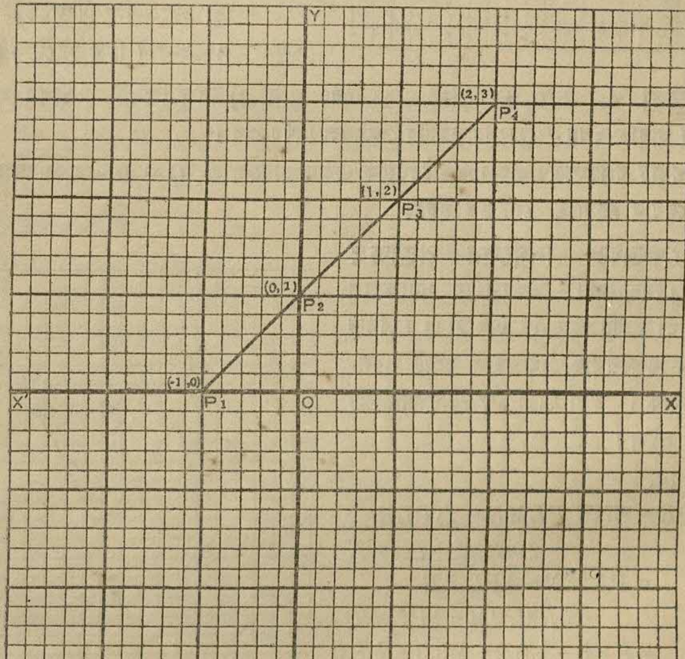
(3) $OM_3 = 10$ একক, এবং M_3, O এর বামদিকে ; $M_3P_3 = 11$ একক এবং P_3, XOX' এর নীচে ; কাজেই, P_3 বিন্দুটির ভুজ-কোটি যথাক্রমে **−10 ও −11.**

(4) $OM_4 = 15$ একক, এবং M_4, O এর ডা'নদিকে ; এবং $M_4P_4 = 10$ একক, এবং P_4, XOX' এর নীচে ; অতএব, P_4 বিন্দুটির ভুজ-কোটি যথাক্রমে **15 ও −10.**

উদা. 2. (−1, 0), (0, 1), (1, 2) এবং (2, 3) বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর এবং প্রত্যক্ষ কর যে, উহারা সমরেখ।

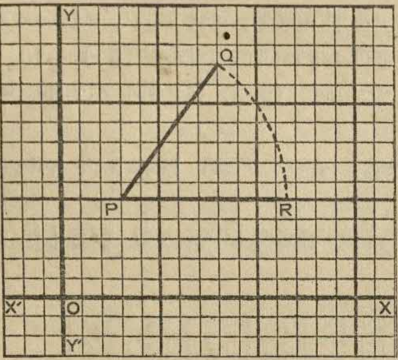
ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর পাঁচগুণকে একক ধরিয়া বিন্দুগুলিকে যথাস্থানে সংস্থাপন কর।

ধর, P_1, P_2, P_3, P_4 দ্বারা এই বিন্দুচতুষ্টয়কে নির্দ্দিষ্ট করা হইল [নিম্নের চিত্র দেখ]।



এখন, একখানা মাপনীর এক পার্শ্ব উহাদের যে কোন দুইটি বিন্দুর সহিত মিলাইয়া স্থাপন করিলে দেখা যাইবে, সেই পার্শ্ব অপর দুইটি বিন্দু দিয়াও যাইবে। অতএব, চারিটি বিন্দুই সমরেখ।

উদা. 3. (3, 5) এবং (8, 12) এই বিন্দুদ্বয় সংস্থাপন কর, এবং উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।



ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া বিন্দু দুইটি সংস্থাপন কর। মনে কর, P ও Q ঐ বিন্দুদ্বয়কে নির্দ্দেশ করিতেছে [চিত্র দেখ]।

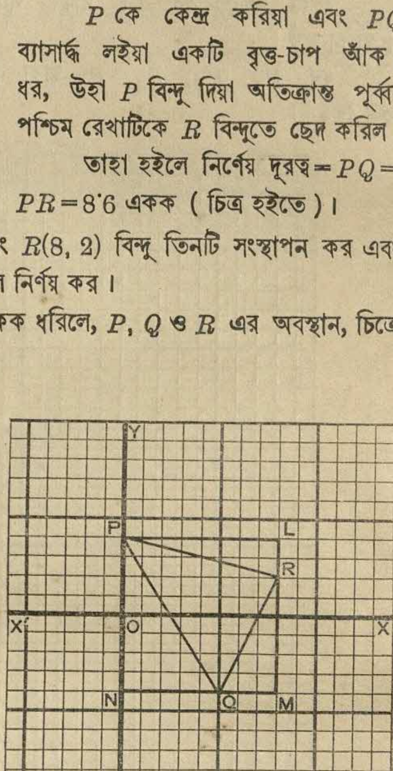
P কে কেন্দ্র করিয়া এবং PQ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ আঁক ; ধর, উহা P বিন্দু দিয়া অতিক্রান্ত পূর্ব্ব-পশ্চিম রেখাটিকে R বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে নির্ণেয় দূরত্ব $= PQ = PR = 8 \cdot 6$ একক (চিত্র হইতে)।

উদা. 4. $P(0, 4)$, $Q(5, -4)$ এবং $R(8, 2)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন PQR ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিলে, P, Q ও R এর অবস্থান, চিত্রে যেরূপ দেখান হইয়াছে, সেইরূপ হইবে।

ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতি : P ও Q বিন্দু দিয়া x-অক্ষরেখার সমান্তরাল সরলরেখা দুইটি আঁক ; এবং P ও R বিন্দু দিয়া y-অক্ষরেখার সমান্তরাল দুইটি সরল-রেখা আঁক। ইহা দ্বারা $PLMN$ আয়তটি অঙ্কিত হইল।



এখন,

$\triangle PQR =$ আয়ত $PLMN - \triangle PLR - \triangle RQM - \triangle PQN$

$= PL.PN - \frac{1}{2}PL.LR - \frac{1}{2}RM.QM - \frac{1}{2}PN.NQ$

$= 8 \times 8 - \frac{1}{2}.8.2 - \frac{1}{2}.6.3 - \frac{1}{2}.8.5$

$= 64 - 8 - 9 - 20$

$= 64 - 37 = 27$ (ক্ষেত্রফলের একক).

বিকল্প পদ্ধতি : PQR ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ ছোট বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা কর ; তারপর, যে যে বর্গক্ষেত্রগুলির ভিতর দিয়া ত্রিভুজের বাহুগুলি গিয়াছে, তাহাদের মধ্যে

যেগুলির অর্দ্ধ বা ততোধিক অংশ ত্রিভুজের ভিতরে আছে, সেইগুলিকে গণনা করিয়া বাকীগুলি বাদ দাও। যেহেতু একটি ছোট বর্গক্ষেত্র 'ক্ষেত্রফলের একক' সূচিত করে, অতএব, বর্গক্ষেত্রগুলির মোট সংখ্যাই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্দ্দেশ করিবে।

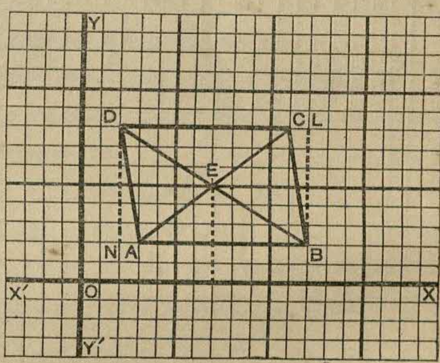
উপরিউক্ত নিয়মে গণনা করিয়া PQR ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ বর্গক্ষেত্রগুলির মোট সংখ্যা 27 পাওয়া গেল।

অতএব, PQR ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 27 একক (ক্ষেত্রফলের)।

উদা. 5. $A(3, 2)$, $B(12, 2)$, $C(11, 8)$ এবং $D(2, 8)$ বিন্দুচতুষ্টয় সংস্থাপন কর। $ABCD$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল, এবং AC ও BD এর ছেদবিন্দুর ভুজ-কোটি (co-ordinates) নির্ণয় কর।

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিলে, A, B, C ও D এর অবস্থান চিত্রে যেরূপ দেখান হইয়াছে, সেইরূপ হইবে।

ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতি ঃ বস্তুতঃ এক্ষেত্রে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক, সুতরাং, ইহার ক্ষেত্রফল = $AB.BL$ (ভূমি × উচ্চতা) = $9 \times 6 = 54$ একক (ক্ষেত্রফলের) [অথবা উদা. 4 এর নিয়মানুসারে আয়তক্ষেত্র সম্পূর্ণ করিয়াও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়]।



বিকল্প পদ্ধতি ঃ উদাহরণ 4এ বর্ণিত নিয়ম অনুসারে গণনা করিয়া $ABCD$ চতুর্ভুজের অভ্যন্তরস্থ বর্গক্ষেত্রগুলির মোট সংখ্যা 54 পাওয়া গেল।

অতএব, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 54 একক (ক্ষেত্রফলের)।

চিত্র হইতে দেখা যায় যে, AC ও BD এর ছেদবিন্দু E এর ভুজ 7 একক এবং কোটি 5 একক।

অতএব, E বিন্দুটির ভুজ-কোটি (7, 5).

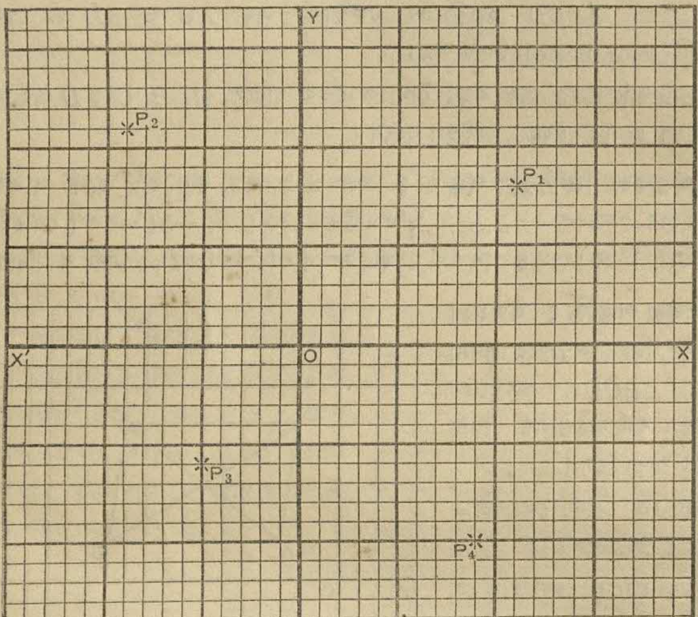
প্রশ্নমালা 56

1. পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদত্ত চিত্রে, P_1, P_2, P_3, P_4 বিন্দুগুলির ভুজ-কোটি (co-ordinates) নির্ণয় কর, যখন (1) ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হইবে ; (2) ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যের পাঁচগুণকে একক ধরা হইবে।

2. ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যের তিনগুণকে 'একক'রূপে ধরা হইলে, নিম্নে প্রদত্ত চিত্রে, P_1, P_2, P_3, P_4 বিন্দুগুলির ভুজ-কোটি কি কি হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

3. $(-4, -4)$, $(7, 7)$ ও $(13, 13)$ বিন্দুগুলি সংস্থাপন করিয়া প্রত্যক্ষ কর যে, উহারা মূলবিন্দু (origin) দিয়া অতিক্রান্ত একটি সরলরেখায় অবস্থিত।

4. $(-8, 4)$ এবং $(10, -5)$ বিন্দুদ্বয় সংস্থাপন কর এবং প্রত্যক্ষ কর যে, উহাদের সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়া যায়।



5. $(8, 5)$ ও $(-4, -11)$ বিন্দুদ্বয় সংস্থাপন করিয়া উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

6. $(-7, 9)$ ও $(-12, 21)$ বিন্দুদ্বয় সংস্থাপন করিয়া উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

7. $(-11, 13)$ ও $(3, -35)$ বিন্দু দুইটি সংস্থাপন করিয়া উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

8. (0, 0) ও (5, 5) বিন্দুদ্বয় যুক্ত করিয়া একটি সরলরেখা টান এবং উহাকে উভয় দিকে বর্দ্ধিত কর। এই সরলরেখার উপরিস্থিত সেই বিন্দুটির কোটি নির্ণয় কর, যাহার ভুজ 11 ; এবং সেই বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর, যাহার কোটি – 13.

9. (0, 7) এবং (12, 0) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাটিকে উভয় দিকে বর্দ্ধিত কর। এই রেখার উপরিস্থিত সেই বিন্দুটির কোটি নির্ণয় কর, যাহার ভুজ – 18, এবং সেই বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর, যাহার কোটি – 14.

10. (– 4, 0) এবং (0, – 8) বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখাটিকে উভয় দিকে বর্দ্ধিত কর ; এই রেখার উপরিস্থিত সেই বিন্দুটির কোটি নির্ণয় কর, যাহার ভুজ – 10, এবং সেই বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর, যাহার কোটি – 24.

11. $A(3, 2)$, $B(3, 7)$ এবং $C(8, 5)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

12. $P(-2, 5)$, $Q(6, 5)$ এবং $R(8, 9)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

13. $D(5, 2)$, $E(6, 8)$ এবং $F(7, 12)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

14. (11, 2), (3, 2), (3, 7) এবং (11, 7) বিন্দু চারিটি দ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ; উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ-কোটি নির্ণয় কর।

15. এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার ভূমি 6 সেন্টিমিটার এবং বাহুদ্বয় যথাক্রমে 3 ও 5 সেন্টিমিটার। উহার উচ্চতা যথাসম্ভব সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ কর।

16. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর :

(i) (6, 0), (6, 3), (6, 4), (6, 6), (6, 8) এবং (6, 10) ;

(ii) (– 2, 7), (3, 7), (5, 7), (7, 7), (8, 7) এবং (10, 7).

উপরিলিখিত (i) এর বিন্দুগুলি সমরেখ এবং (ii) এর বিন্দুগুলিও সমরেখ ; দেখাও যে, এই রেখাদ্বয় যথাক্রমে y-অক্ষরেখা ও x-অক্ষরেখার সমান্তরাল ; রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ-কোটি নির্ণয় কর।

17. (3, 4), (4, 3), (5, 0), (– 4, – 3) ও (4, – 3) বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর। মূলবিন্দু হইতে উহাদের দূরত্বগুলি মাপিয়া দেখাও যে, উহারা মূলবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত একটি বৃত্তের উপরে অবস্থিত।

18. $A(5, 2)$, $B(9, 2)$, $C(5, 8)$, $D(9, 8)$ এবং $E(7, 12)$ বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর ; $ABDEC$ পঞ্চভুজটির ক্ষেত্রফল, এবং AD ও BC এর ছেদবিন্দুর ভুজ-কোটি নির্ণয় কর।

[নবম শ্রেণীর পাঠ্য]

অষ্টাদশ অধ্যায়

পূর্ব্বপাঠের পুনরালোচনা (Revision of previous work)

পূর্ব্বপঠিত নিয়মাবলীর প্রয়োগ ও বিবিধ প্রশ্নমালা (II)

118. পূর্ব্বপাঠের পুনরালোচনার জন্য নিম্নে কয়েকটি সূত্রের প্রয়োগ এবং একটি বিবিধ প্রশ্নমালা সন্নিবেশিত হইল। এইগুলির সমাধান করিলে পূর্ব্বপঠিত বিষয়-সমূহের আরও পরিষ্কার ধারণা জন্মিবে।

119. পূর্ব্বপঠিত সূত্রাবলীর প্রয়োগ : পূর্ব্বে যে সকল সূত্র (formula) শিখিয়াছ, তাহার আশু প্রয়োগের জন্য নিম্নে পুনরায় উহাদিগকে সন্নিবেশিত করা হইল।

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

(ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

(iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

(iv) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

(v) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.

(vi) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$.

(vii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$.

(viii) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$.

(ix) $(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab$.

(x) $(x-a)(x+b) = x^2 + (b-a)x - ab$.

(xi) $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$.

120. তোমরা সরল সমীকরণের অধ্যায়ে, **অভেদ** (identity) বলিয়া একটি শব্দ পাইয়াছ এবং দেখিয়াছ যে দুইটি বীজগণিতীয় রাশি যদি সমতাচিহ্ন দ্বারা সম্বদ্ধ হয় এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত অক্ষর বা অক্ষরসমূহের যে কোন মানের জন্য যদি উক্ত সমতা রক্ষিত হয়, তাহা হইলে উক্ত সমতা-সম্বদ্ধ রাশি দুইটি একটি **অভেদ** (identity) উৎপন্ন করিল বলা হয়। সমতা-সম্বদ্ধ রাশি দুইটির বামদিকেরটিকে অভেদের **বাম পার্শ্ব** (side) বা **পক্ষ** (member) বলে, এবং ডা'নদিকেরটিকে অভেদের **ডা'ন পার্শ্ব** (side) বা **পক্ষ** (member) বলে।

এখন, পূর্ব্বপৃষ্ঠার সূত্রগুলিতে দেখা যায় যে, উহাদের কোনটিই তৎসংশ্লিষ্ট অক্ষর বা অক্ষরসমূহের কোন নির্দ্দিষ্ট মানের উপর নির্ভর করে না। সংশ্লিষ্ট অক্ষরগুলির মান যাহাই হউক না কেন, উভয়পক্ষের মান সকল সময় একই হইবে। সুতরাং, **অভেদ** শব্দের সংজ্ঞা অনুসারে, উহাদের প্রত্যেকটিই এক একটি **অভেদ** (identity)। অতএব, অভেদ ও সূত্রাবলী এক অর্থেই ব্যবহৃত হইতে পারে।

কাজেই, কোন **অভেদ প্রতিপন্ন** করার অর্থ হইল, পূর্ব্ব-প্রতিষ্ঠিত **সূত্রাবলীর প্রয়োগ** দ্বারা নূতন একটি সূত্র প্রতিষ্ঠিত করা।

নিম্নে সূত্রাবলী প্রয়োগের সহজ কৌশল কয়েকটি দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝান যাইতেছে।

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $(a+3b)^2+(a-3b)^2=2a^2+18b^2$.

বাম পক্ষ $=(a^2+6ab+9b^2)+(a^2-6ab+9b^2)$ [নিয়ম 59 এবং 60]

$=2a^2+18b^2$.

উদা. 2. প্রমাণ কর যে,

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\tfrac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2].$$

বাম পক্ষ $=\tfrac{1}{2}[2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca]$

$=\tfrac{1}{2}[(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)-2ab-2bc-2ca]$

$=\tfrac{1}{2}[(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)+(a^2-2ab+b^2)]$

$=\tfrac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]$. [নিয়ম 60]

উদা. 3. প্রমাণ কর যে,

$$(x+5y-3z)^3+(x-5y+3z)^3+6x(x+5y-3z)(x-5y+3z)=8x^3.$$

$x+5y-3z$ এর পরিবর্ত্তে a, এবং $x-5y+3z$ এর পরিবর্ত্তে b ধরিয়া, দেখা যায় যে,

বাম পক্ষ $=a^3+b^3+6x.ab$

$=a^3+b^3+3ab(a+b)$

[যেহেতু $a+b=(x+5y-3z)+(x-5y+3z)=2x$]

$=(a+b)^3$ [নিয়ম 86]

$=(2x)^3=8x^3$.

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)=0$.

বাম পক্ষ $=(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)$ [নিয়ম 61]

$=b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2$

$=0$.

উদা. 5. $s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$. [কলিঃ প্রবেঃ, 1902]

$$as+bc=a(a+b+c)+bc$$
$$=a^2+a(b+c)+bc=a^2+ab+ac+bc$$
$$=a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(a+c).$$ [নিয়ম 75]

এইরূপভাবে,

$$bs+ca=b(a+b+c)+ca=b^2+b(a+c)+ac$$
$$=b^2+ab+bc+ac=(b+c)(b+a);$$

এবং $cs+ab=c(a+b+c)+ab=c^2+c(a+b)+ab$
$$=c^2+ca+cb+ab=(c+a)(c+b).$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)$
$$=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

উদা. 6. $s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=s(s-2a)(s-2b)(s-2c).$$

বাম পক্ষ $=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$
$$=\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}$$
$$=\{(a^2+2ab+b^2)-c^2\}\{c^2-(a^2+b^2-2ab)\}$$
$$=\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$$
$$=(\overline{a+b}+c)(\overline{a+b}-c)(c+\overline{a-b})(c-\overline{a-b})$$
$$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$
$$=(a+b+c)(\overline{a+b+c}-2c)(\overline{c+a+b}-2b)$$
$$\times(\overline{b+c+a}-2a)$$
$$=s(s-2c)(s-2b)(s-2a)$$
$$=s(s-2a)(s-2b)(s-2c).$$

উদা. 7. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c=c^3.$$

এখন, $c=2s-(a+b)=(s-a)+(s-b)$.

অতএব, $(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c$
$$=(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)\{(s-a)+(s-b)\}$$
$$=\{(s-a)+(s-b)\}^3=c^3.$$

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$
$$=2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y).$$

$x-y$ এর পরিবর্ত্তে a
$y-z$ এর পরিবর্ত্তে b
এবং $z-x$ এর পরিবর্ত্তে c
} ধরিয়া, দেখা যায় যে, $a+b+c=0$.

অতএব, $\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$
$$-\{2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y)\}$$
$$=(a^2+b^2+c^2)-\{2a(-c)+2b(-a)+2c(-b)\}$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ac+2ab+2bc=(a+b+c)^2=0\ ;$$

$\therefore$ $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$
$$=2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y).$$

উদা. 9. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,
$$2(s-a)(s-b)+2(s-b)(s-c)+2(s-c)(s-a)=2s^2-a^2-b^2-c^2.$$

যেহেতু $2x+2y+2z=(x+y)+(y+z)+(z+x)$,

অতএব, $2(s-a)(s-b)+2(s-b)(s-c)+2(s-c)(s-a)$
$$=\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)\}+\{(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}$$
$$+\{(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b)\}.$$

এখন, $(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)=(s-b)\{(s-a)+(s-c)\}$
$$=(s-b)\{2s-a-c\}=(s-b)b.$$

এইরূপভাবে, $(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=(s-c)c$,

এবং $(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b)=(s-a)a$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=(s-b)b+(s-c)c+(s-a)a$
$$=s(b+c+a)-b^2-c^2-a^2=2s^2-a^2-b^2-c^2.$$

উদা. 10. (i) $a=b=c$, অথবা, (ii) $a+b+c=0$ হইলে,
প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

(i) $a=b=c$ হইলে, বাম পক্ষ $=a^3+a^3+a^3=3a^3=3a.a.a=3abc$.

আবার, (ii) যেহেতু $a+b+c=0$, $c=-(a+b)$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $=a^3+b^3+\{-(a+b)\}^3$
$$=a^3+b^3-\{a^3+b^3+3ab(a+b)\} \qquad [\text{ নিয়ম } 86\ ]$$
$$=-3ab(a+b)=3ab\{-(a+b)\}=3abc.$$

টীকা। স্পষ্টতঃ, $a=b=c$, অথবা, $a+b+c=0$ হইলেই, $a^3+b^3+c^3=3abc$ অভেদটি সত্য হয়, নতুবা, হয় না।

যে সকল অভেদাবলীর সত্যতা, তৎসংশ্লিষ্ট প্রতীকসমূহের মধ্যে বর্তমান কোন সম্বন্ধের উপর নির্ভর করে, তাহাদিগকে **সাপেক্ষ অভেদাবলী** (conditional identities) বলে।

উদা. 11. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2. \quad \text{[এলাহাবাদ, 1923]}$$

যেহেতু $a+b+c=0$, অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$$a=-(b+c),\ b=-(c+a),\ c=-(a+b)\ ;$$

$$\therefore\ a^2+ab+b^2=\{-(b+c)\}^2+\{-(b+c)\}b+b^2,$$

[যেহেতু $a=-(b+c)$]

$$=(b+c)^2-(b+c)b+b^2$$
$$=b^2+2bc+c^2-b^2-bc+b^2$$
$$=b^2+bc+c^2.$$

আবার, $a^2+ab+b^2=a^2+a\{-(c+a)\}+\{-(c+a)\}^2,$

[যেহেতু $b=-(c+a)$]

$$=a^2-a(c+a)+(c+a)^2$$
$$=a^2-ca-a^2+c^2+2ca+a^2$$
$$=c^2+ca+a^2.$$

অতএব, $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2.$

অন্য পদ্ধতি :

$$a^2+ab+b^2=a(a+b)+b^2=\{-(b+c)\}(-c)+b^2$$
$$=(b+c)c+b^2=bc+c^2+b^2=b^2+bc+c^2.$$

আবার, $b^2+bc+c^2=b(b+c)+c^2=\{-(c+a)\}(-a)+c^2$

$$=(c+a)a+c^2=ca+a^2+c^2=c^2+ca+a^2.$$

অতএব, $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2.$

উদা. 12. $x=b-c+a$, $y=c-a+b$ এবং $z=a-b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(b-a)x+(c-b)y+(a-c)z=0.$

এখন, $(b-a)x=(b-a)(b-c+a)=(b-a)\{(b+a)-c\}$

$$=(b-a)(b+a)-(b-a)c=b^2-a^2-bc+ac\ ;$$ [নিয়ম 61]

$$(c-b)y=(c-b)(c-a+b)=(c-b)\{(c+b)-a\}$$
$$=(c-b)(c+b)-(c-b)a=c^2-b^2-ca+ab\ ;$$

$$(a-c)z=(a-c)(a-b+c)=(a-c)\{(a+c)-b\}$$
$$=(a-c)(a+c)-(a-c)b=a^2-c^2-ab+bc\ ;$$

$$\therefore\ (b-a)x+(c-b)y+(a-c)z$$
$$=b^2-a^2+c^2-b^2+a^2-c^2-bc+ac-ca+ab-ab+bc=0.$$

উদা. 13. $x=b+c$, $y=c+a$ এবং $z=a+b$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$$

বাম পক্ষ $=\frac{1}{2}[2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2zx-2xy]$

$=\frac{1}{2}[(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)]$

[পদগুলিকে সাজাইয়া]

$=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$ [নিয়ম 60]

$=\frac{1}{2}[\{(b+c)-(c+a)\}^2+\{(c+a)-(a+b)\}^2+\{(a+b)-(b+c)\}^2]$

[x, y, z এর মান বসাইয়া]

$=\frac{1}{2}[(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2]$

$=\frac{1}{2}[(b^2-2ba+a^2)+(c^2-2cb+b^2)+(a^2-2ac+c^2)]$ [নিয়ম 60]

$=\frac{1}{2}[(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab)]$ [সরল করিয়া]

$=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$

উদা. 14. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2=a^2+b^2+c^2.$ [এলাহাবাদ, 1926]

বাম পক্ষ $=(s^2-2as+a^2)+(s^2-2bs+b^2)+(s^2-2cs+c^2)+s^2$

$=4s^2-2s(a+b+c)+a^2+b^2+c^2$

$=4s^2-2s\times 2s+a^2+b^2+c^2$

$=4s^2-4s^2+a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2.$

প্রশ্নমালা 57

দেখাও যে (Show that) :

1. $(a^2+ax-x^2)(a^2-ax+x^2)=a^4-a^2x^2+2ax^3-x^4.$
2. $(a^2-ax+x^2)(ax-a^2+x^2)=x^4-a^2x^2+2a^3x-a^4.$
3. $(a+b+c)(a-b-c)+(b+c-a)(a-b+c)=2b(a-b-c).$
4. $2(x^3-x)+3x(x+1)=x(x+1)(2x+1).$
5. $x^4+x+x(x+1)(2x+1)-2x(x+1)=x^2(x+1)^2.$
6. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$
7. $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=2(a+b+c+d)(a-d).$
8. $(a+b+c-d)(d-a-b+c)=c^2-(a+b-d)^2.$
9. $(b+c)^2-a^2$ এবং $a^2-b^2-c^2+2bc$ এর গুণফল $2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4.$
10. $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2+(a+c-b)^2-(b+c-a)^2=8ac.$

প্রমাণ কর যে (Prove that) :

11. $(a^2+b^2+c^2)^2-(b^2+c^2-a^2)^2-(a^2-b^2+c^2)^2$
$+(a^2+b^2-c^2)^2=8a^2b^2.$

12. $(b-c+d+a)(d+a-b+c)+(c-d+a+b)(b+c+d-a)$
$=4(ad+bc).$

13. $(b+c+a-d)(b+c-a+d)=2(ad+bc)-(a^2-b^2-c^2+d^2).$

14. $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$
$=(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d).$

15. $(x-y+z)^2+(y-z+x)^2+(z-x+y)^2+2(x-y+z)(y-z+x)$
$+2(y-z+x)(z-x+y)+2(z-x+y)(x-y+z)=(x+y+z)^2.$

16. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$
$=(ay-bx)^2+(cx-az)^2+(bz-cy)^2.$

17. $(a+c)^3-(b+c)^3-3(a+c)(b+c)(a-b)=(a-b)^3.$

18. $(x-ay+bz)^3+(x+ay-bz)^3+6x(x-ay+bz)(x+ay-bz)=8x^3.$

19. $4(a+b+c)^2=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$
$+2(a+b)(b+c)+2(b+c)(c+a)+2(c+a)(a+b).$

20. $8(a+b+c)^3=(a+b)^3+(b+2c+a)^3$
$+6(a+b)(b+2c+a)(a+b+c).$

21. $27(a+b+c)^3=(a+3b+2c)^3+(2a+c)^3$
$+9(a+3b+2c)(2a+c)(a+b+c).$

22. $s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,
$(s-3a)^2+(s-3b)^2+(s-3c)^2=3\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$

23. $ab+bc+ca=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
(i) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$;
(ii) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=-2abc(a+b+c).$

24. $2s=x+y+z$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$4y^2z^2-(y^2+z^2-x^2)^2=16s(s-x)(s-y)(s-z).$

25. প্রমাণ কর যে,
$(x+2y+19z)^3+(x-2y-19z)^3+6x(x+2y+19z)(x-2y-19z)$
$=(5x+6y-z)^3+(z-6y-3x)^3+6x(5x+6y-z)(z-6y-3x).$

26. প্রমাণ কর যে,
$(a+2b+3c)^2+(a-b-3c)^2+2(a+2b+3c)(a-b-3c)$
$=(3a+y+z)^2+(a+y+z-b)^2-2(3a+y+z)(a+y+z-b).$

27. দেখাও যে, $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

28. প্রমাণ কর যে, $(x-y)^2-(y-z)(z-x)$
$=(y-z)^2-(z-x)(x-y)$
$=(z-x)^2-(x-y)(y-z)$
$=-\{(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)\}$.

29. প্রমাণ কর যে, $(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=2(b-c)(c-a)$,
$(b-c)^2-(c-a)^2-(a-b)^2=2(c-a)(a-b)$,
$(c-a)^2-(a-b)^2-(b-c)^2=2(a-b)(b-c)$.

30. প্রমাণ কর যে, $(a-b)^2+(a-b)(b-c)+(b-c)^2$
$=(b-c)^2+(b-c)(c-a)+(c-a)^2$
$=(c-a)^2+(c-a)(a-b)+(a-b)^2$.

বিবিধ প্রশ্নমালা II

I

1. নিম্নলিখিত রাশিমালাকে (i) y এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে, (ii) z এর উর্দ্ধক্রমিক শক্তি অনুসারে, সাজাও :

$$x^3z+xy^3-x^3y-xy^2z-xz^3+xyz^2-2yz^3-2y^3z.$$

2. $x=-\frac{1}{2}$ এবং $y=2$ হইলে,

$\frac{4y}{5}(y-x)-35\left[\frac{3x-4y}{5}-\frac{1}{10}\left\{3x-\frac{5}{7}\left(7x-4y\right)\right\}\right]$ এর মান নির্ণয় কর।

3. $x-\frac{1}{x}=p$ হইলে, দেখাও যে, $x^3-\frac{1}{x^3}=p^3+3p$.

4. x^5-y^5 কে $x-y$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল কত হয়, লিখ।

5. $(a+b+c)^2-(a-b+c)^2+(a+b-c)^2-(b+c-a)^2$ কে সরল কর এবং $a=b=c=-4$ হইলে, ইহার মান নির্ণয় কর।

6. $x^2-(x-y+z)(x+y-z)$, $y^2-(y-x+z)(y+x-z)$ এবং $z^2-(z-x+y)(z+x-y)$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

7. $(a-b+c+d)(a+b+c-d)$ কে A^2-B^2 এর আকারে পরিবর্ত্তন কর।

8. $4x^2+12xy+9y^2-8x-12y$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

9. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $4+12x+9x^2$ এবং $2+13x+15x^2$ এর।

10. সরল কর : $\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{1}{x^2-x-12}$.

11. সমাধান কর : $\dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{3x+5}{7}=5$.

II

1. এরূপ একটি রাশি নির্ণয় কর, যাহা $ax^3+bx^2y+3cxy^2+dy^3$ অপেক্ষা যত বড়, $2ax^3+\frac{1}{4}(3a-b)x^2y+\frac{3}{4}(3a-c)xy^2+5dy^3$ এর চতুর্গুণ অপেক্ষা তত ছোট।

2. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের সমষ্টিকে সরল উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :
$(b-1)m^4+am^3+(c-b)m^2-bm-2,\quad am^3-(c-a)m^2+(a+b)m+1$ এবং $(a-b+1)m^4-(2a-b)m^3+(a+b)m^2-(a-2b)m+1$.

3. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ কে x^2-2x+1 দ্বারা গুণ কর।

4. প্রমাণ কর যে, $\{(ac+bd)x+(ad-bc)y\}^2+\{(ac+bd)y-(ad-bc)x\}^2$
$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)(x^2+y^2)$.

5. $x-a, x-b$ ও $x-c$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর। ইহা হইতে দেখাও যে, $(x-3)^3=x^3-9x^2+27x-27$.

6. $x^5-px^4+qx^3-qx^2+px-1$ কে $x-1$ দ্বারা ভাগ কর।

7. $a^6+a^5b-a^3b^3+ab^5+b^6$ ও a^2-ab+b^2 এর গুণফলকে $a^4-a^2b^2+b^4$ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, ইহা $(a^2+b^2)^2$ অপেক্ষা a^2b^2 পরিমিত ছোট।

8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $ab-ac-b^2+bc$; (ii) $b^2-12ac-4a^2-9c^2$.

9. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$a^3b-ab^3,\ a^2+ab-2b^2$ এবং $a^2-ab-2b^2$ এর।

10. সরল কর : $\dfrac{b+c+m}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a+m}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b+m}{(c-a)(c-b)}$.

11. সমাধান কর : $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{x+2}{5}=5$.

III

1. $(\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{a})x^3+(\sqrt{bc}-\sqrt{ca}+\sqrt{ab})x^2+(\sqrt{abc}-2m+n)x+3u$, $(\sqrt{c}-\sqrt{a}+\sqrt{b})x^3+(\sqrt{ca}-\sqrt{ab}+\sqrt{bc})x^2+(\sqrt{abc}-2n+m)x+2(v-u)$ এবং $(p-2\sqrt{b})x^3+(q-2\sqrt{bc})x^2+(m+n+r-2\sqrt{abc})x+(s-u-2v)$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

2. $a(a^2+b^2)$ হইতে $3a^3-5a^2b+2b^3$, $8a^2b-3b^3+2ab^2$, $5ab^2-4a^3-3a^2b$ এবং $2a^3-6ab^2+4b^3$ এর সমষ্টি বিয়োগ কর।

3. $a+b=8$ এবং $ab=5$ হইলে, a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর।

4. $a=89$, $b=-69$, $c=8$ হইলে, $49c^2+9(a+b)^2-42(a+b)c$ এর মান নির্ণয় কর।

5. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ কে y^2-xz-z^2+xy দ্বারা ভাগ কর।

6. $4a-3+16a^2+64a^3$ কে $(A-B)+(A^2-B^2)+(A^3-B^3)$ এর আকারে পরিবর্ত্তিত করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

7. দেখাও যে, $(1+x+x^2)^2-(1-x+x^2)^2=4x(1+x^2)$.

8. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{n}{2}s$ হইলে, দেখাও যে, $(s-a_1)^2+(s-a_2)^2+(s-a_3)^2+\cdots+(s-a_n)^2=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_n{}^2$.

9. গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

x^4+2x^2+9 এবং x^3-x+6 এর।

10. সরল কর : $\dfrac{\dfrac{x^2+y^2}{y}-x}{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}}\div\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$.

11. সমাধান কর : $(x+\frac{3}{2})(x-\frac{5}{2})=(x+3)(x-5)+\frac{93}{4}$.

IV

1. $p=-m$ এবং $q=l$ ধরিয়া লইয়া, $(l^2r-3lmn+2m^3)p^3+3(lmr+m^2n-2ln^2)p^2q+3(2m^2r-lnr-mn^2)pq^2+(3mnr-lr^2-2n^3)q^3$ কে সরল কর।

2. $\frac{1}{3}a^3x^4+5{\cdot}7a^2bx^3-3{\cdot}257ab^2x^2+\frac{5}{8}b^3x+9$ হইতে কত বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল $4{\cdot}7a^2bx^3-{\cdot}007ab^2x^2+2\frac{3}{8}b^3x-5\frac{2}{3}a^3x^4+6$, $5\frac{1}{3}b^3x$

$-3\frac{1}{3}a^2bx^3 + a^3x^4 - \dot{}05ab^2x^2 + 11$ এবং $2a^3x^4 - 1\frac{2}{3}a^2bx^3 - 6\dot{}2ab^2x^2 - 10\frac{1}{3}b^3x - 20$ এর সমষ্টির সমান হইবে ?

3. $16a^4 + 24a^2b^2 + 36b^4$ কে $4a^2 - 6b^2$ দ্বারা গুণ কর।

4. নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাও :
(i) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$; (ii) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$;
(iii) $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$.

5. $x+a$, $x+b$ এবং $x+c$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর। ইহার সাহায্যে $(x-7)(x+8)(x-12)$ তে x^2 এবং x এর সহগ দুইটি নির্ণয় কর।

6. প্রমাণ কর যে, $(ab+cd+ac+bd)(ab+cd-ac-bd)$
$$= a^2b^2 + c^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2.$$

7. $a = q+r+s$, $b = r+s-p$ এবং $c = p+q+r$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc = r^2.$$

8. $a^3 + 8b^3 + 27c^3 - 18abc$ কে $a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 6bc - 3ca - 2ab$ দ্বারা ভাগ কর।

9. গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর :
$x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - y^2$ এবং $x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$ এর।

10. সরল কর : $\left(\frac{2a}{m^2 - a^2} - \frac{1}{m-a} + \frac{2}{m+a}\right) \div \frac{m - a + \frac{a^2}{m}}{m^2}.$

11. সমাধান কর : $\frac{1}{4}(x-8) + \frac{x+4}{4} + \frac{23-x}{5} = 7 - \frac{x-1}{7}.$

V

1. $a = \cdot 16$ এবং $b = -37$ হইলে, $49a^2 + 126ab + 81b^2$ এর মান নির্ণয় কর।

2. এমন একটি রাশিমালা নির্ণয় কর, যাহা $bx^4y - dx^2y^3 - fy^5$ অপেক্ষা যত ছোট, $ax^5 - cx^3y^2 + exy^4$ অপেক্ষা ঠিক তত বড়।

3. $2s = a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,
$$(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

4. সরল কর : $(5a-7c)^3+(8c-3a)^3+3(2a+c)(5a-7c)(8c-3a)$.

5. $(2x^3-x^2+3x-4)(2x^3+x^2+3x+4)+(2x^3+x^2-3x+4)$
$\times(2x^3+x^2+3x-4)$ কে হ্রস্ব আকারে প্রকাশ কর।

6. দেখাও যে, $\frac{x^8+x^4+1}{x+\sqrt{x}+1}=(x-\sqrt{x}+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.

7. a^4-b^4 কে $a-b$ দ্বারা ভাগ কর।

8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :
(i) $6a^4x^2+a^3x-6a^3x^3-a^2x^2$; (ii) $xy(1+z^2)+z(x^2+y^2)$.

9. ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. নির্ণয় কর :
$3x^3-7x^2+4$, x^3-2x^2-x+2 এবং $2x^3-3x^2+1$ এর।

10. সরল কর : $1\div[x-1+1\div\{1+x\div(4-x)\}]$.

11. সমাধান কর : $\frac{7-7x}{5}-\frac{3-3x}{6}=\frac{x-2}{2}+1$.

VI

1. $8765943\times8765943-8765938\times8765938$ এর মান নির্ণয় কর।

2. $a=29$ এবং $b=-23$ হইলে, $27a^3+108a^2b+144ab^2+64b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

3. $a^3+b^3+c^3-3abc$ কে $a+b+c$ দ্বারা ভাগ কর ; এবং ইহার সাহায্যে দেখাও যে, $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$.

4. $(ax+b)^2+(cx+d)^2+(bx-a)^2+(dx-c)^2$ কে $a^2+b^2+c^2+d^2$ দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল কত হইবে ?

5. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+34$ কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর ; ইহার সাহায্যে দেখাও যে, উহা সর্ব্বদাই একটি ধনরাশি, এবং $x^2-7x+9=0$ হইলে, ইহার মান 25 হইবে।

6. $(a^2-b^2-c^2+d^2)^2-4(ad-bc)^2$ কে চারিটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

7. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $a^2-2ab+b^2+2a-2b$;
(ii) $6a^2-ab-b^2+6a-3b$; (iii) $15x^2-4xy-4y^2+10x+4y$.

8. $(2x-y)^2a^4-(x+y)^2a^2x^2+2(x+y)ax^4-x^6$ কে
$(2x-y)a^2-(x+y)ax+x^3$ দ্বারা ভাগ কর।

9. ল. সা. গু. এবং গ. সা. গু. নির্ণয় কর :
a^4+4 এবং a^3-a^2+2 এর।

10. সরল কর : $\frac{2}{x^2-1}+\frac{2}{x^2+x-2}+\frac{2}{x^2+3x+2}$.

11. কোন ভদ্রলোক বাৎসরিক আয়ের উপর টাকা প্রতি 4 পাই হিসাবে আয়কর দেওয়ার পর 1175 টাকা ঘরে আনিতে পারেন। তাঁহার বাৎসরিক আয় কত ?

VII

1. $x+y+z=8$ এবং $x^2+y^2+z^2=50$ হইলে, $xy+yz+zx$ এর মান নির্ণয় কর।

2. প্রমাণ কর যে, $(2a-3b)^2+(3b-5c)^2+(5c-2a)^2$
$=2(2a-3b)(2a-5c)+2(3b-5c)(3b-2a)+2(5c-2a)(5c-3b)$.

3. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ এবং $x+y+z$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

4. $a^2(x^2-a^2)-ab(x+a)^2+b(x^3+a^3)$ কে $a^2(x-a)+bx(x-2a)$ দ্বারা ভাগ কর।

5. দেখাও যে,
$$(16x^5-20x^3+5x)^2+(1-x^2)\{16(1-x^2)^2-20(1-x^2)+5\}^2=1.$$

6. $x+y+z$, $x-y+z$, $x+y-z$ এবং $z-x+y$ এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

7. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $6x^2+x-15$;
(ii) $35(x-y)^2-41(x-y)+12$; (iii) $11x^2-54xy^2+63y^4$.

8. $x+y+z=0$ হইলে, দেখাও যে, $(x+y)(y+z)(z+x)=-xyz$ এবং $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

9. $x^2-px-14$ রাশিটি $x-2$ দ্বারা বিভাজ্য হইতে হইলে, 'p' এর মান কত হওয়া দরকার ?

10. দেখাও যে,
$$\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)+(a+b+c)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=abc-\frac{1}{abc}.$$

11. কোন একখানা বই ছাপাইবার খরচ নিম্নলিখিতরূপ হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর :

বইএর সংখ্যা	500	600	700	800	900	1000
ছাপাইবার খরচ	25 টা.	27 টা. 8 আ.	30 টা.	32 টা. 8 আ.	35 টা.	37 টা. 8 আ.

VIII

1. গুণফলে x^2-বিশিষ্ট পদটি পর্য্যন্ত রাখিয়া, $1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2$ এবং $1+bx+\frac{b(b-1)}{2}x^2$ এর গুণফল লিখ।

2. $x+y+z=15$ এবং $xy+yz+zx=85$ হইলে, $x^2+y^2+z^2$ এর মান নির্ণয় কর।

3. $a^2+b^2=1=c^2+d^2$ হইলে, দেখাও যে,

$$(ad-bc)(ad+bc)=(a-c)(a+c).$$

4. $(ax+by)^3+(ax-by)^3+(bx-ay)^3+(bx+ay)^3$ কে $(a+b)^2x^2-3ab(x^2-y^2)$ দ্বারা ভাগ কর।

5. $x+\frac{1}{x}=a$ হইলে, $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$ এবং $x^4+\frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $bx=ay$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2$.

[বোম্বাই প্রবেশিকা, 1910]

7. দেখাও যে, $(x^2+y^2)(x^2+z^2)+2x(x^2+yz)(y+z)+4x^2yz$

$$=(x^2+xy+xz+yz)^2.$$

8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^4-11x^2y^2+y^4$. [বোম্বাই প্রবেঃ, 1897]

9. সমাধান কর : $4x-\frac{2x-2}{5}=x+24+\frac{x-1}{2}$.

10. সরল কর : $\frac{1}{x-2a}-\frac{1}{x+2a}-\frac{4a}{x^2+4a^2}-\frac{32a^3}{x^4+16a^4}$.

11. কোন স্থানের কোন নির্দ্দিষ্ট সময়ের তাপমাত্রা, ফারিন্‌হিট্ (Fahrenheit)-তাপমান যন্ত্র দ্বারা ও সেন্টিগ্রেড্ (Centigrade)-তাপমান যন্ত্র দ্বারা নিম্নলিখিতরূপে নির্দ্দিষ্ট হইলে, ঐ দুই যন্ত্রের সম্বন্ধ-সূচক একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর :

সেন্টিগ্রেড্ তাপমান যন্ত্রে	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
ফারিন্‌হিট্ তাপমান যন্ত্রে	32°	50°	68°	86°	104°	122°	140°

প্রত্যক্ষ কর যে, উপরিউক্ত সম্বন্ধগুলি সংক্ষেপে নিম্নলিখিতরূপে দেওয়া যায় :

$$F^\circ=32^\circ+\frac{9C^\circ}{5}.$$

IX

1. a^2+ax+x^2 কে a^2-ax+x^2 দ্বারা গুণ কর।

2. দেখাও যে, $(a^2+2ab+b^2-c^2)(a^2-2ab+b^2+c^2)$
$$=(a^2-b^2)^2+(4ab-c^2)c^2.$$

3. $a^2+b^2=1=c^2+d^2$ হইলে, দেখাও যে, $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=1$.

4. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^3$ এর বিস্তৃতি (expansion) লিখ [অর্থাৎ, $x+\frac{2}{x}$ এর ঘন (cube) নির্ণয় করিয়া যে রাশিমালাটি পাওয়া যায়, সেইটি লিখ]।

5. দেখাও যে, $(a^2+ab\sqrt{2}+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2)=a^4+b^4$.

6. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ কে $ab+bc+ca$ দ্বারা ভাগ কর।

7. দেখাও যে, $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$
$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$$

8. $(7+x)(8-x)-\frac{7x}{3}=17x+1-x^2$ সমীকরণটি সমাধান কর।

9. সরল কর :
$$\frac{1}{m^2-5mn+6n^2}+\frac{a}{m^2-4mn+3n^2}+\frac{1}{m^2-3mn+2n^2}.$$

10. দুই অঙ্ক-বিশিষ্ট কোন সংখ্যার একক-স্থানীয় অঙ্কটি দশক-স্থানীয় অঙ্কের চারি-গুণ ; সংখ্যাটিকে উল্টাইয়া (অর্থাৎ একক-স্থানের অঙ্কটিকে দশক-স্থানে এবং দশক-স্থানের অঙ্কটিকে একক-স্থানে) লিখিয়া উহার সহিত 2 যোগ করিলে যোগফল পূর্ব্বসংখ্যার তিনগুণ হয়। সংখ্যাটি কত ?

11. কোন যাত্রিনিবাসের সভ্যসংখ্যা ও তাহাদের নিমিত্ত দৈনিক খরচ নিম্নলিখিত-রূপ হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর :

সভ্যসংখ্যা	30	40	50	60	70	100
খরচ	110 টা.	130·5 টা.	150 টা.	169·7 টা.	190 টা.	250 টা.

X

1. $x+\frac{1}{x}=2(a+m)$, $x-\frac{1}{x}=2b$, $y+\frac{1}{y}=2(c+n)$ এবং $y-\frac{1}{y}=2d$ হইলে, $xy+\frac{1}{xy}$ এর মান নির্ণয় কর।

2. সরল কর : $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^4-2\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)^2+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^4$.

3. দেখাও যে, $(1+a)^2(1+c^2)-(1+c)^2(1+a^2)=2(a-c)(1-ac)$.

4. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে,
$(b^2-c^2)(b+c-2a)^2+(c^2-a^2)(c+a-2b)^2+(a^2-b^2)(a+b-2c)^2=0$.

5. $a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2$ কে $a^2+b^2+c^2$ দ্বারা গুণ কর।

6. $15x^2-41x+14$ কে সরল উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

7. $\frac{x-1}{4}-\frac{2(x+1)}{9}+\frac{5(x-5)}{12}-4=\frac{x+1}{18}$ এই সমীকরণটি হইতে x এর মান নির্ণয় কর।

8. A এবং B উভয়েরই আয় সমান। A, তাহার আয়ের এক-পঞ্চমাংশ সঞ্চয় করিল ; কিন্তু B, বৎসরে A অপেক্ষা £80 অধিক ব্যয় করিয়া চারি বৎসর পরে £220 ঋণগ্রস্ত হইল। তাহাদের প্রত্যেকের আয় কত ?

[A and B have equal income. A lays by a fifth of his income ; but B, by spending annually £80 more than A, at the end of 4 years finds himself £220 in debt. What was their income ?]

9. সমাধান কর : $\frac{x-2}{2}+\frac{2x-3}{5}+2=\frac{4(x-1)}{3}$.

10. সরল কর : $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(x-z)^2}{(x+y)^2-z^2}+\frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}$.

11. শ্রমিক-পরিবারসমূহের লোকসংখ্যা হিসাবে সাপ্তাহিক খরচ নিম্নলিখিতরূপ হইলে, উহা দ্বারা একটি স্তম্ভ-লেখ অঙ্কন কর :

লোকসংখ্যা	5	9	13	15	20	26
সাপ্তাহিক খরচ	35	53	71	80	100	117

উনবিংশ অধ্যায়

জটিল গুণনীয়ক

(Harder Factor)

পূর্ব্বে a^2-b^2, a^3+b^3, a^3-b^3 এবং ax^2+bx+c এর আকারের রাশিসমূহকে কি প্রকারে গুণনীয়কে (উৎপাদকে) বিশ্লেষণ করা যায়, তাহা বর্ণিত হইয়াছে। এই অধ্যায়ে, জটিলতর রাশিসমূহের বিশ্লেষণ-প্রণালী বর্ণিত হইবে।

121. $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর আকারের রাশিসমূহকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ:

যেহেতু, $b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)$,

অতএব, $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=a^3+\{(b+c)^3-3bc(b+c)\}-3abc$$
$$=\{a^3+(b+c)^3\}-3bc\{(b+c)+a\}$$
$$=\{a+(b+c)\}\{a^2-a(b+c)+(b+c)^2\}-3bc(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\{a^2-ab-ac+b^2+2bc+c^2-3bc\}$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$$

উদা. 1. $a^3-b^3+c^3+3abc$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=a^3+(-b)^3+c^3-3a(-b)c$

$$=\{a+(-b)+c\}\{a^2+(-b)^2+c^2-(-b)c-ca-a(-b)\}$$
$$=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+bc-ca+ab).$$

উদা. 2. $x^3-y^3+6xy+8$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=x^3+(-y)^3+(2)^3-3x(-y).2$

$$=\{x+(-y)+2\}\{x^2+(-y)^2+2^2-(-y).2-2x-x(-y)\}$$
$$=(x-y+2)(x^2+y^2+4+2y-2x+xy).$$

উদা. 3. x^6+32x^3-64 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=x^6+8x^3-64+24x^3$

$$=(x^2)^3+(2x)^3+(-4)^3-3.x^2.2x.(-4)$$

$$=\{x^2+2x+(-4)\}\{(x^2)^2+(2x)^2+(-4)^2-2x(-4)-(-4)x^2-x^2.2x\}$$
$$=(x^2+2x-4)(x^4+4x^2+16+8x+4x^2-2x^3)$$
$$=(x^2+2x-4)(x^4-2x^3+8x^2+8x+16).$$

উদা. 4. ভাগফল নির্ণয় কর : $a^3+b^3+1-3ab$ কে $a+b+1$ দ্বারা।

$$a^3+b^3+1-3ab=a^3+b^3+1^3-3ab.1$$
$$=(a+b+1)\{a^2+b^2+1^2-b.1-1.a-ab\}$$
$$=(a+b+1)(a^2+b^2+1-b-a-ab);$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=a^2+b^2+1-b-a-ab.$

প্রশ্নমালা 58

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Factorise) :

1. $x^3+y^3-z^3+3xyz.$
2. $p^3-8q^3-r^3-6pqr.$
3. $8x^3-27y^3-z^3-18xyz.$
4. $a^3+8b^3+1-6ab.$
5. $8a^3+27b^3-64+72ab.$
6. ভাগফল নির্ণয় কর : $x^3-y^3+6xy+8$ কে $x-y+2$ দ্বারা।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

7. $x^6+5x^3+8.$
8. $(x-y)^3-(y-z)^3+(z-x)^3+3(y-z)(z-x)(x-y).$
9. $a^6-18a^3+125.$

ভাগফল নির্ণয় কর (Find the quotient of) :

10. $x^3+27-5y(25y^2-9x)$ কে $x^2+25y^2+9+5xy-3x+15y$ দ্বারা।
11. $a^3+b^3-c^3+3abc$ কে $a+b-c$ দ্বারা।
12. $x^3-y^3-1-3xy$ কে $x-y-1$ দ্বারা।
13. $x^3-8y^3+27z^3+18xyz$ কে $x-2y+3z$ দ্বারা।
14. $8a^3-27b^3-c^3-18abc$ কে $4a^2+9b^2+c^2+6ab+2ac-3bc$ দ্বারা।

122. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$ এর আকারের রাশি-সমূহের উৎপাদকে বিশ্লেষণ :

উল্লিখিত রাশি $=\{a+(b+c)\}\{a(b+c)+bc\}-abc$
$$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a+c)=\mathbf{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

অনুসি. 1. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-(b+c)(c+a)(a+b)=abc.$

অনুসি. 2. $(b+c)(c+a)(a+b)+abc=(a+b+c)(bc+ca+ab).$

123. নিম্নলিখিত রাশিদ্বয়ের উৎপাদকে বিশ্লেষণ :

(i) $P+2abc$ এবং (ii) $P+3abc,$

যখন, P, নিম্নোক্ত রাশিত্রয়ের যে কোনটিকে বুঝাইতেছে :

(1) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$

(2) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$

(3) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2).$

বস্তুতঃ, (1), (2) ও (3) দ্বারা সূচিত রাশি তিনটি, **একই** রাশি, বিভিন্নরূপে প্রকাশিত।

(i) P, (1) দ্বারা সূচিত রাশিটিকে বুঝাইলে,

$$\begin{aligned} P+2abc &= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc \\ &= a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+b^2c+bc^2 \\ &= a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c) \\ &= (b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\} \\ &= (b+c)(a+b)(a+c)=(b+c)(c+a)(a+b). \end{aligned}$$

(ii) P, (2) দ্বারা সূচিত রাশিটিকে বুঝাইলে,

$$\begin{aligned} P+3abc &= bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc \\ &= bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+abc+abc+abc \\ &= \{bc(b+c)+abc\}+\{ca(c+a)+abc\}+\{ab(a+b)+abc\} \\ &= bc(a+b+c)+ca(c+a+b)+ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)(bc+ca+ab). \end{aligned}$$

124. নিম্নোক্ত রাশিসমূহের যে কোনটি Q দ্বারা সূচিত হইলে, Q এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ :

(1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$

(2) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b).$

(3) $-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}.$

Q এর প্রথম আকার লইলে, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$\begin{aligned} &= a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-bc^2 \\ &= a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c)=-(b-c)(c-a)(a-b). \end{aligned}$$

অনুসি.। a, b, c এর পরিবর্তে যথাক্রমে a^2, b^2 এবং c^2 বসাইলে,

$$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$$
$$=-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b).$$

উদা.। গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

$$(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b).$$

প্রদত্ত রাশি $=(x^2-2ax+a^2)(b-c)+(x^2-2bx+b^2)(c-a)$
$$+(x^2-2cx+c^2)(a-b)$$
$$=x^2\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}-2x\{a(b-c)+b(c-a)$$
$$+c(a-b)\}+\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$
$$=x^2.0-2x.0-(b-c)(c-a)(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

125. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ :

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$$

[a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া]

$$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$$
$$=(b-c)\{-b^2(a-c)-bc(a-c)+a(a^2-c^2)\}$$

[b এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া]

$$=(b-c)(a-c)\{-b^2-bc+a(a+c)\}$$
$$=(b-c)(a-c)\{c(a-b)+a^2-b^2\}$$

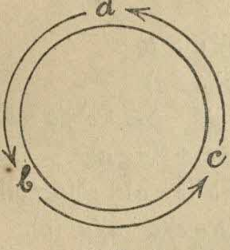
[c এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া]

$$=(b-c)(a-c)(a-b)(c+b+a)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

টীকা। লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, প্রদত্ত রাশিমালাকে (i) a এর শক্তির ক্রমানুসারে সাজাইলেই, $b-c$ উৎপাদকটি অবিলম্বে পাওয়া যায়; (ii) ইহার পর ধনুর্ব্বন্ধনীর অন্তর্ভুক্ত রাশিমালাকে আবার b এর শক্তির ক্রমানুসারে সাজাইলে, পরবর্ত্তী উৎপাদক $a-c$ সহজে পাওয়া যায়; (iii) সর্ব্বশেষে, আবার ধনুর্ব্বন্ধনীর অন্তর্ভুক্ত রাশিমালাকে c এর শক্তির ক্রমানুসারে সাজাইলে, তৃতীয় উৎপাদক $a-b$ পাওয়া যায়।

126. চক্র-ক্রম (Cyclic order) : 124 ও 125 নিয়মে উল্লিখিত রাশিসমূহে a, b, c অক্ষর তিনটির বিন্যাসে একটু বিশেষত্ব আছে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, 124 নিয়মে উল্লিখিত Q এর তুল্য আকারত্রয়ের যে কোনটির প্রথম পদে a, b, c এর পরিবর্ত্তে

যথাক্রমে b, c, a লিখিলে উহার দ্বিতীয় পদটি পাওয়া যায়; আবার, দ্বিতীয় পদে b, c, a এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে c, a, b লিখিলে তৃতীয় পদ, এবং তৃতীয় পদে c, a, b এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে a, b, c লিখিলে প্রথম পদ পাওয়া যায়। a, b, c অক্ষর তিনটিকে, কোন্ ক্রম-অনুসারে ক্রমান্বয়ে পরিবর্ত্তিত করিতে হইবে, তাহা নিম্নলিখিত উপায়ে সহজে পাওয়া যায়।



a, b, c অক্ষর তিনটিকে (চিত্রে যেরূপ প্রদর্শিত হইয়াছে) একটি বৃত্তের পরিধির উপর সাজাও; এখন, a হইতে আরম্ভ করিয়া তীর-চিহ্ননির্দ্দিষ্ট দিকে চলিতে থাকিলে পরিধির উপরিস্থিত অক্ষর তিনটিকে abc এই ক্রমে পাওয়া যায়; তদ্রূপ, b ও c হইতে আরম্ভ করিয়া পূর্ব্বোল্লিখিত দিকে চলিতে থাকিলে অক্ষরত্রয়কে যথাক্রমে bca ও cab ক্রমে পাওয়া যায়।

যদি তিনটি অক্ষর a, b, c উপরিউক্তরূপে বিন্যস্ত হয়, তাহা হইলে ঐ বিন্যাসকে **চক্র-ক্রম** (cyclic order) বলে।

নিম্নে a, b, c এর চক্র-ক্রম বিন্যাসযুক্ত কতিপয় রাশি দেওয়া হইল :

(i) $b+c$, $c+a$ এবং $a+b$; (ii) $b-c$, $c-a$ এবং $a-b$;

(iii) $b+c-a$, $c+a-b$ এবং $a+b-c$; (iv) bc, ca এবং ab ;

(v) $a^2(b-c)$, $b^2(c-a)$ এবং $c^2(a-b)$; ইত্যাদি।

127. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ এর গুণনীয়কে বিশ্লেষণ :

এক্ষেত্রেও, অক্ষরগুলি চক্র-ক্রম অনুসারে বিন্যস্ত হওয়ায়, পূর্ব্ব উদাহরণের প্রণালী অনুযায়ী প্রক্রিয়া আরম্ভ করিতে হইবে।

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$
$$=a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)+b^2c^2(b-c)$$
[a এর শক্তির ক্রমানুসারে বিন্যস্ত]
$$=(b-c)\{a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\}$$
$$=(b-c)\{-b^2(a^2-c^2)+ba^2(a-c)+a^2c(a-c)\}$$
[b এর শক্তির ক্রমানুসারে বিন্যস্ত]
$$=(b-c)(a-c)\{-b^2(a+c)+ba^2+a^2c\}$$
$$=(b-c)(a-c)\{c(a^2-b^2)+ab(a-b)\}$$
[c এর শক্তির ক্রমানুসারে বিন্যস্ত]
$$=(b-c)(a-c)(a-b)\{c(a+b)+ab\}$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

128. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ এর গুণনীয়কে বিশ্লেষণ :

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= 4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)\\ &=(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2\\ &=\{2bc+(a^2-b^2-c^2)\}\{2bc-(a^2-b^2-c^2)\}\\ &=\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}\{(b^2+2bc+c^2)-a^2\}\\ &=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}\\ &=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\\ &=(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)\\ &=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 59

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

1. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.
2. $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2)$.
3. $a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$.
4. $bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3)+ab(a^3-b^3)$.
5. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$.
6. $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2+8xyz$.
7. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$.
8. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$.
9. $(x^2+2x+4)(y-z)+(y^2+2y+4)(z-x)+(z^2+2z+4)(x-y)$.
10. $\{x^2-(b+c)x+bc\}(b-c)+\{x^2-(c+a)x+ca\}(c-a)$
$+\{x^2-(a+b)x+ab\}(a-b)$.
11. $(x+b)(x+c)(b-c)+(x+c)(x+a)(c-a)+(x+a)(x+b)(a-b)$.
12. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-3abc$.
13. $8x^3-(y-z)^3-(z+x)^3-(x-y)^3$.
14. $a^6(b^3-c^3)+b^6(c^3-a^3)+c^6(a^3-b^3)$.
15. $x^6(y^4-z^4)+y^6(z^4-x^4)+z^6(x^4-y^4)$.
16. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$.
17. $yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)-x^3-y^3-z^3-2xyz$.
18. $(x+1)^2(y-z)+(y+1)^2(z-x)+(z+1)^2(x-y)$.

19. $(x+1)^3(y-z)+(y+1)^3(z-x)+(z+1)^3(x-y)$.

20. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$.

21. $2b^2c^2y^2z^2+2c^2a^2z^2x^2+2a^2b^2x^2y^2-a^4x^4-b^4y^4-c^4z^4$.

22. $72y^2z^2+18z^2x^2+8x^2y^2-x^4-16y^4-81z^4$.

23. $b+c-a=7$, $c+a-b=10$ এবং $a+b-c=3$ হইলে, $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ এর মান নির্ণয় কর।

24. $a+b+c=20$, $bc+ca+ab=18$ এবং $abc=37$ হইলে, $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ এর মান নির্ণয় কর।

25. $a+b+c=13$ এবং $a^2+b^2+c^2=69$ হইলে, $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3+3abc$ এর মান নির্ণয় কর।

129. অন্যোন্যক রাশিমালার (Reciprocal Expression এর) গুণনীয়ক নির্ণয়:

সংজ্ঞা: যে রাশিমালাতে, প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সহগ দুইটি পরস্পর সমান, তাহাকে **অন্যোন্যক রাশিমালা** (reciprocal expression) বলে। যথা, $x^4+4x^3+5x^2+4x+1$ একটি অন্যোন্যক রাশিমালা।

উদা. 1. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^4+1)+(2x^3+2x)+3x^2$,

[সমান সহগবিশিষ্ট পদদ্বয়কে সংযুক্ত করিয়া]

$=\{(x^2+1)^2-2x^2\}+2x(x^2+1)+3x^2$

$=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)+3x^2-2x^2$

$=(x^2+1)^2+2(x^2+1).x+x^2$

$=\{(x^2+1)+x\}^2=(x^2+x+1)^2$.

উদা. 2. $a^4-5a^3-12a^2-5a+1$ কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(a^4+1)-(5a^3+5a)-12a^2$

[সমান সহগবিশিষ্ট পদদ্বয়কে সংযুক্ত করিয়া]

$=\{(a^2+1)^2-2a^2\}-5a(a^2+1)-12a^2$

$=(a^2+1)^2-5(a^2+1).a-2a^2-12a^2$

$=x^2-5xa-14a^2$, [a^2+1 এর পরিবর্তে x লিখিয়া]

$=(x+2a)(x-7a)$

$=(a^2+1+2a)(a^2+1-7a)$ [x এর পরিবর্তে a^2+1 লিখিয়া]

$=(a+1)^2(a^2-7a+1)$.

130. পরীক্ষা দ্বারা গুণনীয়ক নির্ণয়ঃ

উদা. 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ x^3-2x^2-5x+6.

পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, প্রদত্ত রাশিমালার পদসমূহকে এরূপভাবে বিভিন্ন ভাগে বিন্যস্ত করা যায়, যাহাদের প্রত্যেকে $x-1$ দ্বারা বিভাজ্য। যথা,

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= x^3-x^2-x^2+x-6x+6\\ &=(x^3-x^2)-(x^2-x)-(6x-6)\\ &=x^2(x-1)-x(x-1)-6(x-1)\\ &=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3).\end{aligned}$$

টীকা। লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, প্রদত্ত রাশিমালাতে x এর পরিবর্তে 1, -2, অথবা 3 বসাইলে রাশিমালার মান প্রত্যেক ক্ষেত্রেই 0 হয় এবং $x-1$, $x+2$ এবং $x-3$ উহার তিনটি উৎপাদক।

তদ্রূপ, $x^4-5x^3+5x^2+5x-6$ রাশিমালাটিতে $x=1$, বা -1, বা 2, বা 3 এর যে কোনটি বসাইলেই, রাশিমালার মান 0 (শূন্য) হয়। এবং ইহাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে দেখা যায় যে, $x-1$, $x+1$, $x-2$ এবং $x-3$ ইহার চারিটি উৎপাদক। যথা,

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= x^4+5x^2-6-5x(x^2-1)\\ &=x^4-x^2+6x^2-6-5x(x^2-1)\\ &=x^2(x^2-1)+6(x^2-1)-5x(x^2-1)\\ &=(x^2-1)(x^2-5x+6)\\ &=(x^2-1)(x-2)(x-3)\\ &=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3).\end{aligned}$$

এতদনুসারে সাধারণভাবে বলা যায় যে, **x-সমন্বিত কোন রাশিমালাতে x এর পরিবর্তে a বসাইলে যদি রাশিমালার মান 0 (শূন্য) হয়, তবে ঐ রাশিমালার একটি উৎপাদক $x-a$ হইবে।***

উপরিউক্ত সাধারণ নিয়ম হইতে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলিতে উপনীত হওয়া যায় :

x-সমন্বিত কোন রাশিমালায় x এর শক্তির সূচকগুলি পূর্ণ (integral) সংখ্যা হইলে,

---

* ইহা একটি সাধারণ প্রতিজ্ঞা [ভাগশেষসম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা (Remainder Theorem) এর নিয়ম 182 দ্রষ্টব্য]।

(1) যদি উহার বিভিন্ন পদগুলির সহগের বীজগণিতীয় যোগফল 0 হয়, তবে $x-1$ ঐ রাশিমালার একটি উৎপাদক হইবে। যথা,

প্রথম উদাহরণে, বিভিন্ন পদগুলির সহগের যোগফল

$$=1+(-2)+(-5)+6=1-2-5+6=0.$$

অতএব, $x-1$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি উৎপাদক।

(2) যদি অযুগ্ম সূচকবিশিষ্ট পদগুলির সহগের যোগফল, অবশিষ্ট পদসমূহের সহগের যোগফলের সমান হয়, তবে $x+1$ ঐ রাশিমালার একটি উৎপাদক হইবে। যথা,

x^3+3x^2+3x+1 তে, x^3 এবং x ই, x এর অযুগ্ম সূচকবিশিষ্ট পদ। এই পদদ্বয়ের সহগের যোগফল $=1+3=4$; এবং অবশিষ্ট পদগুলির সহগের যোগফল $=3+1=4$. এই উভয় যোগফলই সমান হওয়ায়, বুঝা যাইতেছে যে, x^3+3x^2+3x+1 এর একটি উৎপাদক $x+1$ হইবে।

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^3+6x^2+11x+6$.

x এর অযুগ্ম সূচকবিশিষ্ট পদগুলির সহগের যোগফল $=1+11=12$; এবং অবশিষ্ট পদসমূহের সহগের যোগফল $=6+6=12$. অতএব, $x+1$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি উৎপাদক হইবে। এখন, প্রদত্ত রাশিমালার পদসমূহকে এরূপ কতগুলি ভাগে বিভক্ত কর, যেন প্রত্যেকটি সজ্ঘ $x+1$ দ্বারা বিভাজ্য হয়। এইরূপ করিলে,

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6\\ &=(x^3+x^2)+(5x^2+5x)+(6x+6)\\ &=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)\\ &=(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+2)(x+3).\end{aligned}$$

উদা. 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $8x^3+16x-9$.

$2x$ এর পরিবর্তে y লিখিলে, প্রদত্ত রাশিমালা $=(2x)^3+8.(2x)-9$
$$=y^3+8y-9.$$

এখন, y^3+8y-9 এর সহগগুলির যোগফল $=1+8-9=0$.

অতএব, এই রাশিমালার একটি উৎপাদক $y-1$ হইবে। এখন, ইহার পদগুলিকে এরূপভাবে সজ্ঘবদ্ধ কর, যেন প্রত্যেকটি সজ্ঘ $y-1$ দ্বারা বিভাজ্য হয়। এইরূপ করিলে,

$$\begin{aligned}y^3+8y-9 &= y^3-y+9y-9=y(y^2-1)+9(y-1)\\ &=(y-1)\{y(y+1)+9\}=(y-1)(y^2+y+9)\\ &=(2x-1)(4x^2+2x+9).\end{aligned}$$
[y এর পরিবর্তে $2x$ বসাইয়া]

উদা. 4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^5+4x^4-13x^3-13x^2+4x+1.$

এক্ষেত্রে দেখা যায় যে,

অযুগ্ম সূচকবিশিষ্ট পদগুলির সহগের যোগফল $=1+(-13)+4=-8$;

এবং অবশিষ্ট সহগগুলির যোগফল $=4+(-13)+1=-8$. এই উভয় যোগফল সমান হওয়ায়, প্রদত্ত রাশিমালার একটি উৎপাদক $x+1$ হইবে।

এখন, রাশিমালার পদসমূহকে এরূপভাবে সঙ্ঘবদ্ধ কর, যেন প্রত্যেকটি সঙ্ঘ $x+1$ দ্বারা বিভাজ্য হয়। এইরূপ করিলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^5+x^4)+(3x^4+3x^3)-(16x^3+16x^2)+(3x^2+3x)+(x+1)$

$=x^4(x+1)+3x^3(x+1)-16x^2(x+1)+3x(x+1)+(x+1)$

$=(x+1)(x^4+3x^3-16x^2+3x+1).$

আবার, $x^4+3x^3-16x^2+3x+1$ উৎপাদকটি একটি অন্যোন্যক রাশিমালা (reciprocal expression) হওয়ায়, 129 নিয়মে বর্ণিত প্রণালী অনুসারে,

$x^4+3x^3-16x^2+3x+1=(x^4+1)+(3x^3+3x)-16x^2$

[সমান সহগবিশিষ্ট পদগুলিকে সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া]

$=\{(x^2+1)^2-2x^2\}+3x(x^2+1)-16x^2$

$=(x^2+1)^2+3(x^2+1).x-2x^2-16x^2$

$=y^2+3yx-18x^2$, [x^2+1 এর পরিবর্তে y বসাইয়া]

$=(y-3x)(y+6x)$

$=(x^2+1-3x)(x^2+1+6x)$,

[y এর পরিবর্তে উহার মান x^2+1 লিখিয়া]

$=(x^2-3x+1)(x^2+6x+1).$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা $=(x+1)(x^2-3x+1)(x^2+6x+1).$

উদা. 5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^3+x^2-21x-38.$

পরীক্ষা করিয়া দেখা গেল যে, x এর পরিবর্তে -2 বসাইলে রাশিমালার মান 0 হয়। কাজেই, $x-(-2)$ অর্থাৎ $x+2$ উহার একটি উৎপাদক হইবে। অতএব,

$x^3+x^2-21x-38=(x^3+2x^2)-(x^2+2x)-(19x+38)$,

[$x+2$ এর দ্বারা বিভাজ্য হয়, এরূপ সঙ্ঘে সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া]

$$= x^2(x+2) - x(x+2) - 19(x+2)$$
$$= (x+2)(x^2 - x - 19).$$

131. দুই মাত্রা (dimension)-বিশিষ্ট সমমাত্র রাশিমালার (homogeneous expression এর) গুণনীয়ক নির্ণয় :

পরবর্ত্তী উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী বুঝান যাইতেছে :

উদা. 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $6a^2 + 7ab + 2b^2 + 11ac + 7bc + 3c^2$.

প্রদত্ত রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত যে কোন অক্ষরের, ধর a এর, শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $= 6a^2 + (7b + 11c)a + (2b^2 + 7bc + 3c^2)$
$$= 6a^2 + (7b + 11c)a + (2b + c)(b + 3c).$$

এখন, $(2b + c)(b + 3c)$ এবং (a^2 এর সহগ) 6 এর গুণফলকে এরূপ দুই উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি a এর সহগ (অর্থাৎ, $7b + 11c$) এর সমান হয়। পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, $2(2b + c)$ এবং $3(b + 3c)$ এই দুইটিই নির্ণেয় উৎপাদক।

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা $= 6a^2 + 2(2b + c)a + 3(b + 3c)a + (2b + c)(b + 3c)$
$$= 2a\{3a + (2b + c)\} + (b + 3c)\{3a + (2b + c)\}$$
$$= (3a + 2b + c)(2a + b + 3c).$$

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^2 - 3xy + 2y^2 - 2yz - 4z^2$.

প্রদত্ত রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত যে কোন একটি অক্ষরের (ধর, x এর), শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $= x^2 - 3yx + (2y^2 - 2yz - 4z^2)$
$$= x^2 - 3yx + 2(y + z)(y - 2z).$$

এখন, x^2 এর সহগ (অর্থাৎ, 1) এবং x-বর্জ্জিত পদ (term independent of x) [অর্থাৎ, $2(y + z)(y - 2z)$] এর গুণফলকে এরূপ দুই উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি x এর সহগ (অর্থাৎ, $-3y$) এর সমান হয়। পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, $-2(y + z)$ এবং $-(y - 2z)$ ই নির্ণেয় উৎপাদকদ্বয়।

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা $= x^2 - 2(y + z)x - (y - 2z)x + 2(y + z)(y - 2z)$
$$= x\{x - 2(y + z)\} - (y - 2z)\{x - 2(y + z)\}$$
$$= (x - 2y - 2z)(x - y + 2z).$$

132. দুই বা ততোধিক অক্ষরবিশিষ্ট দ্বি-মাত্র (of the second degree) রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয়:

উদা. । উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $6a^2+7ab+2b^2+11a+7b+3$.

প্রদত্ত রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত যে কোন অক্ষরের, ধর, a এর, শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে,

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = 6a^2+(7b+11)a+(2b^2+7b+3)$$
$$= 6a^2+(7b+11)a+(2b+1)(b+3).$$

এখন, a^2 এর সহগ (অর্থাৎ, 6) এবং a-বর্জ্জিত অংশ [অর্থাৎ, $(2b+1)(b+3)$] এর গুণফলকে এরূপ দুই উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি a এর সহগ [অর্থাৎ, $7b+11$] এর সমান হয়। এই উৎপাদকদ্বয় স্পষ্টতঃই $2(2b+1)$ এবং $3(b+3)$.

$$\text{অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা} = 6a^2+2(2b+1)a+3(b+3)a+(2b+1)(b+3)$$
$$= 2a\{3a+(2b+1)\}+(b+3)\{3a+(2b+1)\}$$
$$= (3a+2b+1)(2a+b+3).$$

133. যথোচিত পদ-বিন্যাস (arrangements of terms) ও সঙ্ঘবদ্ধ-করণ (grouping) দ্বারা গুণনীয়ক নির্ণয়: কোন কোন স্থলে, রাশিমালার পদগুলিকে কোন এক নির্দ্দিষ্টরূপে সাজাইলেই উহার গুণনীয়কগুলি সুস্পষ্ট হইয়া পড়ে; কিন্তু অনেক স্থলে আবার এরূপ হয় না। কাজেই, বর্ত্তমান নিয়মের অন্তর্ভুক্ত বিশ্লেষণ-প্রক্রিয়ার জন্য কোন নির্দ্দিষ্ট প্রণালী দেওয়া যায় না। সুতরাং, নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা কতকগুলি পরস্পর-বিচ্ছিন্ন বিশ্লেষণ-প্রণালীর প্রতি ছাত্রদিগের দৃষ্টি আকৃষ্ট করা যাইতেছে; ইহা দ্বারা তাহাদের আলোচ্য বিষয়ের সম্যক্ ধারণা হইবে।

উদা. 1. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $(3x^2-4b^2)a+(3a^2-4x^2)b$.

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = 3x^2a-4b^2a+3a^2b-4x^2b$$
$$= (3x^2a+3a^2b)-(4b^2b+4x^2b)$$

[প্রথম ও তৃতীয় পদদ্বয়, এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থ পদদ্বয়, সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া]

$$= 3a(x^2+ab)-4b(ab+x^2)$$
$$= (x^2+ab)(3a-4b).$$

উদা. 2. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $x^4+x^2y^2-y^2z^2-z^4$.

প্রথম ও চতুর্থ পদদ্বয়, এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদদ্বয়, সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া,

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = (x^4-z^4)+(x^2y^2-y^2z^2)$$
$$= (x^2+z^2)(x^2-z^2)+y^2(x^2-z^2)$$
$$= (x^2-z^2)\{(x^2+z^2)+y^2\}$$
$$= (x+z)(x-z)(x^2+y^2+z^2).$$

উদা. 3. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^3+7x^2-21x-27$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^3-27)+(7x^2-21x)$
$=(x-3)(x^2+3x+9)+7x(x-3)$
$=(x-3)\{(x^2+3x+9)+7x\}$
$=(x-3)(x^2+10x+9)$
$=(x-3)(x+9)(x+1)$.

উদা. 4. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $4a^2+12ab+9b^2-8a-12b$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=(4a^2+12ab+9b^2)-(8a+12b)$
$=(2a+3b)^2-4(2a+3b)=(2a+3b)\{(2a+3b)-4\}$
$=(2a+3b)(2a+3b-4)$.

উদা. 5. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $2a^2-2bc+6b^2+ac-7ab$.

এস্থলে দেখা যাইতেছে যে, প্রথম, তৃতীয় এবং পঞ্চম, এই পদ তিনটি a ও b অক্ষরদ্বয়ে দুই-মাত্রাবিশিষ্ট, এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থ পদ দুইটি ঐ অক্ষরদ্বয়ে এক-মাত্রাবিশিষ্ট। কাজেই, প্রথমোক্ত পদ তিনটিকে একত্র, এবং শেষোক্ত পদ দুইটিকে একত্র, সজ্জবদ্ধ করিয়া, প্রদত্ত রাশিমালা $=(2a^2-7ab+6b^2)+c(a-2b)$
$=(a-2b)(2a-3b)+c(a-2b)$
$=(a-2b)\{(2a-3b)+c\}$
$=(a-2b)(2a-3b+c)$.

উদা. 6. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^2-y^2-z^2+2yz+x+y-z$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^2-y^2-z^2+2yz)+(x+y-z)$
$=\{x^2-(y-z)^2\}+(x+y-z)$
$=(x+y-z)(x-y+z)+(x+y-z)$
$=(x+y-z)\{(x-y+z)+1\}$
$=(x+y-z)(x-y+z+1)$.

উদা. 7. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :

$$a^2x^3+a^5-2abx^3+b^2x^3+a^3b^2-2a^4b.$$

এক্ষেত্রে দেখা যায় যে, প্রথম, তৃতীয় ও চতুর্থ পদ তিনটিতে x^3 উৎপাদকটি সাধারণ (common) এবং অবশিষ্ট পদগুলিতে a^3 উৎপাদকটি সাধারণ।

কাজেই প্রথমোক্ত পদ তিনটিকে একত্র, এবং অবশিষ্ট পদগুলিকে একত্র, সজ্জবদ্ধ করিয়া, প্রদত্ত রাশিমালা $=(a^2x^3-2abx^3+b^2x^3)+(a^5+a^3b^2-2a^4b)$
$=x^3(a^2-2ab+b^2)+a^3(a^2+b^2-2ab)$
$=(a^2-2ab+b^2)(x^3+a^3)$
$=(a-b)^2(x+a)(x^2-xa+a^2)$.

প্রশ্নমালা 60

গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

1. x^3+x^2+x+1.
2. x^3+x^2-x-1.
3. x^3-x^2-x+1.
4. $bc(a^2+1)+a(b^2+c^2)$.
5. $x^4-ab^3+xb^3-x^3a$.
6. $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$.
7. $x^2+xy-yz-z^2$.
8. $xb-ac-xc+ab$.
9. $(2x^2+3b^2)a-(2a^2+3x^2)b$.
10. $a(a+c)-b(b+c)$.
11. $4a^2+8ac-12bc-9b^2$.
12. $a^2x^2+acxz-b^2y^2-bcyz$.
13. $x^4-y^3z+y^2x^2-y^2z^2$.
14. $16x^2-15ab+12bx-25a^2$.
15. $a^2(a+2b)+b^2(2a+b)$.
16. $m^3-2m^2n+2mn^2-n^3$.
17. $a^4+2a^3b-2ab^3-b^4$.
18. $x^3(x-2y)+y^3(2x-y)$.
19. $a^3+5a^2+10a+8$.
20. $x^3-17x^2+85x-125$.
21. $8a^3+18a^2b-27ab^2-27b^3$.
22. $x^2-2xy+y^2-x+y$.
23. $4a^2-4ab+b^2-6a+3b$.
24. $x^4-2ax^3+2a^2x^2-2a^3x+a^4$.
25. $a^4-3a^3b+4a^2b^2-6ab^3+4b^4$.
26. $a^2+3ab+2b^2+ac+2bc$.
27. $x^2-4xy+3y^2+xz-3yz$.
28. $m^2+2pm-5mn-4pn+6n^2$.
29. $a^2-10ab-15bc+21b^2+5ac$.
30. $2x^2+4a(4b-3a)+x(4b+5a)$.
31. $a^2-3a(2b-1)+4b(2b-3)$.
32. $3x(x+2)-2y(4x-1)-3y^2$.
33. $a^2-b^2-c^2-2bc+a-b-c$.
34. $x^2-4y^2-9z^2+12yz+4x-8y+12z$.
35. $9x^2-4z^2-24xy+16y^2+20y-15x+10z$.
36. $2a^2x^4-5a^4x^2+3a^6-2b^2x^4+5a^2b^2x^2-3a^4b^2$.
37. $2x^3+(2a-3b)x^2-(2b+3ab)x+3b^2$.
38. $(a^2+b^2)x^2-a^2b(2a+b)+a(2bx^2-a^3)$.
39. $2a^4-5a^3+6a^2-5a+2$.
40. $a^5-4a^4-13a^3+13a^2+4a-1$.
41. $2x^2+6xy+4y^2+5xz+6yz+2z^2$.
42. $2x^2+xy-3y^2-xz-4yz-z^2$.
43. $a^8-5a^6-12a^4-5a^2+1$.
44. $4x^2-4xy-3y^2+12yz-9z^2$.
45. $x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5$.
46. $x^3+7x^2+14x+8$.

134. বিবিধ উদাহরণমালা :

উদা. 1. $a^3+7ab^2-22b^3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালার পদসমূহকে নিম্নলিখিত দুই প্রকারের যে কোন এক প্রকারে, দুই ভাগে ভাগ করিলে দেখা যায় যে, প্রত্যেকটি ভাগই $a+2b$ দ্বারা বিভাজ্য।

(i) $(a^3-8b^3)+7b^2(a-2b)$; (ii) $a(a^2-4b^2)+11b^2(a-2b)$.

প্রথমোক্তরূপে বিভাগ করিয়া,

$$a^3+7ab^2-22b^3=(a^3-8b^3)+7b^2(a-2b)$$
$$=(a-2b)\{(a^2+2ab+4b^2)+7b^2\}$$
$$=(a-2b)(a^2+2ab+11b^2).$$

উদা. 2. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^2+2(a^2+b^2)+3ax-b(3x+5a)$.

x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^2+3(a-b)x+(2a^2-5ab+2b^2)$

$$=x^2+3(a-b)x+(2a-b)(a-2b)$$
$$=x^2+\{(2a-b)+(a-2b)\}x+(2a-b)(a-2b)$$
$$=x\{x+(2a-b)\}+(a-2b)\{x+(2a-b)\}$$
$$=\{x+(2a-b)\}\{x+(a-2b)\}$$
$$=(x+2a-b)(x+a-2b).$$

উদা. 3. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^2-6xy+8y^2-z^2+2yz$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^2-6xy+9y^2)-(y^2+z^2-2yz)$

$$=(x-3y)^2-(y-z)^2$$
$$=\{(x-3y)+(y-z)\}\{(x-3y)-(y-z)\}$$
$$=(x-2y-z)(x-4y+z).$$

উদা. 4. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2+4abxy$

$$=(a^2x^2+b^2y^2+2abxy)-(a^2y^2+b^2x^2-2abxy)$$
$$=(ax+by)^2-(ay-bx)^2$$
$$=\{(ax+by)+(ay-bx)\}\{(ax+by)-(ay-bx)\}$$
$$=\{(a-b)x+(a+b)y\}\{(a+b)x-(a-b)y\}.$$

উদা. 5. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^4+6x^3+4x^2-15x+6$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^4+6x^3+9x^2)-(5x^2+15x)+6$

$=(x^2+3x)^2-5(x^2+3x)+6$

$=\{(x^2+3x)-2\}\{(x^2+3x)-3\}$

$=(x^2+3x-2)(x^2+3x-3)$.

উদা. 6. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^4+2x^2y^2+y^4)+x^2y^2+(2x^3y+2xy^3)$

$=(x^2+y^2)^2+(xy)^2+2(xy)(x^2+y^2)$

$=\{(x^2+y^2)+xy\}^2=(x^2+xy+y^2)^2$.

উদা. 7. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+4$.

এখন, $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)$.

কাজেই, x^2+2x এর পরিবর্তে z বসাইলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $=(z-3)(z-8)+4$

$=z^2-11z+28=(z-4)(z-7)$

$=(x^2+2x-4)(x^2+2x-7)$.

টীকা। বিশেষরূপে লক্ষ্য করিবে যে, উপরিপ্রদর্শিত দ্বিপদ রাশি (binomial)-গুলির গুণনকালে, $x+3$ কে $x-1$ এর সহিত এবং $x+4$ কে $x-2$ এর সহিত গুণ করা হইয়াছে।

উদা. 8. $x+y=a$ এবং $xy=b^2$ হইলে,

(i) x^4+y^4 এবং (ii) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$ এর মান a ও b দ্বারা প্রকাশ কর।

(i) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2x^2y^2$,

কাজেই, নির্ণেয় মান $=(a^2-2b^2)^2-2b^4=a^4-4a^2b^2+2b^4$.

(ii) $x^3-x^2y-xy^2+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)$

$=(x-y)(x^2-y^2)$

$=(x-y)^2(x+y)$

$=\{(x+y)^2-4xy\}(x+y)$

$=(a^2-4b^2)a$.

উদা. 9. $x^2+2=2x$ হইলে, $x^4-x^3+x^2+2$ এর মান নির্ণয় কর।

$$x^4-x^3+x^2+2=(x^4+x^3+x^2)-2(x^3-1)$$
$$=x^2(x^2+x+1)-2(x-1)(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)\{x^2-2(x-1)\}$$
$$=(x^2+x+1)(x^2-2x+2).$$

অতএব, নির্ণেয় মান $=(x^2+x+1)\times 0=0.$

উদা. 10. $a+b=c$ হইলে,

$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=-(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)$

$=-(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(b+c-a)$ [নিয়ম 129]

এবং $\therefore$ $=0$, কারণ, $a+b=c.$

প্রশ্নমালা 61

গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

1. $x^3+8x^2+19x+12.$
2. $x^3+9x^2+26x+24.$
3. $x^3-6x^2+11x-6.$
4. $x^3+5x^2-2x-24.$
5. $x^3-4x^2+x+2.$
6. $x^3+5x^2-2x-6.$
7. $x^3-6x^2+13x-10.$
8. $x^4-3x^3-9x^2+12x+20.$
9. $x^4-3x^3-x^2+13x-10.$
10. $x^4-5x^3+x^2+13x+6.$
11. $x^4+5x^3-8x^2-30x+36.$
12. $x^4-7x^3+9x^2+26x-56.$
13. $x^3-7x^2+13x-15.$
14. $x^3-5x+12.$
15. $x^3-6x^2+32.$
16. $2x^3-3x^2-4.$
17. $x^3-9xy^2-10y^3.$
18. $a^3+4a^2b-9b^3.$
19. $5a^3-3a^2b-28b^3.$
20. $8x^3+4x-3.$
21. $2x^3+5x^2-4x-3.$
22. $x^3-3x-2.$
23. $2a^3-a^2b-b^3.$
24. $3x^3+8x^2-8x-3.$
25. $x^3-6xy^2+9y^3.$
26. $x^2+bx-(a^2-3ab+2b^2).$
27. $x^4+4abx^2y^2-(a^2-b^2)^2y^4.$
28. $a^4+2(x^2+y^2)a^2b^2+(x^2-y^2)^2b^4.$
29. $a^2+(x+y)a-2x^2+5xy-2y^2.$
30. $x(x+a)-2a^2+3b(a+x)+2b^2.$

31. $x^2+4xy+3y^2+2yz-z^2$. 32. $4a^2-4ab-3b^2+12bc-9c^2$.

33. $x^4+6x^3+8x^2+6x-9$. 34. $a^4-4a^3b-5a^2b^2+6ab^3-b^4$.

35. $4x^4-20x^3+24x^2+6x-9$. 36. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$.

37. $a^4-9a^2+30a-25$. 38. $a^2-2abx-(ac-b^2)x^2+bcx^3$.

39. $x^4y^4+x^2y^2-z^2+2xyz+1$. 40. $x^2(y^2-z^2)+4xyz-y^2+z^2$.

41. $(a^2-b^2)(x^2+y^2)+2(a^2+b^2)xy$.

42. $x^4-4x^3-x^2+10x+4$. 43. $a^4-6a^3+15a^2-18a+5$.

44. $4x^4+12x^3-5x^2-21x+12$.

45. $x^4-5x^3y+6x^2y^2-5xy^3+y^4$.

46. $x^4-5x^3+14x^2-20x+16$.

47. $a^4-7a^3b+14a^2b^2-14ab^3+4b^4$.

48. $x^4+4x^3-11x^2+20x+25$.

49. $a^4+4a^3b-10a^2b^2+4ab^3+b^4$.

50. $x^4+8x^3+24x^2+32x-20$.

51. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+13$.

52. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-360$.

53. $x(2x+1)(x-2)(2x-3)-63$.

54. $x=a(b-c)$, $y=b(c-a)$, $z=c(a-b)$ হইলে,
$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+3xyz$ এর মান নির্ণয় কর।

55. $x=a^2-b^2$, $y=b^2-c^2$, $z=a^2-c^2$ হইলে,
$(y-z)(y^2-z^2)-x\{(y-z)^2+x(y+z)\}+x^3$ এর মান নির্ণয় কর।

56. $x+y=4$ হইলে, $x^2-2(y-2)x-3y^2+20y-32$ এর মান নির্ণয় কর।

57. $x+y=25$ এবং $x-y=6$ হইলে, $x^2-y^2+4x+14y-45$ এর মান নির্ণয় কর।

58. $x+y=\sqrt{3}$ এবং $x-y=\sqrt{2}$ হইলে, $8xy(x^2+y^2)$ এর মান নির্ণয় কর।

বিংশ অধ্যায়

জটিলতর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.

(Harder H. C. F. and L. C. M.)

135. সহজে গুণনীয়ক নিরূপণ করা যায়, এরূপ রাশিমালাসমূহের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় করিবার প্রণালী ত্রয়োদশ অধ্যায়ে বিবৃত করা হইয়াছে। এক্ষণে, উহা হইতে জটিলতর ক্ষেত্রসম্পর্কে আলোচনা করা হইবে।

I. জটিলতর গ. সা. গু. (Harder H. C. F.)

136. দুই বা ততোধিক রাশিমালার গ. সা. গু., এক মিশ্র রাশিমালা (compound expression) হইলে, এই গ. সা. গু. সাধারণতঃ পর্য্যবেক্ষণ দ্বারা নির্ণয় করা যায় না। এরূপ ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত পদ্ধতি অবলম্বন করিতে হয়।

137. যে রাশিমালাতে একপদ গুণনীয়ক (monomial factor) নাই, সেইরূপ রাশিমালাসমূহের গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার সাধারণ নিয়ম :

নিয়ম : দুইটি রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, উভয়কেই উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষর (common letter)-এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া উহাদের মধ্যে উচ্চতর মানের রাশিমালা (expression of higher degree)-কে অপরটি দ্বারা [উভয়ের মান (degree) সমান হইলে, যে কোনটিকে অপরটি দ্বারা] ভাগ কর; যদি কোন ভাগশেষ থাকে, তবে সেই ভাগশেষকে নূতন ভাজক এবং পূর্ব্ব ভাজককে নূতন ভাজ্যরূপে গণ্য করিয়া পুনরায় ভাগ কর; এবং যে পর্য্যন্ত ভাগ সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া না যায়, সেই পর্য্যন্ত অনুরূপ প্রণালীতে ভাগ করিয়া যাও। শেষ ভাজকটিই প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে। এই প্রক্রিয়ার যে কোন অবস্থাতেই, ভাজ্য এবং তৎসংশ্লিষ্ট ভাজকের যে কোনটিকে, অপরটির গুণনীয়ক নহে, এরূপ যে কোন রাশিদ্বারা আবশ্যকমত গুণ বা ভাগ করিয়া লওয়া যাইতে পারে।

পূর্ব্বোক্ত নিয়মের যৌক্তিকতা নিম্নলিখিতরূপে প্রতিপন্ন করা যায় :

ধর, A ও B উপরিউক্তরূপ দুই রাশিমালা সূচিত করিতেছে, এবং A উহাদের মধ্যে উচ্চতর মানের রাশিমালা।

A কে নিয়মোল্লিখিত প্রণালীতে B দ্বারা ভাগ কর; মনে কর, Q ভাগফল এবং C ভাগশেষ হইল। তাহা হইলে অবশ্যই,

$$C = A - BQ \quad \cdots \quad (1)$$

অথবা, $$A = BQ + C. \quad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে দেখা যায় যে, A ও B এর প্রত্যেকটি সাধারণ গুণনীয়কই C এরও গুণনীয়ক হইবে [কারণ, $A = pa$ এবং $B = pb$ হইলে, $C = p(a - bQ)$ হইবে]। সুতরাং, A ও B এর গ. সা. গু. যদি H দ্বারা সূচিত হয়, তবে H, C এরও গুণনীয়ক, এবং কাজেই, B ও C এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

তাহা হইলে, স্পষ্টই বুঝা যায় যে, B ও C এর গ. সা. গু., হয় H, নতুবা H অপেক্ষা উচ্চতর মানের, কোন রাশিমালা হইবে। ··· (ক)

এখন, (2) হইতে দেখা যায় যে, B ও C এর প্রত্যেকটি সাধারণ গুণনীয়কই A এরও গুণনীয়ক, এবং কাজেই, উহা A ও B এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে। সুতরাং, B এবং C এর গ. সা. গু.ও A এবং B এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে; অতএব, উহা (অর্থাৎ ঐ গ. সা. গু.) H অপেক্ষা উচ্চতর মানের রাশিমালা হইতে পারে না।

সুতরাং, (ক) হইতে দেখা যায় যে, B ও C এর গ. সা. গু.ও H হইবে।

অতএব, B ও C এর গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু.।

এইরূপে, B কে C দ্বারা ভাগ করিলে, D যদি ভাগশেষ হয়, তবে দেখান যাইতে পারে যে, C ও D এর গ. সা. গু.ই B ও C এর গ. সা. গু. এর সমান, এবং কাজেই, নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

এখন, C কে D দ্বারা ভাগ কর, এবং মনে কর, কিছুই ভাগশেষ থাকিল না (অর্থাৎ ভাগ সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া গেল); তাহা হইলে, D ই, C ও D এর গ. সা. গু. এবং কাজেই, নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

অনুসি. 1. যেহেতু যে কোন ভাজ্য ও তৎসংশ্লিষ্ট ভাজকের গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু., অতএব সুবিধার জন্য উহাদের যে কোনটিকে, অপরটির গুণনীয়ক নহে, এরূপ যে কোন সরল রাশি (monomial expression) দ্বারা আবশ্যকমত গুণ বা ভাগ করিয়া লওয়া যাইতে পারে।

অনুসি. 2. A কে B দ্বারা ভাগ করিবার কালে, যদি সম্পূর্ণ ভাগের পূর্ব্বেই ভাগ-প্রক্রিয়া বন্ধ করা হয় এবং Q' যদি আংশিক ভাগফল (partial quotient) এবং C' যদি তৎসংশ্লিষ্ট ভাগশেষ বুঝায়, তবে B ও C' এর গ. সা. গু.ও, B ও C এর

গ. সা. গু. এর ন্যায়, নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে। কাজেই, অনুসি. 1 হইতে বুঝা যায় যে, C' কে B দ্বারা (অথবা, C', B অপেক্ষা নিম্নতর মানের হইলে, B কে C' দ্বারা) ভাগ করার সময় উহাদের যে কোনটিকে অপরটির গুণনীয়ক নহে, এরূপ যে কোন সরল রাশি দ্বারা আবশ্যকমত গুণ বা ভাগ করিয়া লওয়া যাইতে পারে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী স্পষ্টরূপে বুঝান যাইতেছে :

উদা. 1. $3x^3-7x^2-18x-8$ এবং $2x^3-3x^2-17x-12$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

নির্ণেয় গ. সা. গু. অবশ্যই $3x^3-7x^2-18x-8$ এবং $3(2x^3-3x^2-17x-12)$ এর গ. সা. গু. এর সমান [অনুসি. 1]। অতএব, দ্বিতীয় রাশিমালাকে 3 দ্বারা গুণ করিয়া ঐ গুণফলকে প্রথম রাশিদ্বারা ভাগ করা যাউক।

$$\begin{array}{r|l|l}
 & 2x^3-\ \ 3x^2-17x-12 & \\
 & \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad 3} & \\
3x^3-7x^2-18x-8 & 6x^3-\ \ 9x^2-51x-36 & 2 \\
 & \underline{6x^3-14x^2-36x-16} & \\
 & \qquad 5x^2-15x-20 &
\end{array}$$

কাজেই, নির্ণেয় গ. সা. গু., $3x^3-7x^2-18x-8$ এবং $5x^2-15x-20$ অর্থাৎ $5(x^2-3x-4)$ এর গ. সা. গু. এর সমান ; সুতরাং, উহা $3x^3-7x^2-18x-8$ এবং x^2-3x-4 এর গ. সা. গু. এরও সমান [অনুসি. 1]।

অতএব, নিম্নলিখিত প্রণালী অনুসারে কার্য্য করিতে হইবে :

$$\begin{array}{r|l|l}
5 & \underline{5x^2-15x-20} & \\
x^2-3x-4 & 3x^3-7x^2-18x-8 & 3x+2 \\
 & \underline{3x^3-9x^2-12x} & \\
 & \qquad 2x^2-\ \ 6x-8 & \\
 & \qquad \underline{2x^2-\ \ 6x-8} &
\end{array}$$

সুতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^2-3x-4.$

উদা. 2. $22x^6-78x^5-16x^2$ এবং $2x^5-78x^2-44x$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশিমালা $=2x^2(11x^4-39x^3-8)$;

দ্বিতীয় রাশিমালা $=2x(x^4-39x-22).$

সুতরাং, 99 নিয়মের টীকা 7 অনুসারে,

নির্ণেয় গ. সা. গু. $= (2x^2$ এবং $2x$ এর গ. সা. গু.$) \times (11x^4 - 39x^3 - 8$
এবং $x^4 - 39x - 22$ এর গ. সা. গু.$)$
$= 2x \times X$, [এস্থলে, X শেষোক্ত রাশিমালাদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্দ্দেশ করিতেছে।]

এখন, X কে পূর্ব্ব নিয়ম অনুসারে নির্ণয় করা যাউক :

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 39x - 22 & 11x^4 - 39x^3 - 8 \;(11 \\
 & \underline{11x^4 - 429x - 242} \\
 & -3)\; -39x^3 + 429x + 234 \\
 & 13)\; \underline{13x^3 - 143x - 78} \\
 & x^3 - 11x - 6
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 11x - 6 & x^4 - 39x - 22 \;(x \\
 & \underline{x^4 - 11x^2 - 6x} \\
 & 11)\; \underline{11x^2 - 33x - 22} \\
 & x^2 - 3x - 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
x^2 - 3x - 2 & x^3 - 11x - 6 \;(x + 3 \\
 & \underline{x^3 - 3x^2 - 2x} \\
 & 3x^2 - 9x - 6 \\
 & \underline{3x^2 - 9x - 6}
\end{array}$$

সুতরাং, $X = x^2 - 3x - 2$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 2x(x^2 - 3x - 2)$.

উদা. 3. $12x^4a^2 + 54x^3a^3 + 6x^2a^4 - 72xa^5$ এবং $8x^6a + 60x^5a^2 + 160x^4a^3 + 180x^3a^4 + 72x^2a^5$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $= 6xa^2(2x^3 + 9x^2a + xa^2 - 12a^3)$;

দ্বিতীয় রাশি $= 4x^2a(2x^4 + 15x^3a + 40x^2a^2 + 45xa^3 + 18a^4)$.

অতএব, উপরিউক্ত বহুপদ গুণনীয়ক (multinomial factor)-দ্বয়ের গ. সা. গু. X দ্বারা সূচিত করিলে, অবশ্যই প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $= (6xa^2$ এবং $4x^2a$ এর গ. সা. গু.$) \times X = 2xa \times X$ হইবে।

এখন, X নির্ণয় করা যাউক :

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 + 9x^2a + xa^2 - 12a^3 & 2x^4 + 15x^3a + 40x^2a^2 + 45xa^3 + 18a^4 \;(x \\
 & \underline{2x^4 + 9x^3a + x^2a^2 - 12xa^3} \\
 & 3a)\; \underline{6x^3a + 39x^2a^2 + 57xa^3 + 18a^4} \\
 & 2x^3 + 13x^2a + 19xa^2 + 6a^3
\end{array}$$

কাজেই, X, $2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3$ এবং $2x^3+13x^2a+19xa^2+6a^3$ এর গ. সা. গু. হইবে: যেহেতু এতদুভয়ই সমান মানের (of the same degree) রাশিমালা, অতএব, উহাদের যে কোনটিকে অপরটি দ্বারা ভাগ করা যাইতে পারে।

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3 & 2x^3+13x^2a+19xa^2+6a^3 \;(1 \\
 & 2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3 \\ \hline
 & 2a)\,4x^2a+18xa^2+18a^3 \\ \hline
 & 2x^2+9xa+9a^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2+9xa+9a^2 & 2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3 \;(x \\
 & 2x^3+9x^2a+9xa^2 \\ \hline
 & -4a^2)\,-8xa^2-12a^3 \\ \hline
 & 2x+3a
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
2x+3a & 2x^2+9xa+9a^2 \;(x+3a \\
 & 2x^2+3xa \\ \hline
 & 6xa+9a^2 \\
 & 6xa+9a^2 \\ \hline
\end{array}
$$

সুতরাং, $X=2x+3a$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=2xa(2x+3a)$.

উদা. 4. $4x^4+11x^3+27x^2+17x+5$ এবং $6x^4+14x^3+36x^2+14x+10$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় রাশি $=2(3x^4+7x^3+18x^2+7x+5)$; কিন্তু যেহেতু 2 প্রথম রাশির গুণনীয়ক নহে, অতএব, প্রথম রাশি এবং $3x^4+7x^3+18x^2+7x+5$ এর গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^4+11x^3+27x^2+17x+5 \\
 & 3 \\ \hline
3x^4+7x^3+18x^2+7x+5 & 12x^4+33x^3+81x^2+51x+15 \;(4 \\
 & 12x^4+28x^3+72x^2+28x+20 \\ \hline
 & 5x^3+9x^2+23x-5
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r|l|l}
 & 3x^4+7x^3+18x^2+7x+5 & \\
 & 5 & \\
\hline
5x^3+9x^2+23x-5 & 15x^4+35x^3+90x^2+35x+25 & 3x \\
 & 15x^4+27x^3+69x^2-15x & \\
\hline
 & 8x^3+21x^2+50x+25 & \\
 & 5 & \\
\hline
 & 40x^3+105x^2+250x+125 & 8 \\
 & 40x^3+72x^2+184x-40 & \\
\hline
33) & 33x^2+66x+165 & \\
\hline
 & x^2+2x+5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
x^2+2x+5 & 5x^3+9x^2+23x-5 & 5x-1 \\
 & 5x^3+10x^2+25x & \\
\hline
 & -x^2-2x-5 & \\
 & -x^2-2x-5 & \\
\hline
\end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x^2+2x+5$.

উদা. 5. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$$4x^4-16x^3+108 \text{ এবং } 6x^5-14x^3-40x^2+36.$$

প্রথম রাশি $= 4(x^4-4x^3+27)$.

দ্বিতীয় রাশি $= 2(3x^5-7x^3-20x^2+18)$.

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের বহুপদ-গুণনীয়ক (multinomial factors) দুইটির গ. সা. গু. কে X দ্বারা সূচিত করিলে, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 2X$.

এখন, X কে নির্ণয় করিতে হইবে :

$$\begin{array}{r|l|l}
x^4-4x^3+27 & 3x^5-7x^3-20x^2+18 & 3x+12 \\
 & 3x^5-12x^4+81x & \\
\hline
 & 12x^4-7x^3-20x^2-81x+18 & \\
 & 12x^4-48x^3+324 & \\
\hline
 & 41x^3-20x^2-81x-306 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
 & x^4-4x^3+27 & \\
 & 41 & \\
\hline
41x^3-20x^2-81x-306 & 41x^4-164x^3+1107 & x \\
 & 41x^4-20x^3-81x^2-306x & \\
\hline
-9) & -144x^3+81x^2+306x+1107 & \\
\hline
 & 16x^3-9x^2-34x-123 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 16x^3 - 9x^2 - 34x - 123 & \\
 & 41 & \\
41x^3 - 20x^2 - 81x - 306 & 656x^3 - 369x^2 - 1394x - 5043 & 16 \\
 & 656x^3 - 320x^2 - 1296x - 4896 & \\
 & -49)\ -49x^2 - 98x - 147 & \\
 & \qquad x^2 + 2x + 3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2 + 2x + 3 & 41x^3 - 20x^2 - 81x - 306 & 41x - 102 \\
 & 41x^3 + 82x^2 + 123x & \\
 & -102x^2 - 204x - 306 & \\
 & -102x^2 - 204x - 306 &
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 2(x^2 + 2x + 3)$.

প্রশ্নমালা 62

গ. সা. গু. নির্ণয় কর (Find the H. C. F. of) :

1. $2x^2 + 5x - 3$ এবং $2x^3 + 3x^2 - 32x + 15$ এর।
2. $3x^2 + 16x - 12$ এবং $3x^3 + 4x^2 - 28x + 16$ এর।
3. $2x^2 - 3ax - 20a^2$ এবং $2x^3 + 3ax^2 - 45a^2x - 100a^3$ এর।
4. $3x^4 + 7x^3 - 14x^2 - 24x$ এবং $6x^4 - 10x^3 - 24x^2$ এর।
5. $6a^3 - 11a^2 - 3a + 2$ এবং $3a^3 + 20a^2 + 23a - 10$ এর।
6. $6a^3 - 25a^2b + 32ab^2 - 12b^3$ এবং $4a^3 + 12a^2b - 7ab^2 - 30b^3$ এর।
7. $3x^3 + 5x^2 + 5x + 2$ এবং $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$ এর।
8. $4x^3 - 7x^2y + 7xy^2 - 3y^3$ এবং $3x^3 - 7x^2y + 7xy^2 - 4y^3$ এর।
9. $6x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 2x$ এবং $4x^5 - 18x^4 - 8x^3 - 10x^2$ এর।
10. $3x^4 + 10x^3 + 7x^2 + 4x + 1$ এবং $2x^3 + 3x^2 - 7x - 3$ এর।
11. $4x^3 + 13x^2 - 8x - 3$ এবং $3x^4 + 13x^3 + 9x^2 + 9x + 2$ এর।
12. $12a^3 + 11a^2x + 6ax^2 + x^3$ এবং $21a^3 + 17a^2x + 9ax^2 + x^3$ এর।
13. $35a^3 + 31a^2x + 13ax^2 + 2x^3$ এবং $65a^3 + 54a^2x + 22ax^2 + 3x^3$ এর।
14. $70x^3 - 9ax^2 + 11a^2x + 6a^3$ এবং $91x^3 - 25ax^2 + 20a^2x + 4a^3$ এর।
15. $75x^3 - 35x^2 + 24x + 4$ এবং $85x^3 - 36x^2 + 25x + 6$ এর।
16. $35x^3 - 34x^2 + 3x + 2$ এবং $49x^3 - 49x^2 + 5x + 3$ এর।
17. $4x^6 + 2ax^5 + 14a^2x^4 + 10a^3x^3 + 24a^4x^2$ এবং $6x^6 + 21ax^5 + 30a^2x^4 + 24a^3x^3$ এর।

18. $4a^4+32a^3+72a^2+44a+8$ এবং
$6a^4+54a^3+138a^2+78a+12$ এর।

19. $2x^4-19x^2+21x-6$ এবং $6x^4+21x^3+3x-6$ এর।

20. $12x^4-30x^2+126x+90$ এবং $15x^4-25x^3+145x-75$ এর।

21. $18x^4+117x^3+162x^2+72x+9$ এবং
$12x^4+68x^3+72x^2+108x+20$ এর।

22. $x^5-5x^2+6x+12$ এবং $x^4-8x^2-24x-32$ এর।

23. $x^4+5x^3+3x^2-14x-40$ এবং $x^5-4x^3+45x+75$ এর।

24. $4x^5-8x^3a^2+28x^2a^3-24xa^4+24a^5$ এবং
$6x^4+24x^3a-12x^2a^2-24xa^3+96a^4$ এর।

25. $9x^4-18x^3y-13x^2y^2-38xy^3-12y^4$ এবং
$6x^5+4x^4y+5x^3y^2+4x^2y^3+8y^5$ এর।

26. $2x^5-11x^2-9$ এবং $4x^5+11x^4+81$ এর।

27. $32a^4+104a^3-20a^2-122a+30$ এবং
$60a^5+10a^4-45a^3+45a^2-50a$ এর।

28. $x^5+2x^4-5x^2-7x+3$ এবং $3x^6-3x^4-18x^3+x^2+2x+3$ এর।

138. অনেক স্থলে নিম্নলিখিত উপপত্তি সাহায্যে অতি সহজে গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায়ঃ

উপপত্তিঃ A ও B দুইটি একপদ-গুণনীয়ক-বর্জ্জিত রাশিমালা হইলে, যদি m, n, p, q এরূপ চারিটি অঙ্ক-সংখ্যা (numerical quantity) বুঝায় যে, $mq-np$ এর সাংখ্যমান শূন্য নহে, তাহা হইলে, B ও A এর গ. সা. গু. এবং $mA+nB$ ও $pA+qB$ এর গ. সা. গু., উভয়ই এক। (শেষোক্ত প্রত্যেক রাশিমালাতেই সাধারণ সাংখ্য-গুণনীয়ক বর্জ্জনীয়।)

ধর, A ও B এর গ. সা. গু. H দ্বারা এবং (সাধারণ সাংখ্য-গুণনীয়ক-বর্জ্জিত) $mA+nB$ ও $pA+qB$ এর গ. সা. গু. H' দ্বারা সূচিত করা হইল।

এখন, যেহেতু A ও B এর **প্রত্যেক** সাধারণ গুণনীয়কই, $mA+nB$ এর গুণনীয়ক, আবার $pA+qB$ এরও গুণনীয়ক, সুতরাং H নিশ্চয়ই $mA+nB$ ও $pA+qB$ এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

কাজেই, H', হয় H এর সমান, নতুবা H অপেক্ষা উচ্চতর মানের, কোন রাশিমালা হইবে। ... ... (ক)

আবার, যেহেতু $q(mA+nB)-n(pA+qB)=(mq-np)A$,
এবং $m(pA+qB)-p(mA+nB)=(mq-np)B$,

অতএব, $mA+nB$ ও $pA+qB$ এর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়কই $(mq-np)A$ এর, এবং $(mq-np)B$ এরও, গুণনীয়ক হইবে। এখন, যেহেতু প্রদত্ত সর্তানুসারে, $mq-np$ একটি অঙ্ক-সংখ্যামাত্র, অতএব, $mA+nB$ ও $pA+qB$ এর অঙ্ক-গুণনীয়ক ব্যতীত অপর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়কই A এর, এবং B এরও গুণনীয়ক হইবে। কাজেই, H' স্পষ্টতঃ A ও B এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

অতএব, H', H অপেক্ষা উচ্চতর মানের রাশিমালা হইতে পারে না।

অতএব, (ক) হইতে, $H'=H$;

অর্থাৎ, উপপত্তিটি প্রতিষ্ঠিত হইল।

অনুসি. 1. A ও B এর গ. সা. গু. এবং $A+B$ ও $A-B$ এর গ. সা. গু. উভয়ই এক। [এস্থলে, $m=1$, $n=1$, $p=1$ এবং $q=-1$ ধরিতে হইবে।]

অনুসি. 2. A ও B এর গ. সা. গু. এবং $A\pm B$ ও B এর গ. সা. গু. উভয়ই এক। [এস্থলে, $m=1$, $n=\pm 1$, $p=0$ এবং $q=1$.]

তদ্রূপ, A ও B এর গ. সা. গু. এবং $A\pm B$ ও A এর গ. সা. গু.ও এক।

উদা. 1. $x^4+x^3-5x^2-3x+2$ এবং $x^4-3x^3+x^2+3x-2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

ধর, $A=x^4+x^3-5x^2-3x+2$,

এবং $B=x^4-3x^3+x^2+3x-2$.

তাহা হইলে, $A+B=2x^4-2x^3-4x^2=2x^2(x^2-x-2)$,

এবং $A-B=4x^3-6x^2-6x+4=2(2x^3-3x^2-3x+2)$.

অতএব, অনুসি. 1 হইতে বুঝা যায় যে, নির্ণেয় গ. সা. গু., $x^2(x^2-x-2)$ এবং $2x^3-3x^2-3x+2$ এর গ. সা. গু. এর সমান; কাজেই, উহা x^2-x-2 এবং $2x^3-3x^2-3x+2$ এর গ. সা. গু. এর সমান হইবে।

ধর, $A'=x^2-x-2$,

এবং $B'=2x^3-3x^2-3x+2$.

তাহা হইলে, $A'+B'=2x^3-2x^2-4x=2x(x^2-x-2)$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=A'$ এবং $(A'+B')$ এর গ. সা. গু. [অনুসি. 2]

$=x^2-x-2$.

উদা. 2. $4x^4+11x^3+27x^2+17x+5$ এবং $3x^4+7x^3+18x^2+7x+5$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

ধর, $A=4x^4+11x^3+27x^2+17x+5$,

এবং $B=3x^4+7x^3+18x^2+7x+5$.

তাহা হইলে, $A - B = x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 10x = x(x^3 + 4x^2 + 9x + 10)$,

এবং $3A - 4B = 5x^3 + 9x^2 + 23x - 5$.

অতএব, $x^3 + 4x^2 + 9x + 10$ এবং $5x^3 + 9x^2 + 23x - 5$ এর গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

ধর, $A' = x^3 + 4x^2 + 9x + 10$,

এবং $B' = 5x^3 + 9x^2 + 23x - 5$.

তাহা হইলে, $A' + 2B' = 11x^3 + 22x^2 + 55x = 11x(x^2 + 2x + 5)$,

এবং $5A' - B' = 11x^2 + 22x + 55 = 11(x^2 + 2x + 5)$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x(x^2 + 2x + 5)$ এবং $x^2 + 2x + 5$ এর গ. সা. গু.

$= x^2 + 2x + 5$.

উদা. 3. $2x^5 - 11x^2 - 9$ এবং $4x^5 + 11x^4 + 81$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1865]

ধর, $A = 4x^5 + 11x^4 + 81$,

এবং $B = 2x^5 - 11x^2 - 9$.

তাহা হইলে, $A - 2B = 11x^4 + 22x^2 + 99 = 11(x^4 + 2x^2 + 9)$,

এবং $A + 9B = 22x^5 + 11x^4 - 99x^2 = 11x^2(2x^3 + x^2 - 9)$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x^4 + 2x^2 + 9$ এবং $x^2(2x^3 + x^2 - 9)$ এর গ. সা. গু.।

সুতরাং, উহা $x^4 + 2x^2 + 9$ এবং $2x^3 + x^2 - 9$ এর গ. সা. গু.।

ধর, $A' = x^4 + 2x^2 + 9$,

এবং $B' = 2x^3 + x^2 - 9$.

তাহা হইলে, $A' + B' = x^4 + 2x^3 + 3x^2 = x^2(x^2 + 2x + 3)$.

অতএব, $2x^3 + x^2 - 9 (= B')$ এবং $x^2 + 2x + 3 (= C')$ এর গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

এখন, যেহেতু $B' + 3C' = 2x^3 + 4x^2 + 6x$
$= 2x(x^2 + 2x + 3)$;

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= C'$ এবং $B' + 3C'$ এর গ. সা. গু.

$= x^2 + 2x + 3$.

প্রশ্নমালা 63

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর (Find the H. C. F. of) :

1. $x^3-3x^2-4x+12$ এবং $x^3-7x^2+16x-12$ এর।
2. $2x^3-17x+12$ এবং $4x^4-2x^3-34x^2+41x-12$ এর।
3. $4x^3+13x^2+19x+4$ এবং $2x^3+5x^2+5x-4$ এর।
4. $3x^3-5x^2+7$ এবং $6x^4-7x^3-5x^2+14x+7$ এর।
5. $6x^4-11x^3+16x^2-22x+8$ এবং $6x^4-11x^3-8x^2+22x-8$ এর।
6. $2x^4+19x^3+20x^2-31x+8$ এবং
$2x^4+7x^3-64x^2+62x-16$ এর।
7. $3x^4-7x^3-27x^2-6x+2$ এবং $3x^4-13x^3-40x^2-9x+3$ এর।
8. $5x^4-18x^3-7x^2+12x+3$ এবং $5x^4-23x^3-9x^2+16x+4$ এর।
9. $2x^4-5x^3-17x^2-2x+2$ এবং
$6x^5+23x^4+34x^3+21x^2-2x-2$ এর।
10. $6x^5+9x^4-13x^3-4x^2+9x-3$ এবং
$9x^5+12x^4-18x^3-5x^2+12x-4$ এর।
11. x^5-x^3+8 এবং x^5-x^2+4 এর।
12. $3x^5+139x^2-44$ এবং $39x^5+139x^4-16$ এর।

139. সহজে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না, এইপ্রকার তিন বা ততোধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় :

ধর, A, B, C দ্বারা সূচিত রাশিমালাত্রয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, A ও B এর গ. সা. গু. G দ্বারা, ও G ও C এর গ. সা. গু. H দ্বারা সূচিত করা হইল।

এখন G,, A ও B এর সকল সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কের গুণফল বলিয়া, G এর প্রত্যেক গুণনীয়কই A ও B এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে। সুতরাং, G ও C এর সকল সাধারণ গুণনীয়কই A, B ও C এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

অতএব, A, B ও C এর সাধারণ গুণনীয়ক H হইবে। কাজেই, নির্ণেয় গ. সা. গু., হয় H, নতুবা H অপেক্ষা উচ্চতর মানের, কোন রাশিমালা হইবে। ... (ক)

কিন্তু, যেহেতু A ও B এর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়কই G এর উৎপাদক, অতএব, A, B ও C এর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়কই G ও C এরও সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

সুতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. অবশ্যই G ও C এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে; কাজেই, উহা H অপেক্ষা উচ্চতর মানের কোন রাশিমালা হইতে পারে না।

অতএব, (ক) হইতে, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= H$.

অনুরূপ যুক্তিদ্বারা দেখান যাইতে পারে যে, D যদি চতুর্থ এক রাশিমালা বুঝায়, তাহা হইলে, H ও D এর গ. সা. গু.ই A, B, C ও D এর গ. সা. গু. হইবে।

অতএব, তিন বা ততোধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া গেল :

$A, B, C, D, \ldots$ প্রভৃতি রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে A ও B এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর; তৎপরে লব্ধ গ. সা. গু. ও C এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর; তৎপরে এই গ. সা. গু. ও D এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর; ইত্যাদি। সর্ব্বশেষ গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

উদা.। গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $2x^4-7x^3-17x^2+58x-24$, $3x^4+14x^3-11x^2-70x+24$ এবং $5x^4+9x^3-47x^2-81x+18$.

প্রথমে, প্রথম দুইটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করা যাউক :

ধর, $A=2x^4-7x^3-17x^2+58x-24$,

এবং $B=3x^4+14x^3-11x^2-70x+24$.

তাহা হইলে, $A+B=5x^4+7x^3-28x^2-12x$
$=x(5x^3+7x^2-28x-12)$,

এবং $-3A+2B=49x^3+29x^2-314x+120$.

অতএব, A ও B এর গ. সা. গু., $5x^3+7x^2-28x-12$ এবং $49x^3+29x^2-314x+120$ এতদুভয়ের গ. সা. গু. এর সমান।

এখন, মনে কর, $A'=5x^3+7x^2-28x-12$,

এবং $B'=49x^3+29x^2-314x+120$.

তাহা হইলে, $10A'+B'=99x^3+99x^2-594x=99x(x^2+x-6)$.

অতএব, A ও B এর গ. সা. গু.,

$$\left.\begin{array}{l} 5x^3+7x^2-28x-12\ (=A') \\ \text{এবং}\quad x^2+x-6\ (=C') \end{array}\right\}$$ এর গ. সা. গু. এর সমান।

এখন, $A'-2C'=5x^3+5x^2-30x=5x(x^2+x-6)$.

$\therefore$ A ও B এর গ. সা. গু. $=C'$ ও $A'-2C'$ এর গ. সা. গু.
$=x^2+x-6$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু., x^2+x-6 এবং $5x^4+9x^3-47x^2-81x+18$ এতদুভয়ের গ. সা. গু. এর সমান। এই শেষোক্ত গ. সা. গু. নিম্নলিখিতরূপে নির্ণয় করা যায়। যথা,

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2+x-6 & 5x^4+9x^3-47x^2-81x+18 & 5x^2+4x \\
 & \underline{5x^4+5x^3-30x^2} & \\
 & 4x^3-17x^2-81x+18 & \\
 & \underline{4x^3+\ \ 4x^2-24x} & \\
 & -3\,)\,-21x^2-57x+18 & \\
 & 7x^2+19x-\ \ 6 & 7 \\
 & \underline{7x^2+\ \ 7x-42} & \\
 & 12\,)\,12x+36 & \\
 & x+\ \ 3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
x+3 & x^2+\ \ x-6 & x-2 \\
 & \underline{x^2+3x} & \\
 & -2x-6 & \\
 & \underline{-2x-6} &
\end{array}
$$

সুতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x+3$.

প্রশ্নমালা 64

গ. সা. গু. নির্ণয় কর (Find the H. C. F. of) :

1. $2x^3+7x^2-5x-4,\ x^3+8x^2+11x-20$
এবং $2x^3+19x^2+49x+20$ এর।

2. $2x^4+3x^3+8x^2+15x-10,\ 2x^4-5x^3+12x^2-25x+10$
এবং $2x^4-5x^3+10x^2-20x+8$ এর।

3. $2x^4+7x^3-19x^2-14x+30,\ 2x^4+5x^3-16x^2-10x+24$
এবং $2x^4+5x^3-10x^2+5x-12$ এর।

4. $2x^4-4x^3-69x^2-2x-35,\ 2x^4-6x^3-55x^2-3x-28$
এবং $2x^4+18x^3+41x^2+9x+20$ এর।

5. $3a^3+28a^2b+52ab^2-48b^3,\ 3a^3+4a^2b-28ab^2+16b^3$
এবং $3a^3+10a^2b-44ab^2+24b^3$ এর।

6. $6a^2+5a^2b-34ab^2+15b^3,\ 6a^3-37a^2b+57ab^2-20b^3$
এবং $3a^3-8a^2b-31ab^2+60b^3$ এর।

7. $3x^4+11x^3-32x^2-44x+80$, $3x^4-x^3-52x^2+124x-80$, $3x^4+2x^3-20x^2-8x+32$ এবং $3x^4+2x^3-83x^2-50x+200$ এর।

8. $6x^5+14x^4-53x^3-37x^2+66x+24$, $6x^5-28x^4+17x^3+54x^2-39x-18$, $6x^5+8x^4-79x^3-36x^2+105x+36$ এবং $2x^5-2x^4-31x^3+51x^2+42x-72$ এর।

II. জটিলতর ল. সা. গু. (Harder L. C. M.)

140. পর্য্যবেক্ষণ দ্বারা গুণনীয়ক নির্ণয় করা যায় না, এইরূপ দুই রাশিমালার ল. সা. গু.-নির্ণয়ঃ

ধর, A ও B, উপরিউক্তরূপ দুই রাশিমালা, এবং H উহাদের গ. সা. গু. বুঝাইতেছে। A ও B কে H দ্বারা ভাগ কর, এবং মনে কর, ভাগফলদ্বয় যথাক্রমে a ও b দ্বারা সূচিত হইতেছে। তাহা হইলে,

$$\left.\begin{aligned} & A=aH \\ \text{এবং}\quad & B=bH \end{aligned}\right\}$$

এখন, যেহেতু a ও b এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই, অতএব, A ও B এর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেরই (common multiple এর) একটি গুণনীয়ক $a\times H\times b$ হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. $=aHb$.

$$\left.\begin{aligned} \text{কিন্তু,}\quad aHb &= \frac{A}{H}\times B \\ \text{অথবা,}\quad &= A\times\frac{B}{H} \end{aligned}\right\}$$

কাজেই, নির্ণেয় ল. সা. গু. $=\dfrac{A}{H}\times B$, অথবা, $=A\times\dfrac{B}{H}$.

সুতরাং, দুইটি রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, একটিকে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে অপরটি দ্বারা গুণ করিতে হয়।

অনুসি.। যদি A ও B এর ল. সা. গু. L দ্বারা সূচিত হয়, তবে অবশ্যই, $L\times H=A\times B$; অর্থাৎ, দুই রাশিমালার ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. এর গুণফল, ঐ রাশিমালাদ্বয়ের গুণফলের সমান।

টীকা। দুই রাশিমালার ভিতর কোন গুণনীয়ক সাধারণ না থাকিলে, উহাদের গুণফলই রাশিমালাদ্বয়ের ল. সা. গু. হইবে।

উদা.। $6x^3+25x^2+16x+7$ এবং $6x^3-11x^2-8x-5$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r|l|l} 6x^3-11x^2-8x-5 & 6x^3+25x^2+16x+7 & 1 \\ & 6x^3-11x^2-8x-5 & \\ \hline & 12)\ 36x^2+24x+12 & \\ & 3x^2+2x+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 3x^2+2x+1 & 6x^3-11x^2-8x-5 & 2x-5 \\ & 6x^3+4x^2+2x & \\ \hline & -15x^2-10x-5 & \\ & -15x^2-10x-5 & \\ \hline \end{array}$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিসমূহের গ. সা. গু. $=3x^2+2x+1$.

সুতরাং, নির্ণেয় ল. সা. গু.

$$=\frac{6x^3-11x^2-8x-5}{3x^2+2x+1}(6x^3+25x^2+16x+7)$$

$$=(2x-5)(6x^3+25x^2+16x+7)$$

$$=12x^4+20x^3-93x^2-66x-35.$$

প্রশ্নমালা 65

ল. সা. গু. নির্ণয় কর (Find the L. C. M. of) :

1. $3x^3+2x^2-11x+4$ এবং $3x^3+14x^2+13x-8$ এর।
2. $6x^3+17x^2+9x-4$ এবং $6x^3-7x^2-27x+8$ এর।
3. $12x^3-4x^2-25x+12$ এবং $12x^3-28x^2+7x+12$ এর।
4. $9x^3-12x^2-15x+20$ এবং $15x^3+12x^2-25x-20$ এর।
5. $4x^3-10x^2-18x+45$ এবং $6x^3+8x^2-27x-36$ এর।
6. $4x^4+4x^3+7x^2+11x+4$ এবং $6x^4+7x^3+4x^2+5x+2$ এর।
7. $8x^4-6x^3-8x^2+9x-6$ এবং $16x^4-12x^3+20x^2-9x+6$ এর।
8. $4x^4+8x^3+21x^2+18x+27$ এবং $3x^4+6x^3+17x^2+16x+24$ এর।
9. দুইটি সংখ্যা x ও y এর গ. সা. গু. h এবং ল. সা. গু. l ; এবং $h+l=x+y$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $h^3+l^3=x^3+y^3$. [পাঞ্জাব প্রবেশিকা, 1891]

141. পর্য্যবেক্ষণ দ্বারা গুণনীয়ক নির্ণয় করা যায় না, এইরূপ তিন বা ততোধিক রাশিমালার ল. সা. গু.-নির্ণয় :

মনে কর, A, B, C দ্বারা সূচিত রাশিমালাত্রয়ের ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন ধর, A ও B এর ল. সা. গু. L দ্বারা, এবং L ও C এর ল. সা. গু. M দ্বারা সূচিত করা হইল।

তাহা হইলে, স্পষ্টই L ও C এর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকই (common multiple) A, B ও C এর সাধারণ গুণিতক হইবে; ... ... (1)

আবার, A, B ও C এর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকই স্পষ্টতঃ M এরও গুণিতক। ... ... (2)

অতএব, (1) হইতে, A, B ও C এর সাধারণ গুণিতক M হইবে। কাজেই, A, B ও C এর ল. সা. গু., হয় M, নতুবা M অপেক্ষা নিম্নতর মানের কোন রাশিমালা হইবে।

কিন্তু, A, B, C এর ল. সা. গু. M অপেক্ষা নিম্নতর মানের কোন রাশিমালা হইতে পারে না; কারণ, (2) হইতে দেখা যায় যে, A, B, C এর ল. সা. গু. অবশ্যই L ও C এর গুণিতক হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. $= M$.

সুতরাং, $A, B, C, D,\ldots$ ইত্যাদি দ্বারা সূচিত রাশিমালাসমূহের ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে A ও B এর ল. সা. গু., তৎপরে এই লব্ধ ল. সা. গু ও C এর ল. সা. গু., তৎপরে এই শেষোক্ত ল. সা. গু. ও D এর ল. সা. গু., ইত্যাদিক্রমে ল. সা. গু.-সমূহ নির্ণয় করিয়া যাইতে হয়। এইরূপ প্রক্রিয়ালব্ধ সর্ব্বশেষ ল. সা. গু.ই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

উদা.। ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$6x^2-11x+3$, $4x^2-4x-3$ এবং $6x^2+25x-9$ এর।

$$\begin{array}{r|l}
6x^2-11x+3 & 6x^2+25x-9 \;(1 \\
 & \underline{6x^2-11x+3} \\
 & 12)\,36x-12 \\
 & \quad 3x-1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
3x-1 & 6x^2-11x+3 \;(2x-3 \\
 & \underline{6x^2-\;\;2x} \\
 & \quad -9x+3 \\
 & \quad \underline{-9x+3}
\end{array}$$

অতএব, $6x^2-11x+3$ এবং $6x^2+25x-9$ এর গ. সা. গু. $=3x-1$.

সুতরাং, এই রাশিমালা দুইটির ল. সা. গু.

$$= \frac{6x^2 - 11x + 3}{3x - 1}(6x^2 + 25x - 9)$$
$$= (2x - 3)(6x^2 + 25x - 9)$$
$$= 12x^3 + 32x^2 - 93x + 27.$$

এখন, $4x^2 - 4x - 3$ এবং $12x^3 + 32x^2 - 93x + 27$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\begin{array}{r|l|l} 4x^2 - 4x - 3 & 12x^3 + 32x^2 - 93x + 27 & 3x + 11 \\ & 12x^3 - 12x^2 - 9x & \\ \hline & 44x^2 - 84x + 27 & \\ & 44x^2 - 44x - 33 & \\ \hline -20) & -40x + 60 & \\ \hline & 2x - 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 2x - 3 & 4x^2 - 4x - 3 & 2x + 1 \\ & 4x^2 - 6x & \\ \hline & 2x - 3 & \\ & 2x - 3 & \\ \hline \end{array}$$

অতএব, উল্লিখিত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $= 2x - 3$.

সুতরাং, তাহাদের ল. সা. গু. $= \frac{4x^2 - 4x - 3}{2x - 3}(12x^3 + 32x^2 - 93x + 27)$

$$= (2x + 1)(12x^3 + 32x^2 - 93x + 27)$$
$$= 24x^4 + 76x^3 - 154x^2 - 39x + 27.$$

প্রশ্নমালা 66

ল. সা. গু. নির্ণয় কর (Find the L. C. M. of) :

1. $3x^2 - 10x - 8$, $4x^2 - 20x + 9$ এবং $6x^2 + x - 2$ এর।
2. $3x^2 - 23x - 8$, $6x^2 - 7x - 3$ এবং $2x^2 - 11x + 12$ এর।
3. $6x^2 - 19x + 10$, $12x^2 - 11x + 2$ এবং $8x^2 + 10x - 3$ এর।
4. $2x^4 + 4x^3 + x^2 + 6x - 3$, $4x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 6x + 3$ এবং $8x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 3x - 3$ এর।

একবিংশ অধ্যায়

জটিল ভগ্নাংশ (Harder Fractions)

142. চতুর্দ্দশ অধ্যায়ে বর্ণিত ভগ্নাংশ অপেক্ষা জটিলতর ভগ্নাংশ-সম্বন্ধে এক্ষণে আলোচনা করা যাইতেছে।

I. ভগ্নাংশের লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন

(Reduction of Fractions to lowest terms)

143. কোন ভগ্নাংশের হর ও লবে যদি কোন গুণনীয়ক সাধারণ না থাকে, তবে সেই ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশ (fractions reduced to its lowest terms) বলা হয়। যে সকল ক্ষেত্রে, হর ও লবকে পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়, সেই সকল ক্ষেত্রে হর ও লব হইতে সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারণ করিয়াই ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত করিতে হয়। অন্যথায়, হর ও লবের প্রত্যেককে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিয়া লঘিষ্ঠ আকার নির্ণয় করিতে হয়।

উদা. 1. লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর :

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc}.$$

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ} = \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}{(a+b+c)(bc+ca+ab)}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{bc+ca+ab}.$$

উদা. 2. সরল কর : $\dfrac{8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3}{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}$.

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ} = \frac{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)} = 1.$$

উদা. 3. লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর :

$$\frac{3x^3-27ax^2+78a^2x-72a^3}{2x^3+10ax^2-4a^2x-48a^3}.$$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889]

লব $= 3(x^3-9ax^2+26a^2x-24a^3)$.

হর $= 2(x^3+5ax^2-2a^2x-24a^3)$.

এখন, ইহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে :

$$\begin{array}{r}
x^3+5ax^2-\ \ 2a^2x-24a^3\\
x^3-9ax^2+26a^2x-24a^3\\ \hline
14ax\,)\ 14ax^2-28a^2x\\ \hline
x-\ 2a
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x-2a\ \big)\ x^3-9ax^2+26a^2x-24a^3\ \big(\ x^2-7ax+12a^2\\
\qquad\qquad x^3-2ax^2\\ \hline
\qquad\qquad -7ax^2+26a^2x-24a^3\\
\qquad\qquad -7ax^2+14a^2x\\ \hline
\qquad\qquad\qquad\quad 12a^2x-24a^3\\
\qquad\qquad\qquad\quad 12a^2x-24a^3\\ \hline
\end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x-2a.$

স্বতরাং, নির্ণেয় ফল $=\dfrac{3(x^3-9ax^2+26a^2x-24a^3)\div(x-2a)}{2(x^3+5ax^2-2a^2x-24a^3)\div(x-2a)}$

$$=\frac{3(x^2-7ax+12a^2)}{2(x^2+7ax+12a^2)}.$$

উদা. 4. $\dfrac{2x^4-x^3-9x^2+13x-5}{7x^3-19x^2+17x-5}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন কর।

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1870]

প্রদত্ত ভগ্নাংশটির লব ও হরের গ. সা. গু. নিম্নোক্ত প্রকারে নির্ণয় করা যায় :

[অনুসি. 2, নিয়ম 138]

$$\begin{array}{r}
2x^4-\ x^3-\ 9x^2+13x-5\\
7x^3-19x^2+17x-5\\ \hline
2x\,)\ 2x^4-8x^3+10x^2-\ 4x\\ \hline
x^3-\ 4x^2+\ 5x-2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x^3-4x^2+5x-2\ \big)\ 7x^3-19x^2+17x-\ 5\ \big(\ 7\\
\qquad\qquad\qquad\quad 7x^3-28x^2+35x-14\\ \hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 9\,)\ 9x^2-18x+\ 9\\ \hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ x^2-\ 2x+\ 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x^2-2x+1\ \big)\ x^3-4x^2+5x-2\ \big(\ x-2\\
\qquad\qquad\quad x^3-2x^2+\ x\\ \hline
\qquad\qquad\quad -2x^2+4x-2\\
\qquad\qquad\quad -2x^2+4x-2\\ \hline
\end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^2-2x+1.$

সুতরাং, নির্ণেয় ফল

$$=\frac{(2x^4-x^3-9x^2+13x-5)\div(x^2-2x+1)}{(7x^3-19x^2+17x-5)\div(x^2-2x+1)}=\frac{2x^2+3x-5}{7x-5}.$$

প্রশ্নমালা 67

লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন কর (Reduce to the lowest terms) :

1. $\dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^2+x-2}$.

2. $\dfrac{x^3-7x+6}{x^3+2x^2-13x+10}$.

3. $\dfrac{a^3+2a^2b-2ab^2+3b^3}{a^3-5a^2b+5ab^2-4b^3}$.

4. $\dfrac{x^4+(2b^2-a^2)x^2+b^4}{x^4+2ax^3+a^2x^2-b^4}$.

5. $\dfrac{3x^3+4x^2y-7xy^2+2y^3}{2x^3+9x^2y+8xy^2-5y^3}$.

6. $\dfrac{1+3x-x^3-3x^4}{1-x+2x^2+x^3+3x^4}$.

7. $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3-x^2-2x+1}$.

8. $\dfrac{x^4+x^2+25}{x^4-9x^2+30x-25}$.

9. $\dfrac{2x^3+3ax^2+5a^2x-21a^3}{4x^3-12ax^2+19a^2x-15a^3}$.

10. $\dfrac{2x^4+x^3-3x^2+2x+3}{3x^4+x^3-4x^2+3x+4}$.

11. $\dfrac{9x^3-7a^2x-2a^3}{9x^3+6ax^2-5a^2x-2a^3}$.

12. $\dfrac{2a^3-16a^2b+44ab^2-42b^3}{3a^3+6a^2b-24ab^2-63b^3}$.

13. $\dfrac{9x^4+30x^3+12x^2-6x-45}{8x^4+28x^3+16x^2-4x-48}$.

14. $\dfrac{6a^6-9a^5b+a^4b^2+3a^3b^3-a^2b^4}{4a^5-6a^4b+3a^2b^3-ab^4}$.

15. $\dfrac{24x^5+16x^4y-28x^3y^2-24x^2y^3-12xy^4}{45x^4y+30x^3y^2-15x^2y^3-20xy^4-10y^5}$.

16. $\dfrac{(b+c)^3(b-c)+(c+a)^3(c-a)+(a+b)^3(a-b)}{(b+c)^2(b-c)+(c+a)^2(c-a)+(a+b)^2(a-b)}$.

17. $\dfrac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)-(yz+x)(zx+y)(xy+z)}{1-x^2-y^2-z^2-2xyz}$.

18. $\dfrac{(x+y-2z)^3+(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3}{12(x+y-2z)(y+z)(y+z-2x)}$.

19. $\dfrac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{(x-y)(x-z)+(y-z)(y-x)+(z-x)(z-y)}$.

20. $\dfrac{7x^3-2x^2y-63xy^2+18y^3}{5x^4-3x^3y-43x^2y^2+27xy^3-18y^4}$. [পাঞ্জাব, 1912]

II. ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ

144. যেহেতু $\frac{p}{a}+\frac{q}{a}+\frac{r}{a}+\cdots\cdots=\frac{p+q+r+\cdots}{a}$, অতএব, দেখা যায় যে, সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশসমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, ভগ্নাংশসমূহের সাধারণ হরটিকে যোগফলের হর এবং লবগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টিকে যোগফলের লবরূপে লইলেই, নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়।

ভগ্নাংশসমূহ সাধারণ হরবিশিষ্ট না হইলে, 107 নিয়মে প্রদত্ত পদ্ধতি অনুসারে উহাদিগের প্রত্যেককে তুল্য সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করিয়া উপরিউক্ত প্রণালী অনুসারে কার্য্য করিতে হয়।

উদা. 1. সরল কর : $\frac{a^2}{(x-a)^n}+\frac{2a}{(x-a)^{n-1}}+\frac{1}{(x-a)^{n-2}}$. [মাদ্রাজ, 1865]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{a^2}{(x-a)^n}+\frac{2a(x-a)}{(x-a)^n}+\frac{(x-a)^2}{(x-a)^n}=\frac{a^2+2a(x-a)+(x-a)^2}{(x-a)^n}$$

$$=\frac{\{a+(x-a)\}^2}{(x-a)^n}=\frac{x^2}{(x-a)^n}.$$

উদা. 2. সরল কর : $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x^2+4}+\frac{32}{x^4+16}$.

এইপ্রকার রাশিসমূহকে সরল করিতে হইলে, প্রথমে সুবিধামত যে কোন দুইটি পদকে যোগ করিয়া, লব্ধ যোগফলের সহিত যে কোন অপর একটি তৃতীয় পদ, ইত্যাদি-রূপে, ক্রমশঃ যোগ করিয়া যাইতে হয়।

এখন, $$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{(x+2)-(x-2)}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4};$$

$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2+4}=\frac{4(x^2+4)-4(x^2-4)}{x^4-16}=\frac{32}{x^4-16};$$

এবং $$\frac{32}{x^4-16}+\frac{32}{x^4+16}=\frac{32(x^4+16)+32(x^4-16)}{x^8-256}=\frac{64x^4}{x^8-256}.$$

[নির্ণেয় ফল]

উদা. 3. সরল কর : $\frac{x+3}{x^2-3x+2}+\frac{x+2}{x^2-4x+3}+\frac{x+1}{x^2-5x+6}$.

[পাঞ্জাব, 1904]

প্রথম হর $=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

দ্বিতীয় হর $=x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$.

তৃতীয় হর $=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

$\therefore$ হরগুলির ল. সা. গু. $=(x-1)(x-2)(x-3)$.

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $=\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}+\frac{x+2}{(x-3)(x-1)}+\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$

$$=\frac{(x+3)(x-3)+(x+2)(x-2)+(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-9+x^2-4+x^2-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{3x^2-14}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

উদা. 4. সরল কর :

$$\frac{x-y}{(a+x)(a+y)}+\frac{y-z}{(a+y)(a+z)}+\frac{z-x}{(a+z)(a+x)}.$$ [এলাহাবাদ, 1915]

হরগুলির ল. সা. গু. $=(a+x)(a+y)(a+z)$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\frac{(a+z)(x-y)+(a+x)(y-z)+(a+y)(z-x)}{(a+x)(a+y)(a+z)}$.

ইহার লব $=a\{(x-y)+(y-z)+(z-x)\}+z(x-y)+x(y-z)+y(z-x)$

$=0$. [সরল করিয়া]

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\frac{0}{(a+x)(a+y)(a+z)}=0$.

অন্য প্রকারে : যেহেতু $\frac{1}{a+y}-\frac{1}{a+x}=\frac{(a+x)-(a+y)}{(a+x)(a+y)}=\frac{x-y}{(a+x)(a+y)}$,

$$\frac{1}{a+z}-\frac{1}{a+y}=\frac{(a+y)-(a+z)}{(a+y)(a+z)}=\frac{y-z}{(a+y)(a+z)},$$

এবং $\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a+z}=\frac{(a+z)-(a+x)}{(a+z)(a+x)}=\frac{z-x}{(a+z)(a+x)}$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{a+y}-\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+z}-\frac{1}{a+y}+\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a+z}=0$.

উদা. 5. সরল কর : $\frac{a}{a+b}+\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$.

এইপ্রকার রাশিমালার সহিত সুবিধামত অন্য একটি ভগ্নাংশ যোগ ও বিয়োগ করিয়া রাশিমালাকে অতি সহজে সরল করা যায়। যথা, বর্ত্তমান ক্ষেত্রে, $\frac{a}{a-b}$ ভগ্নাংশটিকে প্রদত্ত রাশিমালার সহিত যোগ ও বিয়োগ করিয়া,

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা}=\frac{a}{a-b}+\frac{a}{a+b}+\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}-\frac{a}{a-b}.$$

এখন, $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{a+b}=\frac{a(a+b)+(a-b)a}{a^2-b^2}=\frac{2a^2}{a^2-b^2}$;

আবার, $\frac{2a^2}{a^2-b^2}+\frac{2a^2}{a^2+b^2}=\frac{2a^2(a^2+b^2)+2a^2(a^2-b^2)}{a^4-b^4}=\frac{4a^4}{a^4-b^4}$;

এবং $\frac{4a^4}{a^4-b^4}+\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}=\frac{4a^4+4a^2b^2}{a^4-b^4}=\frac{4a^2(a^2+b^2)}{a^4-b^4}=\frac{4a^2}{a^2-b^2}$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\frac{4a^2}{a^2-b^2}-\frac{a}{a-b}=\frac{4a^2-a(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{3a^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{a(3a-b)}{a^2-b^2}$.

প্রশ্নমালা 68

সরল কর (Simplify) :

1. $\frac{x}{3x-y}+\frac{x}{3x+y}+\frac{6x^2}{9x^2+y^2}$.

2. $\frac{1}{x-3a}-\frac{1}{2x+6a}-\frac{x-9a}{2x^2+18a^2}$.

3. $\frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a-b)^2}-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-2$.

4. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$.

5. $\frac{1}{x-a}-\frac{2}{2x+a}+\frac{1}{x+a}-\frac{2}{2x-a}$.

6. $\frac{3}{a-x}-\frac{1}{x+3a}+\frac{3}{a+x}+\frac{1}{x-3a}$.

7. $\frac{2}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{1-x^2}$.

8. $\frac{a-c}{(a-b)(x-a)}+\frac{b-c}{(b-a)(x-b)}$.

9. $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{2}{x^2-8x+15}$.

10. $\frac{1}{x^2+5ax+4a^2}+\frac{1}{x^2+11ax+28a^2}+\frac{2}{x^2+20ax+91a^2}$.

11. $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2x}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2+5x+6}$.

12. $\frac{1}{1-x+x^2}-\frac{1}{1+x+x^2}-\frac{2x}{1+x^2+x^4}$.

13. $\frac{1}{1+x+x^2}-\frac{1}{1-x+x^2}+\frac{2x}{1-x^2+x^4}$.

14. $\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{x^2+2x+4}+\frac{6x}{x^3+8}$.

15. $\frac{1}{2x^2-6ax+9a^2}-\frac{1}{2x^2+6ax+9a^2}+\frac{12ax}{4x^4-81a^4}$.

16. $\dfrac{1}{(x+a)(x+2a)}+\dfrac{1}{(x+2a)(x+3a)}+\dfrac{1}{(x+3a)(x+4a)}$.

17. $\dfrac{a-b}{(x+a)(x+b)}+\dfrac{b-c}{(x+b)(x+c)}+\dfrac{c-d}{(x+c)(x+d)}$.

18. $\dfrac{1}{a^2-3a+2}+\dfrac{2}{a^2-5a+6}+\dfrac{3}{a^2-4a+3}$.

19. $\dfrac{1}{(x+1)^2(x+2)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}$. [এলাহাবাদ, 1912]

20. $\dfrac{2(x-3)}{(x-4)(x-5)}-\dfrac{x-1}{(x-3)(x-4)}-\dfrac{x-2}{(x-5)(x-3)}$. [এলাহাবাদ, 1911]

21. $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}+\dfrac{8}{1+a^8}-\dfrac{16}{1-a^{16}}$.

22. $\left(\sqrt{\dfrac{a+x}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{a+x}}\right)^2-\left(\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{x}}\right)^2+\dfrac{x^2}{a(a+x)}$.

[বোম্বাই প্রবেশিকা, 1876]

23. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

24. $\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\dfrac{2}{x^2-4x+3}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

25. $1+\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{bx}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{cx^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

$+\dfrac{dx^3}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$.

III. দুরূহ (Complex) এবং ধারাবাহিক বা ক্রমিক (Continued) ভগ্নাংশ

145. দুরূহ বা জটিল ভগ্নাংশ (Complex Fractions): যে ভগ্নাংশের হর ও লবের একটি বা উভয়ই ভগ্নাংশ, তাহাকে **দুরূহ** বা **জটিল ভগ্নাংশ** বলে। যথা,

$\dfrac{\frac{x}{y}}{z}$, $\dfrac{x}{\frac{y}{z}}$, $\dfrac{\frac{x}{y}}{\frac{a}{b}}$ ইত্যাদির প্রত্যেকটি দুরূহ বা জটিল ভগ্নাংশ। স্পষ্টতঃ, ইহারা ভগ্নাংশের ভাগবিশেষ।

এইপ্রকার ভগ্নাংশের সরলীকরণ-প্রণালী 110 নিয়মে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে।

146. ধারাবাহিক বা ক্রমিক ভগ্নাংশ (Continued Fractions) :

$$x+\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f+\text{ইত্যাদি}}}} \quad \text{অথবা,} \quad \cfrac{x}{y+\cfrac{z}{u+\cfrac{v}{w+\text{ইত্যাদি}}}},$$ এইজাতীয় ভগ্নাংশকে

ধারাবাহিক বা **ক্রমিক ভগ্নাংশ** বলে।

এইরূপ ভগ্নাংশকে সরল করিতে হইলে, পাটীগণিতের ন্যায়, সর্ব্বনিম্ন অংশ হইতে সরলীকরণ-প্রক্রিয়া আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ উপরের দিকে অগ্রসর হইতে হয়।

উদা. 1. সরল কর : $$-1+\cfrac{a}{2(a+b)-\cfrac{a+b}{1-\cfrac{b}{a+b}}}.$$

যেহেতু $1-\frac{b}{a+b}=\frac{a+b-b}{a+b}=\frac{a}{a+b}$, অতএব, সর্ব্বনিম্ন রাশি হইতে সরল করিতে আরম্ভ করিয়া,

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=-1+\cfrac{a}{2(a+b)-\cfrac{a+b}{\cfrac{a}{a+b}}}=-1+\cfrac{a}{2(a+b)-\cfrac{(a+b)^2}{a}}$$

$$=-1+\cfrac{a}{\cfrac{2a^2+2ab-(a^2+2ab+b^2)}{a}}$$

$$=-1+\frac{a^2}{a^2-b^2}=\frac{-a^2+b^2+a^2}{a^2-b^2}=\frac{b^2}{a^2-b^2}.$$

উদা. 2. সরল কর : $$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}.$$ [এলাহাবাদ, 1912]

প্রথম উদাহরণে প্রদর্শিত নিয়ম অনুসারে,

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{1+x}{x}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{x}{1+x}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{1+x+x}{1+x}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\frac{1+x}{1+2x}} = \cfrac{1}{\frac{1+2x+1+x}{1+2x}} = \frac{1+2x}{2+3x}.$$

উদা. 3. সমাধান কর : $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}} = \frac{3}{4}.$

উদা. 2 এর লব্ধ ফল লইয়া,

$$\text{বাম পক্ষ} = \frac{1+2x}{2+3x} = \frac{3}{4}\ ;$$

অথবা, $3(2+3x)=4(1+2x)$; অথবা, $6+9x=4+8x$;

অথবা, $9x-8x=4-6,$ [পক্ষান্তর করিয়া]

অথবা, $x=-2.$

প্রশ্নমালা 69

সরল কর (Simplify) :

1. $\dfrac{\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right)\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)}.$ [বোম্বাই প্রবেশিকা, 1926]

2. $\dfrac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}}{\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}+3}.$ 3. $\dfrac{\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}}{\frac{ax}{x-a}+\frac{bx}{x-b}+\frac{cx}{x-c}-(a+b+c)}.$

4. $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\times\left\{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1921]

5. $\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{1+a+\dfrac{2a^2}{1-a}}}$.

6. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a+x}}+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a+x}}+\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{a^2+x^2}}$.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1870]

7. $\dfrac{\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{b}{b-x}+\dfrac{c}{c-x}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-c}}$.

8. $\dfrac{\dfrac{a^3}{b^3}-\dfrac{b^3}{a^3}}{\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1\right)}\times\dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{ab}}$.

9. $\dfrac{\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{2(x-3)}}{\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}}$.

10. $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}}$.

11. $\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{d+\dfrac{e}{f}}}$.

12. $\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{1-\dfrac{1}{x+1}}}$.

13. $a^2+\dfrac{b^4}{a^2-\dfrac{a^3+b^3}{a+\dfrac{b^2}{a-b}}}$.

14. $\dfrac{m}{m^2-\dfrac{m^3-1}{m+\dfrac{1}{m+1}}}$.

15. $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{\dfrac{x+y}{x+y-\dfrac{(x-y)^2}{x+y}}-1}$.

16. $\dfrac{x^2(x+2)}{4x+8+\dfrac{2x^4-32}{x+2+\dfrac{(x-2)(x-2)}{x+2}}}$.

সমাধান কর (Solve) :

17. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{2-x}}}=\dfrac{4}{3}$.

18. $\dfrac{2x}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1-x}}}=1$.

19. $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}=\frac{13}{9}$. 20. $\cfrac{a}{a+\cfrac{a^2}{a+\cfrac{a^2}{x}}}=\frac{2}{3}$.

147. চক্র-ক্রম (Cyclic Order)-বিশিষ্ট ভগ্নাংশ : ভগ্নাংশের অন্তর্গত অক্ষরসমূহ চক্র-ক্রমে (in cyclic order) থাকিলে, উহাদিগকে সহজে সরল করা যায়।

উদা. 1. সরল কর : $\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$.

প্রথম পদের হরে (denominator এ) দেখা যায় যে, $a-c$ এর অক্ষরদ্বয় চক্র-ক্রমে নাই। কিন্তু,

যেহেতু $a-c=-(c-a)$, অতএব, $(a-b)(a-c)=-(a-b)(c-a)$.

অতএব, প্রথম ভগ্নাংশ $=-\frac{bc}{(a-b)(c-a)}$;

এইরূপে, দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $=-\frac{ca}{(b-c)(a-b)}$;

এবং তৃতীয় ভগ্নাংশ $=-\frac{ab}{(c-a)(b-c)}$.

হর তিনটির ল. সা. গু. $=(b-c)(c-a)(a-b)$.

$$\therefore \text{ প্রদত্ত রাশিমালা} = -\left[\frac{bc}{(a-b)(c-a)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(b-c)}\right]$$
$$=-\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$
$$=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=1.$$

148. চক্র-ক্রমবিশিষ্ট ভগ্নাংশ-সম্বন্ধীয় কয়েকটি বিশেষ ফল : চক্র-ক্রমবিশিষ্ট ভগ্নাংশ সরল করিতে নিম্নলিখিত সহজসিদ্ধ ফলগুলি অত্যন্ত উপযোগী।

যদি $\frac{1}{(a-b)(a-c)}=X$, $\frac{1}{(b-c)(b-a)}=Y$ এবং $\frac{1}{(c-a)(c-b)}=Z$ হয়,

তবে, (i) $X+Y+Z=0$; (ii) $aX+bY+cZ=0$;

(iii) $a^2X+b^2Y+c^2Z=1$; (iv) $bcX+caY+abZ=1$;

(v) $a^3X+b^3Y+c^3Z=a+b+c$;

(vi) $a^4X+b^4Y+c^4Z=a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab$.

উদা. 1. সরল কর : $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

প্রদত্ত রাশি $=(a^2-bc)X+(b^2-ca)Y+(c^2-ab)Z$,

[উপরিউক্ত সঙ্কেত অনুসারে]

$=a^2X+b^2Y+c^2Z-(bcX+caY+abZ)$,

$=1-1$ [(iii) এবং (iv) এর ফল হইতে]

$=0$.

উদা. 2. সরল কর :

$$\frac{pa^3+qa^2bc+ra}{(a-b)(a-c)}+\frac{pb^3+qab^2c+rb}{(b-c)(b-a)}+\frac{pc^3+qabc^2+rc}{(c-a)(c-b)}.$$

প্রদত্ত রাশি

$=(pa^3+qa^2bc+ra)X+(pb^3+qab^2c+rb)Y+(pc^3+qabc^2+rc)Z$,

[উপরিউক্ত সঙ্কেত অনুসারে]

$=p(a^3X+b^3Y+c^3Z)+qabc(aX+bY+cZ)+r(aX+bY+cZ)$

$=p(a+b+c)+qabc.0+r.0=p(a+b+c)$.

উদা. 3. দেখাও যে,

$$\frac{1}{(l-m)(l-n)(x+l)}+\frac{1}{(m-n)(m-l)(x+m)}+\frac{1}{(n-l)(n-m)(x+n)}$$
$$=\frac{1}{(x+l)(x+m)(x+n)}.$$

$x+l$ এর পরিবর্তে a, $x+m$ এর পরিবর্তে b, $x+n$ এর পরিবর্তে c বসাইয়া, $a-b=l-m$, $a-c=l-n$, $b-c=m-n$ প্রভৃতি।

∴ প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$

$=\frac{1}{abc}\left[\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}\right]$

$=\frac{1}{abc}(bcX+caY+abZ)$

$=\frac{1}{abc}=\frac{1}{(x+l)(x+m)(x+n)}$.

[a, b, c এর মান পুনরায় বসাইয়া]

149. ভগ্নাংশ-সম্বন্ধীয় অভেদাবলী (Fractional Identities) :

বিবিধ উদাহরণ :

উদা. 1. দেখাও যে, $\dfrac{x}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a^2}{x^3}+\dfrac{a^4}{x^5}-\dfrac{a^6}{x^7}+\dfrac{a^8}{x^7(x^2+a^2)}$.

x কে x^2+a^2 দ্বারা ভাগ করা যাক :

$$
\begin{array}{l}
x^2+a^2\,\big)\,x\,\Big(\dfrac{1}{x}-\dfrac{a^2}{x^3}+\dfrac{a^4}{x^5}-\dfrac{a^6}{x^7}\\
\quad\underline{x+\dfrac{a^2}{x}}\\
\quad\quad -\dfrac{a^2}{x}\\
\quad\quad \underline{-\dfrac{a^2}{x}-\dfrac{a^4}{x^3}}\\
\quad\quad\quad \dfrac{a^4}{x^3}\\
\quad\quad\quad \underline{\dfrac{a^4}{x^3}+\dfrac{a^6}{x^5}}\\
\quad\quad\quad\quad -\dfrac{a^6}{x^5}\\
\quad\quad\quad\quad \underline{-\dfrac{a^6}{x^5}-\dfrac{a^8}{x^7}}\\
\quad\quad\quad\quad\quad \dfrac{a^8}{x^7}
\end{array}
$$

অতএব, ভাগ-কার্য্যে আর অগ্রসর না হইয়া, এখন,

$$\frac{x}{x^2+a^2}=\frac{1}{x}-\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^4}{x^5}-\frac{a^6}{x^7}+\frac{\left(\dfrac{a^8}{x^7}\right)}{x^2+a^2}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^4}{x^5}-\frac{a^6}{x^7}+\frac{a^8}{x^7(x^2+a^2)}.$$

উদা. 2. $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ হইলে, $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}$ এর মান নির্ণয় কর।

[কলিঃ, 1865]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\left(\frac{x+2a}{x-2a}-1\right)+\left(\frac{x+2b}{x-2b}-1\right)+2$$

$$=\frac{4a}{x-2a}+\frac{4b}{x-2b}+2$$

$$=\frac{4}{(x-2a)(x-2b)}\{a(x-2b)+b(x-2a)\}+2$$

$$=\frac{4}{(x-2a)(x-2b)}\{(a+b)x-4ab\}+2$$
$$=0+2 \qquad [\because \ (a+b)x=4ab\,]$$
$$=2.$$

উদা. 3. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{(a+b+c)^7}=\frac{1}{a^7+b^7+c^7}.$$

যেহেতু $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}$;

$\therefore$ $(a+b+c)(bc+ca+ab)=abc,$

অথবা, $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=0,$

অথবা, $(b+c)(c+a)(a+b)=0$;

$\therefore$ উৎপাদকগুলির যে কোন একটি, ধর, $b+c=0.$

অতএব, $b=-c.$ $\therefore$ $b^7=(-c)^7=-c^7$, অথবা, $b^7+c^7=0.$

আবার, যেহেতু $b=-c$, $\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$; $\therefore$ $\frac{1}{b^7}=\left(-\frac{1}{c}\right)^7=-\frac{1}{c^7}.$

সুতরাং, $\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7}-\frac{1}{c^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7}=\frac{1}{(a+b+c)^7}.$

$[\because \ b+c=0.]$

এইরূপে, $\frac{1}{a^7}+\frac{1}{b^7}+\frac{1}{c^7}=\frac{1}{a^7}=\frac{1}{a^7+b^7+c^7}.$ $[\because \ b^7+c^7=0.]$

অতএব, অভেদটি প্রতিপন্ন হইল।

উদা. 4. লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন কর :

$$\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(x-z)^2}{(x+y)^2-z^2}+\frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}.$$ [কলিঃ, 1866]

এখন, প্রথম ভগ্নাংশ $=\frac{\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}}{\{(x+z)+y\}\{(x+z)-y\}}$

$$=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+z+y)(x+z-y)}=\frac{x+y-z}{x+y+z}.$$

এইরূপে, দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{(y+x-z)(y-x+z)}{(x+y+z)(x+y-z)}=\frac{y-x+z}{x+y+z},$

এবং তৃতীয় ভগ্নাংশ $=\frac{(z+x-y)(z-x+y)}{(y+z+x)(y+z-x)}=\frac{z+x-y}{x+y+z}.$

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= \frac{(x+y-z)+(y-x+z)+(z+x-y)}{x+y+z} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1.$

উদা. 5. $x+y+z=xyz$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{y+z}{1-yz}+\frac{z+x}{1-zx}+\frac{x+y}{1-xy}=\frac{y+z}{1-yz}\cdot\frac{z+x}{1-zx}\cdot\frac{x+y}{1-xy}.$$

যেহেতু $x+y+z=xyz,$

অতএব, $y+z=xyz-x=x(yz-1).$

সুতরাং, $\frac{y+z}{1-yz}=\frac{x(yz-1)}{1-yz}=-x.$

এইরূপে, $\frac{z+x}{1-zx}=-y$ এবং $\frac{x+y}{1-xy}=-z.$

$$\therefore \text{ বাম পক্ষ} = \frac{y+z}{1-yz}+\frac{z+x}{1-zx}+\frac{x+y}{1-xy}$$
$$=-x-y-z=-(x+y+z)=-xyz$$
$$=(-x).(-y).(-z)$$
$$=\frac{y+z}{1-yz}\cdot\frac{z+x}{1-zx}\cdot\frac{x+y}{1-xy}.$$

উদা. 6. দেখাও যে, $\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$

$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$ [কলিঃ, 1867]

এখন,

$$\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c^2}{a^2}+2+\frac{a^2}{c^2}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}\right)$$
$$=4+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{1}{a^2}\left(b^2+c^2\right)$$
$$=4+\frac{a^2}{bc}\left(\frac{bc}{b^2}+\frac{bc}{c^2}\right)+\frac{bc}{a^2}\left(\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{bc}\right)$$
$$=4+\frac{a^2}{bc}\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\frac{bc}{a^2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$$
$$=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{a^2}\right);$$

$$\therefore \text{ প্রদত্ত রাশি} = 4 + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\left\{\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a^2}{bc} + \frac{bc}{a^2}\right)\right\}$$

$$= 4 + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\left\{\left(\frac{b}{c} + \frac{bc}{a^2}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{a^2}{bc}\right)\right\}$$

$$= 4 + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\left\{\frac{b}{a}\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \frac{a}{b}\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\right\}$$

$$= 4 + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).$$

উদা. 7. $2s = a + b + c$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} = \frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

এখন, $\dfrac{1}{s-a} + \dfrac{1}{s-b} = \dfrac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)} = \dfrac{c}{(s-a)(s-b)}$,

এবং $\dfrac{1}{s-c} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{s-(s-c)}{s(s-c)} = \dfrac{c}{s(s-c)}$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{c}{(s-a)(s-b)} + \dfrac{c}{s(s-c)} = c.\dfrac{s(s-c)+(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= c.\frac{2s^2 - s(a+b+c) + ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad [\because 2s^2 - s(a+b+c) = 2s^2 - 2s^2 = 0.]$$

উদা. 8. দেখাও যে,

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2) + \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2) = 2(a+b+c).$$

$a^2 + b^2 + c^2$ এর পরিবর্তে $2s^2$ বসাইয়া,

$$a^2+b^2-c^2 = (a^2+b^2+c^2) - 2c^2 = 2(s^2-c^2),$$
$$b^2+c^2-a^2 = (a^2+b^2+c^2) - 2a^2 = 2(s^2-a^2),$$
$$c^2+a^2-b^2 = (a^2+b^2+c^2) - 2b^2 = 2(s^2-b^2).$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$= 2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)\left(s^2 - c^2\right) + 2\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)\left(s^2 - a^2\right) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)\left(s^2 - b^2\right)$$

$$= 2\left\{\frac{1}{a}\left(2s^2 - b^2 - c^2\right) + \frac{1}{b}\left(2s^2 - c^2 - a^2\right) + \frac{1}{c}\left(2s^2 - a^2 - b^2\right)\right\}$$

$$= 2\left\{\frac{1}{a}\cdot a^2 + \frac{1}{b}\cdot b^2 + \frac{1}{c}\cdot c^2\right\} = 2(a+b+c).$$

উদা. 9. দেখাও যে, $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2}{a^4-1}+\frac{a^4}{a^8-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^8+1}{a^8-1}\right)$.

$$\frac{a}{a^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{a^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+1)^2-(a^2+1)}{a^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^2+1}{a^2-1}\right);$$

$$\frac{a^2}{a^4-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a^2}{a^4-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2+1)^2-(a^4+1)}{a^4-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}-\frac{a^4+1}{a^4-1}\right)$$

$$\frac{a^4}{a^8-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a^4}{a^8-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^4+1)^2-(a^8+1)}{a^8-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a^4+1}{a^4-1}-\frac{a^8+1}{a^8-1}\right);$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^2+1}{a^2-1}\right)+\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}-\frac{a^4+1}{a^4-1}\right)+\left(\frac{a^4+1}{a^4-1}-\frac{a^8+1}{a^8-1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^8+1}{a^8-1}\right\}.$$

উদা. 10. দেখাও যে,

$$bc\cdot\frac{a+d}{(a-b)(a-c)}+ac\cdot\frac{b+d}{(b-a)(b-c)}+ab\cdot\frac{c+d}{(c-a)(c-b)}=d.$$

যেহেতু $b-a=-(a-b)$,

এবং $(c-a)(c-b)=[-(a-c)]\times[-(b-c)]=(a-c)(b-c)$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=bc\cdot\frac{a+d}{(a-b)(a-c)}+ac\cdot\frac{-(b+d)}{(a-b)(b-c)}+ab\cdot\frac{c+d}{(a-c)(b-c)}$

$$=\frac{bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)+ab(c+d)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

এখন, লব $=abc\{(b-c)-(a-c)+(a-b)\}$

$$+d\{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)\}$$

$$=d\{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)\}$$

$$=d\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$

$$=d(a-b)(a-c)(b-c).$$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $=d$.

উদা. 11. সরল কর :

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)(x+b)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}.$$

প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{-b^2}{(a-b)(b-c)(x+b)}+\frac{c^2}{(a-c)(b-c)(x+c)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)(x+b)(x+c)-b^2(a-c)(x+c)(x+a)+c^2(a-b)(x+a)(x+b)}{(a-b)(a-c)(b-c)(x+a)(x+b)(x+c)}$$

এখন, লব $=a^2(b-c)\{x^2+x(b+c)+bc\}+b^2(c-a)\{x^2+x(c+a)+ca\}$
$+c^2(a-b)\{x^2+x(a+b)+ab\}$

$=x^2\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$
$+x\{a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)\}$
$+abc\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$

$=x^2\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$

$=x^2(a-b)(a-c)(b-c).$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}.$

উদা. 12. সরল কর : $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1887]

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{-b^3}{(b-c)(a-b)}+\dfrac{c^3}{(a-c)(b-c)}$

$=\dfrac{a^3(b-c)-b^3(a-c)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$

এখন, লব $=a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$=(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c).$

অতএব, প্রদত্ত রাশি $=a+b+c.$

বিকল্প পদ্ধতি (Alternative Method) : *

যেহেতু $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}=\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{1}{(a-c)(b-c)}.$

∴ প্রদত্ত রাশি

$$=\left\{\frac{a^3}{(a-b)(b-c)}-\frac{a^3}{(a-c)(b-c)}\right\}+\frac{-b^3}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^3}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^3-b^3}{(a-b)(b-c)}-\frac{a^3-c^3}{(a-c)(b-c)}=\frac{a^2+ab+b^2}{b-c}-\frac{a^2+ac+c^2}{b-c}$$

$$=\frac{a(b-c)+(b^2-c^2)}{b-c}=a+b+c.$$

---

* এই পদ্ধতি আমার বন্ধু এবং প্রিয় ছাত্র বাবু বিমলাচরণ সোম (হেড্ এসিষ্ট্যাণ্ট, ফরেষ্ট সার্ভে, দেরাহুন) এর সৌজন্যে প্রাপ্ত।

উদা. 13. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab}=0$ হইলে,

প্রমাণ কর যে, $a=b=c$.

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab}=0,$$

অথবা, $$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\right\}=0.$$

[উদা. 13, নিয়ম 120]

এখন, যেহেতু বামদিকের পদগুলির কোনটিই ঋণরাশি নহে, অতএব, উহাদের প্রত্যেকটিরই মান শূন্য না হইলে উহাদের যোগফল শূন্য হইতে পারে না।

অতএব, $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0,\quad \therefore\ b=c,$

$\frac{1}{c}-\frac{1}{a}=0,\quad \therefore\ c=a,$

এবং $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0,\quad \therefore\ a=b.$

সুতরাং, $a=b=c$.

প্রশ্নমালা 70

1. প্রমাণ কর : $$\frac{a}{ax+x^2}+\frac{b}{bx+x^2}+\frac{c}{cx+x^2}$$
$$=\frac{3}{x}-\frac{1}{a+x}-\frac{1}{b+x}-\frac{1}{c+x}.$$ [বোম্বাই, 1920]

2. $yz+zx+xy=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=3.$$

3. $abc=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+(b+c)(c+a)(a+b).$$

4. $bc+ca+ab=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$$

5. $x+y+z=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x+yz}{(y+x)(z+x)}+\frac{y+zx}{(y+z)(y+x)}+\frac{z+xy}{(z+x)(z+y)}=3.$$

6. $x+y+z=xyz$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

7. $x+y+z=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)=9.$$

8. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}.$$

প্রমাণ কর (Prove that) :

9. $\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}=3.$

10. $\frac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3}=\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}.$

11. $\frac{x^6}{x^2+y^2}=x^4-x^2y^2+y^4-\frac{y^6}{x^2+y^2}.$

12. $\frac{x^6}{x^2-y^2}=x^4+x^2y^2+y^4+\frac{y^6}{x^2-y^2}.$

13. $\frac{x^2yz+xy^2z+xyz^2}{x^2y^2z^2}=\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}.$

14. $\frac{xy^2z^2+yz^2x^2+zx^2y^2}{x^2y^2z^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$

15. $\frac{3a-6}{(a-1)(a-2)(a-3)}=\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-1)}+\frac{1}{(a-1)(a-2)}.$

16. $\frac{3x^2-14}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{x-1}{(x+2)(x+3)}+\frac{x-2}{(x+3)(x+1)}+\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}.$

17. $\frac{1-x}{1+x}=1-2x+2x^2-2x^3+\frac{2x^4}{1+x}.$

18. $\frac{a}{x^2-a^2}=\frac{a}{x^2}+\frac{a^3}{x^4}+\frac{a^5}{x^6}+\frac{a^7}{x^6(x^2-a^2)}.$

19. $\dfrac{a^3}{x^3+a^3}=\dfrac{a^3}{x^3}-\dfrac{a^6}{x^6}+\dfrac{a^9}{x^9}-\dfrac{a^{12}}{x^9(x^3+a^3)}$

$$=1-\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^6}{a^6}-\frac{x^9}{a^9}+\frac{x^{12}}{a^9(x^3+a^3)}.$$

20. $\dfrac{x^4-1}{x+a}=x^3-ax^2+a^2x-a^3+\dfrac{a^4-1}{x+a}.$

21. $x=\dfrac{ab}{a+b}$ হইলে, $\dfrac{x+2a}{2b-x}+\dfrac{x-2a}{2b+x}+\dfrac{4ab}{x^2-4b^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

22. $x=\dfrac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}-3=\frac{6abc}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

23. $x=\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{a+2x}{a-2x}+\frac{b+2x}{b-2x}+\frac{c+2x}{c-2x}+3=\frac{6abc}{(a-2x)(b-2x)(c-2x)}.$$

24. $x=\dfrac{3abc}{ab+bc+ca}$ হইলে, $\dfrac{x^2-(b+c)x}{(x-b)(x-c)}+\dfrac{x^2-(c+a)x}{(x-c)(x-a)}+\dfrac{x^2-(a+b)x}{(x-a)(x-b)}$ এর মান নির্ণয় কর।

25. $x=\dfrac{a-b}{a+b}$ এবং $y=\dfrac{a+b}{a-b}$ হইলে, $\dfrac{x^2-y^2+x}{y^2-x^2+y}$ এর মান নির্ণয় কর।

[প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{x(x+1)-y^2}{y(y+1)-x^2}=$ ইত্যাদি।] [কলিঃ প্রবেশিকা, 1883]

26. $x^2=a^2+b^2$ হইলে,

$\dfrac{x^4+3abx^2-10a^2b^2}{x^4+7abx^2+10a^2b^2}\times\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

27. $x=a+b$ এবং $y=a-b$ হইলে,

$\dfrac{x^2y^2+3(2x^2-y^2)ab-18a^2b^2}{y^4+9aby^2+18a^2b^2}\times\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

28. $x=a+b$ এবং $y=a-b$ হইলে,

$\dfrac{x^4+abx^2-2a^2b^2}{x^2y^2+(x^2+2y^2)ab+2a^2b^2}-\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সরল কর (Simplify) :

29. $\dfrac{x^9}{x^3+1}+\dfrac{x^6}{x^3-1}+\dfrac{1}{x^3+1}-\dfrac{1}{x^3-1}.$

30. $\dfrac{x^2-(a-b)^2}{(x+b)^2-a^2}+\dfrac{a^2-(x-b)^2}{(x+a)^2-b^2}+\dfrac{b^2-(x-a)^2}{(a+b)^2-x^2}.$

31. $\dfrac{(a+2b)^2-b^2}{(a+b)^2-4b^2}+\dfrac{(a-b)^2-4b^2}{(a-2b)^2-b^2}+\dfrac{(2a+3b)^2-b^2}{(2a+b)^2-9b^2}.$

32. $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}.$

33. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2(s-a)(s-b)}{ab}.$$

সরল কর (Simplify) :

34. $\dfrac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\dfrac{a-b}{c^2-(a-b)^2}.$

35. $\dfrac{a+b}{2ab}(a+b-c)+\dfrac{b+c}{2bc}(b+c-a)+\dfrac{c+a}{2ca}(c+a-b).$

36. $\dfrac{x+y}{2xy}(x^2+y^2-z^2)+\dfrac{y+z}{2yz}(y^2+z^2-x^2)+\dfrac{z+x}{2zx}(z^2+x^2-y^2).$

37. $\dfrac{a+b}{2ab}(a^3+b^3-c^3)+\dfrac{b+c}{2bc}(b^3+c^3-a^3)+\dfrac{c+a}{2ca}(c^3+a^3-b^3).$

38. $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ca}$ এবং $z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ হইলে, $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$ এর মান লঘিষ্ঠ আকারে বিশ্লেষণ কর।

39. $p=\dfrac{a-b}{x-c}$, $q=\dfrac{b-c}{x-a}$, $r=\dfrac{c-a}{x-b}$ হইলে, $p+q+r+pqr$ এর মান নির্ণয় কর।

40. দেখাও যে, $\left(\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b}\right)^2=\dfrac{1}{(b-c)^2}+\dfrac{1}{(c-a)^2}+\dfrac{1}{(a-b)^2}.$

41. দেখাও যে, $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{4x^3}{1+x^4}+\dfrac{8x^7}{1+x^8}=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{16x^{15}}{1-x^{16}}.$

সরল কর (Simplify) :

42. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}.$

43. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$ [এলাহাবাদ, 1925]

44. $\dfrac{x^2+yz}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2+zx}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^2+xy}{(z-x)(z-y)}.$

45. $\dfrac{2a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{2b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{2c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

46. $\dfrac{x^2-yz}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2+zx}{(y+z)(y-x)}+\dfrac{z^2+xy}{(z-x)(x+y)}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1865]

47. $\dfrac{1}{x(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{y(y-x)(y-z)}+\dfrac{1}{z(z-x)(z-y)}$.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1872]

48. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

49. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

50. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

51. $\dfrac{a^2+ha+k}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b^2+hb+k}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\dfrac{c^2+hc+k}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

52. দেখাও যে, $\dfrac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=a+b+c.$

53. দেখাও যে, $\dfrac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}=ab+bc+ca.$

54. দেখাও যে,

$$\frac{a(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$$

55. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{ac}{b(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\frac{ab}{c(c^2-b^2)(c^2-a^2)}=\frac{1}{abc}.$$

56. সরল কর : $\dfrac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(x-b)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}$.

দ্বাবিংশ অধ্যায়

I. সরল সমীকরণের বিস্তৃত আলোচনা (Fuller treatment of Simple Equations)

এবং

II. দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সহজ সহ-সমীকরণ (Easy Simultaneous Equations involving two unknowns)

I. (a) সরল সমীকরণ (সহজ)

150. সহজ 'সরল সমীকরণ' সমাধান করার প্রণালী ষষ্ঠ ও পঞ্চদশ অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে। বর্ত্তমানে ঐ সকল বিষয় আরও বিশদভাবে আলোচিত হইবে।

পূর্ব্বে দেখান হইয়াছে যে, সমীকরণ সমাধান করার পদ্ধতি প্রধানতঃ কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধের উপর নির্ভর করে। সেইগুলি হইতে স্পষ্টই বুঝা গিয়াছে যে, সমীকরণের কোন পরিবর্ত্তন হয় না,

(i) যদি সমীকরণস্থিত কোন পদকে যথানিয়মে পক্ষান্তর করা হয় ;

এবং (ii) যদি সমীকরণের উভয় পক্ষকেই যে কোন একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করা হয়।

কাজেই, 'একটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট' সমীকরণের সমাধান-প্রণালী নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায় :

(1) সমীকরণের প্রত্যেক পক্ষকে প্রক্রিয়াচিহ্নানুসারে পৃথক্ পৃথক্‌ভাবে সরল কর।

(2) অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সকল পদগুলিকে সমতাচিহ্নের বামদিকে এবং অন্যান্য সকল পদগুলিকে সমতাচিহ্নের ডা'নদিকে পক্ষান্তর কর।

(3) পুনরায় প্রত্যেক পক্ষকে পৃথক্‌ভাবে সরল কর।

(4) সর্ব্বশেষে, উভয় পক্ষকে অজ্ঞাত রাশির সহগ দ্বারা ভাগ কর।

তাহা হইলেই, অজ্ঞাত রাশির নির্ণেয় মান পাওয়া যাইবে।

টীকা। উপরিউক্ত উপায়ে নির্ণীত মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় কি না, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই তাহা পরীক্ষা করিয়া দেখা উচিত।

উদা. 1. $(6x+9)^2+(8x-7)^2=(10x+3)^2-71.$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1882]

বাম পক্ষ $=(36x^2+108x+81)+(64x^2-112x+49)$

$=100x^2-4x+130$;

এবং ডা'ন পক্ষ $=(100x^2+60x+9)-71$

$=100x^2+60x-62.$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নলিখিত সমীকরণে পরিণত হইল :

$$100x^2-4x+130=100x^2+60x-62.$$

এখন, উভয় পক্ষ হইতেই $100x^2$ অপসারিত করিয়া,

$$-4x+130=60x-62.$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $-4x-60x=-130-62,$

অথবা, $-64x=-192$;

এখন, উভয় পক্ষকেই -64 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$x=3.$$

অতএব, নির্ণেয় মূল $=3.$

উদা. 2. $\dfrac{x-6}{8}-\dfrac{2x-15}{9}+1=\dfrac{x}{15}-\dfrac{x-12}{6}$ হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

এখন হরগুলির ল. সা. গু. $8\times9\times5$ অর্থাৎ 360 দ্বারা উভয় পক্ষকেই গুণ করিয়া,

$$\frac{360(x-6)}{8}-\frac{360(2x-15)}{9}+360=\frac{360x}{15}-\frac{360(x-12)}{6},$$

অথবা, $45(x-6)-40(2x-15)+360=24x-60(x-12),$

অথবা, $45x-270-80x+600+360=24x-60x+720,$

অথবা, $-35x+690=-36x+720.$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $-35x+36x=720-690,$

অথবা, $x=30.$

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{1}{3}\{4a(1+x)-\frac{9}{4}(a-x)\}=\frac{1}{4}\{3a(1-x)-\frac{16}{3}(a+x)\}.$

বাম পক্ষ $=\dfrac{4a}{3}(1+x)-\dfrac{3}{4}(a-x)=\left(\dfrac{4a}{3}-\dfrac{3a}{4}\right)+\left(\dfrac{4a}{3}+\dfrac{3}{4}\right)x$

$=\dfrac{7a}{12}+\dfrac{16a+9}{12}\cdot x$;

এবং ডা'ন পক্ষ $= \frac{3a}{4}(1-x) - \frac{4}{3}(a+x) = \left(\frac{3a}{4} - \frac{4a}{3}\right) - \left(\frac{3a}{4} + \frac{4}{3}\right)x$

$$= -\frac{7a}{12} - \frac{9a+16}{12} \cdot x.$$

অতএব, সমীকরণটি এইরূপ দাঁড়াইল :

$$\frac{7a}{12} + \frac{16a+9}{12} \cdot x = -\frac{7a}{12} - \frac{9a+16}{12} \cdot x.$$

উভয় পক্ষকেই 12 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$7a + (16a+9)x = -7a - (9a+16)x.$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$$\{(16a+9) + (9a+16)\}x = -14a,$$

অথবা, $25(a+1)x = -14a$;

অতএব, এখন উভয় পক্ষকেই $25(a+1)$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$x = \frac{-14a}{25(a+1)}$$; ইহাই নির্ণেয় মূল।

উদা. 4. $\frac{x}{a+b} + 1 = \frac{x}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$ হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

এখন, হরগুলির ল. সা. গু. $a^2 - b^2$ দ্বারা উভয় পক্ষকেই গুণ করিয়া,

$$(a-b)x + (a^2 - b^2) = (a+b)x + (a-b)^2.$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$$(a-b)x - (a+b)x = (a-b)^2 - (a^2 - b^2),$$

অথবা, $\{(a-b) - (a+b)\}x = -2ab + 2b^2$,

অথবা, $-2bx = -2b(a-b)$.

সুতরাং, উভয় পক্ষকেই $-2b$ দ্বারা ভাগ করিয়া, $x = a - b$.

প্রশ্নমালা 71

x এর মান নির্ণয় কর (Find the value of x) :

1. $3(x-4)^2 + 5(x-3)^2 = (2x-5)(4x-1) + 24.$
2. $(12x+9)^2 + (5x+3)^2 = (13x+9)^2 + 33.$
3. $5(x+1)^2 + 7(x+3)^2 = 12(x+2)^2.$

4. $(3x-14)^2+(4x-19)^2-(5x-23)^2=22.$

5. $(5x-8)^2+(12x-7)^2=(13x-10)^2+37.$

6. $(x-1)^3+(x+1)^3=2x(x^2-1)+4.$

7. $(x-2)^3+2x^3+(x+2)^3=4x^2(x+2).$

8. $(x+2)(x+3)(x+4)+96=x^2(x+9)+5(3x+13).$

9. $3(x^2-14)=(x+1)^2+(x-2)^2+(x-5)^2.$

10. $a(x-a)=b(x-b).$ 11. $3(x-a)+5(2x-3a)=8a.$

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

12. $(x+a)(x+b)-(a+b)^2=(x-a)(x-b).$

13. $a^2(x-a)+b^2(x-b)=abx.$

14. $m^2(x-m)+n^2(x+n)+mnx=0.$

15. $b(x-2a)+a(x-2b)=(a-b)^2.$

16. $a(4x-a)+b(4x-b)-2ab=0.$

17. $x(x-a)+x(x-b)-2(x-a)(x-b)=0.$

18. $(x+3a)(x-3b)+3(x-3a)(x+3b)=4(x-3a)(x-3b).$

19. $(2b+2c-x)^2+(2b-2c+x)^2=(2b+2d-x)^2+(2b-2d+x)^2.$

20. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c).$

21. $(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3=3(x+a)(x+b)(x+c).$

22. $\frac{x}{a}+a=\frac{x}{b}+b.$ 23. $\frac{a}{bx}-\frac{b}{ax}=a^2-b^2.$

24. $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}(x+2)+\frac{1}{4}(x+3)=16.$

25. $\frac{x-6}{5}+\frac{x-4}{3}=8-\frac{x-2}{7}.$ 26. $\frac{x}{10}+\frac{2x-13}{9}=8-\frac{4x-35}{15}.$

27. $\frac{x+7}{2}+\frac{x+13}{5}+\frac{x+17}{7}=\frac{x+27}{4}.$

28. $6\frac{1}{3}-\frac{x-7}{3}=\frac{4x-2}{5}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1861]

29. $\frac{x-1}{3}-\frac{x-9}{2}+\frac{3x-2(x-2)}{7}=4\frac{1}{2}.$

30. $\frac{2x-9}{27}+\frac{x}{18}-\frac{x-3}{4}=8\frac{1}{3}-x.$ 31. $\frac{9x+7}{2}-\left(x-\frac{x-2}{7}\right)=36.$

32. $\frac{7x+9}{4}-\left(x-\frac{2x-1}{9}\right)=7.$ 33. $\frac{x+7}{3}-5\frac{3}{4}=\frac{2x+5}{7}+\frac{10-5x}{8}.$

34. $x-\left(3x-\frac{2x-5}{10}\right)=\frac{1}{6}\left(2x-57\right)-\frac{5}{3}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889]

35. $\frac{4x-21}{7}+7\frac{5}{6}+\frac{7x-28}{3}=x+3\frac{3}{4}-\frac{9-7x}{8}+\frac{1}{12}.$

36. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{a}{5}\right)=0.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1866]

37. $\frac{x-3}{7}-\frac{\frac{1}{2}x-3}{3}=\frac{\frac{1}{6}x+2}{2}-\frac{x-6}{3}+\frac{x}{8}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1866]

38. $\frac{1}{8}(x-2)-\frac{1}{7}(x-4)=\frac{1}{12}(2x-3)-2\frac{3}{4}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1869]

39. $\frac{a-x}{a}+\frac{2a-x}{2a}=\frac{3a-x}{3a}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1870]

40. $\frac{2x-13}{9}-\frac{x-1}{11}=\frac{x}{8}+\frac{x}{7}-9.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1876]

41. $\frac{2x-3}{6}+\frac{3x-8}{11}=\frac{4x+15}{33}+\frac{1}{2}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1877]

42. $\frac{4x+3}{9}+\frac{13x}{108}=\frac{8x+19}{18}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1878]

43. $\frac{x^2-2\frac{1}{2}}{4}-\frac{x-3\frac{1}{2}}{5}=\frac{2x^2-3}{8}-\frac{x-5\frac{1}{2}}{3}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1883]

44. $\frac{a-x^2}{bx}-\frac{b-x}{c}=\frac{c-x}{b}-\frac{b-x^2}{cx}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1886]

45. $\frac{x+2\frac{1}{2}}{15}+\frac{x+3\frac{1}{3}}{25}=\frac{x+4\frac{1}{6}}{55}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1888]

46. $\frac{11x-13}{25}+\frac{19x+3}{7}-\frac{5x-25\frac{1}{3}}{4}=28\frac{1}{7}-\frac{17x+4}{21}.$

47. $\frac{x-1\frac{25}{26}}{2}-\frac{2-6x}{13}=x-\frac{5x-\frac{1}{4}(10-3x)}{39}.$

48. $\frac{3x-\frac{2}{3}(1+x)}{4}+\frac{1-\frac{1}{5}x}{5\frac{1}{2}}=\frac{2\frac{2}{5}+\frac{1}{25}(x-1)}{2\frac{1}{5}}.$

49. $\frac{1}{3}(x-a)-\frac{1}{5}(2x-3b)-\frac{1}{2}(a-x)=10a+11b.$

50. $\frac{2x+a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}.$

51. $\frac{2x+1}{29}-\frac{402-3x}{12}=9-\frac{471-6x}{2}.$

52. $\frac{15-\frac{2}{3}x}{5}-\frac{2x+5}{2\frac{1}{2}}=\frac{17-\frac{14}{3}x}{3}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1874]

151. দশমিক-ভগ্নাংশবিশিষ্ট সমীকরণ : আবশ্যক হইলে, দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া সমীকরণ সমাধান করা যাইতে পারে।

উদা. 1. সমাধান কর : $\frac{x-2}{\cdot0\dot{5}} - \frac{x-4}{\cdot0625} = 56.$

যেহেতু $\cdot0\dot{5} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ এবং $\cdot0625 = \frac{625}{10000} = \frac{1}{16}$,

অতএব, $\frac{x-2}{\frac{1}{18}} - \frac{x-4}{\frac{1}{16}} = 56,$

অথবা, $18(x-2) - 16(x-4) = 56,$ অথবা, $2x + 28 = 56$;

$\therefore \quad 2x = 28,$ অথবা, $x = 14.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\cdot65x + \frac{\cdot585x - \cdot975}{\cdot6} = \frac{1\cdot56}{\cdot2} - \frac{\cdot39x - \cdot78}{\cdot9}.$

যেহেতু $\frac{\cdot585x - \cdot975}{\cdot6} = \frac{5\cdot85x - 9\cdot75}{6} = \frac{1\cdot95x - 3\cdot25}{2}$;

$\frac{1\cdot56}{\cdot2} = \frac{15\cdot6}{2} = 7\cdot8$; এবং $\frac{\cdot39x - \cdot78}{\cdot9} = \frac{3\cdot9x - 7\cdot8}{9} = \frac{1\cdot3x - 2\cdot6}{3}$;

অতএব, সমীকরণটি এইরূপ দাঁড়াইল :

$$\cdot65x + \frac{1\cdot95x - 3\cdot25}{2} = 7\cdot8 - \frac{1\cdot3x - 2\cdot6}{3}.$$

অতএব, উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$3\cdot9x + (5\cdot85x - 9\cdot75) = 46\cdot8 - (2\cdot6x - 5\cdot2).$$

পক্ষান্তর করিয়া, $(3\cdot9 + 5\cdot85 + 2\cdot6)x = 46\cdot8 + 5\cdot2 + 9\cdot75,$

অথবা, $12\cdot35x = 61\cdot75$;

$$\therefore \quad x = \frac{61\cdot75}{12\cdot35} = 5.$$

প্রশ্নমালা 72

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $\cdot5x - \cdot\dot{2}x = \cdot\dot{3}x - 1\cdot5.$

2. $3\cdot75x + \cdot5 = 2\cdot25x + 8.$

3. $1\cdot2x - \frac{\cdot18x - \cdot05}{\cdot5} = \cdot4x + 8\cdot9.$

4. $\frac{x + \cdot75}{\cdot125} - \frac{x - \cdot25}{\cdot25} = 15.$

5. $\frac{x}{\cdot5} - \frac{1}{\cdot05} + \frac{x}{\cdot005} - \frac{1}{\cdot0005} = 0.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1883]

6. $\cdot 5x + \dfrac{\cdot 45x - \cdot 75}{\cdot 6} = \dfrac{1\cdot 2}{\cdot 2} - \dfrac{\cdot 3x - \cdot 6}{\cdot 9}$. 7. $\cdot 7x + \cdot\dot{4} = \cdot 6\dot{7}x + \cdot\dot{5}$.

8. $\cdot 15x + \dfrac{\cdot 135x - \cdot 225}{\cdot 6} = \dfrac{\cdot 36}{\cdot 2} - \dfrac{\cdot 09x - \cdot 18}{\cdot 9}$.

9. $\cdot 5x + \dfrac{\cdot 02x + \cdot 07}{\cdot 03} - \dfrac{x+2}{9} = 9\cdot 5$.

10. $\cdot 011x + \dfrac{\cdot 001x - \cdot 125}{\cdot 6} = \dfrac{5-x}{\cdot 03} - \cdot 145$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1886]

152. সুবিধামত 'পদ-সংযোগ' ও 'পক্ষান্তরকরণ' প্রক্রিয়া দ্বারা সমীকরণ সমাধান :

উদা. 1. সমাধান কর : $\dfrac{23x-29}{12} + \dfrac{19x+13}{7} = \dfrac{97x+72\frac{1}{2}}{35} + \dfrac{7x-8\frac{1}{3}}{4}$.

এখন, পক্ষান্তর করিয়া,

$$\frac{23x-29}{12} - \frac{7x-8\frac{1}{3}}{4} = \frac{97x+72\frac{1}{2}}{35} - \frac{19x+13}{7},$$

অথবা, $$\frac{(23x-29)-(21x-25)}{12} = \frac{(97x+72\frac{1}{2})-(95x+65)}{35},$$

অথবা, $$\frac{x-2}{6} = \frac{2x+7\frac{1}{2}}{35}.$$

এখন, উভয় পক্ষকেই 6×35 দ্বারা গুণ করিয়া,

$35x - 70 = 12x + 45$ পাওয়া গেল।

সুতরাং, $23x = 115$; অথবা, $x = 5$.

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{x-a(b+c)}{bc} + \dfrac{x-b(c+a)}{ca} + \dfrac{x-c(a+b)}{ab} = 3$.

সমীকরণটিকে নিম্নলিখিতরূপে লেখা যাইতে পারে ; যথা,

$$\frac{x-a(b+c)}{bc} + \frac{x-b(c+a)}{ca} + \frac{x-c(a+b)}{ab} = 1+1+1.$$

এখন, পক্ষান্তর করিয়া,

$$\left\{\frac{x-a(b+c)}{bc} - 1\right\} + \left\{\frac{x-b(c+a)}{ca} - 1\right\} + \left\{\frac{x-c(a+b)}{ab} - 1\right\} = 0 ;$$

অথবা, $$\frac{x-a(b+c)-bc}{bc} + \frac{x-b(c+a)-ca}{ca} + \frac{x-c(a+b)-ab}{ab} = 0 ;$$

অথবা, $\dfrac{x-(ab+ac+bc)}{bc}+\dfrac{x-(ca+cb+ab)}{ca}+\dfrac{x-(ca+cb+ab)}{ab}=0$;

অথবা, $\left\{x-(ab+bc+ca)\right\}\left\{\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}\right\}=0.$

$\therefore\quad x-(ab+bc+ca)=0.$

অতএব, $x=ab+bc+ca.$

প্রশ্নমালা 73

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $\dfrac{5x+6}{4}+\dfrac{64x-35}{15}=\dfrac{20x+23}{16}+\dfrac{13x-7}{3}.$

2. $\dfrac{17x-13}{9}+\dfrac{108x+75}{32}=\dfrac{27x+19}{8}+\dfrac{50\frac{7}{16}x-39}{27}.$

3. $\dfrac{29x-18}{8}+\dfrac{189x-93}{49}=\dfrac{86\frac{13}{21}x-54}{24}+\dfrac{27x-13}{7}.$

4. $\dfrac{16x-17}{9}-\dfrac{23x-15}{16}=\dfrac{142\frac{7}{16}x-153}{81}-\dfrac{92x-65}{64}.$

5. $\dfrac{18x-19}{7}+\dfrac{135x+62\frac{1}{2}}{65}=\dfrac{27x+14}{13}+\dfrac{106\frac{5}{13}x-114}{42}.$

6. $\dfrac{33-19x}{15}-\dfrac{41+27x}{28}+\dfrac{164+107\frac{11}{15}x}{112}-\dfrac{164\frac{13}{28}-95x}{75}=0.$

7. $\dfrac{18-41x}{9}-\dfrac{17-16x}{8}+\dfrac{9\frac{16}{21}-10x}{5}-\dfrac{14-32x}{7}=0.$

8. $\dfrac{x-a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{x-b^2}{c^2+a^2}+\dfrac{x-c^2}{a^2+b^2}=3.$

9. $\dfrac{3x-bc}{b+c}+\dfrac{3x-ca}{c+a}+\dfrac{3x-ab}{a+b}=a+b+c.$

10. $\dfrac{ax-b^2+c^2}{c-b}+\dfrac{bx-c^2+a^2}{a-c}+\dfrac{cx-a^2+b^2}{b-a}=2(a+b+c).$

11. $\dfrac{x-(b^3+c^3)}{a^2-3bc}+\dfrac{x-(c^3+a^3)}{b^2-3ca}+\dfrac{x-(a^3+b^3)}{c^2-3ab}=a+b+c.$

12. $\dfrac{p^2x+(l^3+m^3)}{l^2-lm+m^2}+\dfrac{q^2x+(m^3+n^3)}{m^2-mn+n^2}+\dfrac{r^2x+(n^3+l^3)}{n^2-ln+l^2}=2(l+m+n).$

I. (b) সরল সমীকরণ (জটিলতর)
[Simple Equations (Harder set)]

153. সুবিধাজনকভাবে পদসংযোগ ও পক্ষান্তর-করণ দ্বারা সমীকরণ-সমাধান :

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দৃষ্টান্তস্বরূপ সন্নিবেশিত হইল।

উদা. 1. সমাধান কর : $4(x+1)^2+9(x+2)^2=13(x+3)^2$.

উভয় পক্ষকে সরল করিয়া,

$$4(x^2+2x+1)+9(x^2+4x+4)=13(x^2+6x+9),$$

অথবা, $13x^2+44x+40=13x^2+78x+117$;

অথবা, $13x^2+44x-13x^2-78x=117-40$, [পক্ষান্তর করিয়া]

অর্থাৎ, $-34x=77$; $\therefore\ x=-\frac{77}{34}=-2\frac{9}{34}$.

উদা. 2. সমাধান কর : $(x-2)^3+(x-6)^3+(x-10)^3$
$=3(x-2)(x-6)(x-10)$.

এখন, পক্ষান্তর করিয়া,

$$(x-2)^3+(x-6)^3+(x-10)^3-3(x-2)(x-6)(x-10)=0 ;$$

অথবা, $\frac{1}{2}\{(x-2)+(x-6)+(x-10)\}[\{(x-6)-(x-10)\}^2$
$+\{(x-10)-(x-2)\}^2+\{(x-2)-(x-6)\}^2]=0$;

[বাম পক্ষকে, নিয়ম 121 দ্বারা, উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া]

অথবা, $\frac{1}{2}(3x-18)\{(10-6)^2+(-10+2)^2+(-2+6)^2\}=0$;

অথবা, $\frac{1}{2}(3x-18).96=0$; $\therefore\ 3x-18=0$; অথবা, $x=6$.

154. ভগ্নাংশ-সমন্বিত সমীকরণ :

উদা. 1. সমাধান কর : $\dfrac{7x-11}{6}=\dfrac{31x-41}{24}-\dfrac{7x^2-4}{56x-47}$.

এখন, পক্ষান্তর করিয়া, $\dfrac{7x^2-4}{56x-47}=\dfrac{31x-41}{24}-\dfrac{7x-11}{6}$

$$=\frac{(31x-41)-(28x-44)}{24}=\frac{3(x+1)}{24}=\frac{x+1}{8}.$$

উভয় পক্ষকে $8(56x-47)$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$8(7x^2-4)=(x+1)(56x-47),$$

অথবা, $56x^2-32=56x^2+9x-47$; $\therefore$, $-32=9x-47.$

স্থতরাং, $9x=-32+47=15$; $\therefore$ $x=\frac{15}{9}=1\frac{2}{3}.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{25-\frac{1}{3}x}{x+1}+\dfrac{16x+4\frac{1}{5}}{3x+2}=\dfrac{23}{x+1}+5.$

পক্ষান্তর করিয়া,

$$\frac{16x+4\frac{1}{5}}{3x+2}-5=\frac{23}{x+1}-\frac{25-\frac{1}{3}x}{x+1}, \quad \text{অথবা,} \quad \frac{x-5\frac{4}{5}}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}x-2}{x+1}.$$

অতএব, $(x-5\frac{4}{5})(x+1)=(\frac{1}{3}x-2)(3x+2),$

অথবা, $x^2-(4\frac{4}{5})x-5\frac{4}{5}=x^2-(5\frac{1}{3})x-4.$

স্থতরাং, $(5\frac{1}{3}-4\frac{4}{5})x=5\frac{4}{5}-4,$

অথবা, $\frac{8}{15}x=1\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$; $\therefore$ $x=\frac{9}{5}\times\frac{15}{8}=\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}.$

উদা. 3. সমাধান কর : $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{5}{x-6}=\dfrac{8}{x+3}.$

যেহেতু $$\frac{8}{x+3}=\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x+3},$$

অতএব, $$\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-6}=\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x+3}.$$

স্থতরাং, পক্ষান্তর করিয়া, $$\frac{3}{x-2}-\frac{3}{x+3}=\frac{5}{x+3}-\frac{5}{x-6},$$

অথবা, $$\frac{15}{(x-2)(x+3)}=\frac{-45}{(x+3)(x-6)}.$$

উভয় পক্ষকেই $x+3$ দ্বারা গুণ এবং 15 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{1}{x-2}=\frac{-3}{x-6}.$$

স্থতরাং, $x-6=-3(x-2)$; $\therefore$ $4x=12$, অথবা, $x=3.$

উদা. 4. সমাধান কর : $\dfrac{8}{2x-1}+\dfrac{9}{3x-1}=\dfrac{7}{x+1}.$

এখন, $$\frac{8}{2x-1}+\frac{9}{3x-1}=\frac{4}{x+1}+\frac{3}{x+1}.$$

অতএব, $\left\{\frac{8}{2x-1}-\frac{4}{x+1}\right\}+\left\{\frac{9}{3x-1}-\frac{3}{x+1}\right\}=0$; [পক্ষান্তর করিয়া]

অথবা, $\frac{12}{(2x-1)(x+1)}+\frac{12}{(3x-1)(x+1)}=0.$

সুতরাং, $\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{3x-1}=0.$

উভয় পক্ষকেই $(2x-1)(3x-1)$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$(3x-1)+(2x-1)=0.$$

$$\therefore\quad 5x=2, \quad \text{অথবা,} \quad x=\tfrac{2}{5}.$$

উদা. 5. সমাধান কর : $\frac{a-c}{2b+x}+\frac{b-c}{2a+x}=\frac{a+b-2c}{a+b+x}.$

এখন, $\frac{a-c}{2b+x}+\frac{b-c}{2a+x}=\frac{(a-c)+(b-c)}{a+b+x}=\frac{a-c}{a+b+x}+\frac{b-c}{a+b+x}.$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$$(a-c)\left\{\frac{1}{2b+x}-\frac{1}{a+b+x}\right\}=(b-c)\left\{\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{2a+x}\right\},$$

অথবা, $(a-c)\cdot\frac{a-b}{(2b+x)(a+b+x)}=(b-c)\cdot\frac{a-b}{(a+b+x)(2a+x)}.$

সুতরাং, $\frac{a-c}{2b+x}=\frac{b-c}{2a+x}$;

$$\therefore\quad (a-c)(2a+x)=(b-c)(2b+x) \text{ ;}$$

$$\therefore\quad x\{(a-c)-(b-c)\}=2b(b-c)-2a(a-c),$$

অথবা, $x(a-b)=2(b^2-a^2)-2c(b-a)$

$$=2(b-a)(b+a-c)$$

$$=2(a-b)(c-a-b) \text{ ;}$$

$$\therefore\quad x=2(c-a-b).$$

প্রশ্নমালা 74

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $3(x+1)^2+4(x+3)^2=7(x+2)^2.$
2. $(x-a)(x-b)=(x-a-b)^2.$
3. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c).$

4. $(x+a)^2+(x+b)^2+(x+c)^2=(x-2a)^2+(x-2b)^2+(x-2c)^2$.

5. $\frac{98x-73}{21}=\frac{14x-9}{3}-\frac{13x-16}{15x-9}$.

6. $\frac{95x-159}{35}=\frac{19x-29}{7}-\frac{17x-47}{23x-59}$.

7. $\frac{91x-21}{56}+\frac{24x-93}{35x-138}=\frac{13x+9}{8}$.

8. $\frac{117x-26}{135}+\frac{16x-77}{23x-110}=\frac{13x+4}{15}+\frac{3\frac{4}{5}}{27}$.

9. $\frac{6x-7\frac{1}{3}}{13-2x}+2x+\frac{1+16x}{24}=4\frac{5}{12}-\frac{12\frac{5}{8}-8x}{3}$.

10. $\frac{2x+8\frac{1}{2}}{9}-\frac{13x-2}{17x-32}+\frac{x}{3}=\frac{7x}{12}-\frac{x+16}{36}$.

11. $\frac{41-35x}{105}-\frac{7-2x^2}{14(x-1)}=\frac{1+3x}{21}-\frac{2x-2\frac{1}{5}}{6}$.

12. $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+7}=\frac{1}{7(x-1)}$.

13. $\frac{2}{5(3x+4)}+\frac{4}{2x+3}=\frac{6}{3x+4}$.

14. $\frac{3}{3x-5}-\frac{6}{7(4x-7)}=\frac{7}{9(3x-5)}+\frac{2}{4x-7}$.

15. $\frac{11}{12(14x-19)}+\frac{7}{9(13x-14)}=\frac{3}{14x-19}-\frac{2}{13x-14}$.

16. $\frac{50}{3x-1}+\frac{37-\frac{1}{3}x}{12x-1}=\frac{35}{12x-1}+\frac{49-\frac{1}{12}x}{3x-1}$.

17. $\frac{(1\frac{3}{7})x+19\frac{13}{17}}{2x+5}-\frac{\frac{7}{9}x+8}{x+8}=\frac{20\frac{13}{17}-(1\frac{4}{7})x}{2x+5}+\frac{(1\frac{4}{9})x-9}{2(x+8)}$.

18. $\frac{(9\frac{12}{25})x-32}{4x+7}+\frac{65x+4\frac{14}{25}}{8x+29}=\frac{75x+5\frac{14}{25}}{8x+29}+\frac{(4\frac{12}{25})x-29}{4x+7}$.

19. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$.

20. $\frac{3}{4x+1}+\frac{4}{4x+5}=\frac{7}{4x+3}$.

21. $\frac{15}{3x+11}-\frac{8}{3x+17}=\frac{7}{3x+5}$.

22. $\frac{6}{5x+7}-\frac{4}{5x+13}=\frac{9}{5x+13}-\frac{7}{5x+19}$.

23. $\frac{8}{2x+17}-\frac{12}{2x+25}=\frac{5}{2x+25}-\frac{9}{2x+33}$.

24. $\frac{5}{3-4x}+\frac{9}{4x+13}-\frac{4}{4x+5}=0.$

25. $\frac{6}{5-6x}+\frac{13}{6x+19}=\frac{7}{6x+7}.$ 26. $\frac{9}{3-7x}+\frac{1}{7x+15}=\frac{8}{12-7x}.$

27. $\frac{10}{2x-5}+\frac{1}{x+5}=\frac{18}{3x-5}.$ 28. $\frac{9}{3x-4}+\frac{20}{4x+1}=\frac{8}{x+7}.$

29. $\frac{12}{3x-8}=\frac{20}{4x-13}-\frac{1}{x+9}.$ 30. $\frac{a+b}{x-c}=\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}.$

31. $\frac{a^2}{ax-b}+\frac{b^2}{bx-a}=\frac{a+b}{x+c}.$ 32. $\frac{m(x+a)}{x+b}+\frac{n(x+b)}{x+a}=m+n.$

33. $\frac{b-c}{x+a}+\frac{a-b}{x+b}=\frac{a-c}{x+c}.$ 34. $\frac{2a-3b}{x-a+b}-\frac{2b-3a}{x+a-b}=\frac{5(a-b)}{x+a+b}.$

35. $\frac{1}{x-6a}+\frac{2}{x+3a}+\frac{3}{x-2a}=\frac{6}{x-a}.$

155. ভগ্নাংশবিশিষ্ট সমীকরণে প্রত্যেক পদের লবকে উহার হর দ্বারা ভাগ করিয়া অতি সহজে সমীকরণের সমাধান করা যাইতে পারে।

উদা. 1. সমাধান কর : $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{22x+30}{11x-18}.$

এখন, $\frac{(x-1)+2}{x-1}+\frac{(x-2)+4}{x-2}=\frac{2(11x-18)+66}{11x-18},$

অথবা, $\left\{1+\frac{2}{x-1}\right\}+\left\{1+\frac{4}{x-2}\right\}=2+\frac{66}{11x-18}.$

অথবা, $\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x-2}=\frac{66}{11x-18}.$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $\frac{2}{x-1}-\frac{22}{11x-18}=\frac{44}{11x-18}-\frac{4}{x-2},$

অথবা, $\frac{-14}{(x-1)(11x-18)}=\frac{-16}{(11x-18)(x-2)},$

$\therefore \quad \frac{7}{x-1}=\frac{8}{x-2},$

অথবা, $7x-14=8x-8$; $\therefore\ x=-6.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{4x^2+7}{2x-1}+\dfrac{6x^2-8x+11}{3x-1}=\dfrac{4x^2+3x+6}{x+1}.$

এখন, $$\frac{(4x^2-1)+8}{2x-1}+\frac{2x(3x-1)-2(3x-1)+9}{3x-1}$$
$$=\frac{4x(x+1)-(x+1)+7}{x+1},$$

অথবা, $$\left\{2x+1+\frac{8}{2x-1}\right\}+\left\{2x-2+\frac{9}{3x-1}\right\}=4x-1+\frac{7}{x+1}.$$

সুতরাং, $$\frac{8}{2x-1}+\frac{9}{3x-1}=\frac{7}{x+1}.$$

পরবর্ত্তী অংশের জন্য ছাত্রগণকে 154 নিয়মের উদা. 4 দেখিতে নির্দ্দেশ দেওয়া যাইতেছে।

উদা. 3. সমাধান কর : $\dfrac{7x-55}{x-8}+\dfrac{2x-17}{x-9}=\dfrac{6x-71}{x-12}+\dfrac{3x-14}{x-5}.$

এখন, $$\frac{7(x-8)+1}{x-8}+\frac{2(x-9)+1}{x-9}=\frac{6(x-12)+1}{x-12}+\frac{3(x-5)+1}{x-5},$$

অথবা, $$\left\{7+\frac{1}{x-8}\right\}+\left\{2+\frac{1}{x-9}\right\}=\left\{6+\frac{1}{x-12}\right\}+\left\{3+\frac{1}{x-5}\right\};$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{x-12}+\frac{1}{x-5}.$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $$\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-12}-\frac{1}{x-9},$$

অথবা, $$\frac{3}{(x-8)(x-5)}=\frac{3}{(x-12)(x-9)};$$

$$\therefore\quad (x-8)(x-5)=(x-12)(x-9),$$

অথবা, $$x^2-13x+40=x^2-21x+108;$$

$\therefore$ $8x=68$, বা $x=8\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা 75

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $\dfrac{2x-1}{x-1}+\dfrac{3x-4}{x-2}=\dfrac{5x-12}{x-3}.$

2. $\dfrac{2x+7}{x+2}+\dfrac{4x+29}{x+6}-\dfrac{6x-10}{x-3}=0.$

3. $\dfrac{25x-40}{5x-6}-\dfrac{7x+9}{x+2}+\dfrac{6x-1}{3x+4}=0.$

4. $2+\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{2+\dfrac{x}{2}}}=\dfrac{7}{3}.$

5. $8+\dfrac{2}{3+\dfrac{4}{5+\dfrac{6}{x+2}}}=\dfrac{214}{25}.$

[নিয়ম 146 এর উদা. 3 দেখ]

6. $2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{2x+7}{2+x}.$

7. $\dfrac{15x-7}{5x-4}+\dfrac{4x+3}{4x-3}=\dfrac{8x+1}{2x-1}.$

8. $\dfrac{4x-7}{4x+5}+\dfrac{15x+11}{5x+7}=\dfrac{12x+1}{3x+4}.$

9. $\dfrac{4x^3+4x^2+8x+1}{2x^2+2x+3}=\dfrac{2x^2+2x+1}{x+1}.$

10. $\dfrac{12x^3+16x^2+29x-1}{3x^2+4x+8}=\dfrac{4x^2+20x-1}{x+5}.$

11. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}=2x+\dfrac{2}{x-3}.$

12. $\dfrac{x^2+3}{x-1}+\dfrac{x^2-x+1}{x-2}=\dfrac{2x^2-4x+1}{x-3}.$

13. $\dfrac{2x^2-3x+7}{2x-1}+\dfrac{6x^2+2x+21}{3x+1}=\dfrac{3x^2+8x+7}{x+3}.$

14. $\dfrac{3+2x}{1+2x}-\dfrac{5+2x}{7+2x}=1-\dfrac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}.$

15. $\dfrac{2x-3}{x-2}+\dfrac{3x-20}{x-7}=\dfrac{x-3}{x-4}+\dfrac{4x-19}{x-5}.$

16. $\dfrac{3x-8}{x-3}+\dfrac{4x-35}{x-9}=\dfrac{2x-9}{x-5}+\dfrac{5x-34}{x-7}.$

17. $\dfrac{3x-13}{x-4}+\dfrac{4x-41}{x-10}=\dfrac{2x-13}{x-6}+\dfrac{5x-41}{x-8}.$

18. $\dfrac{4x+21}{x+5}+\dfrac{5x-69}{x-14}=\dfrac{3x-5}{x-2}+\dfrac{6x-41}{x-7}.$

19. $\dfrac{5-6x}{3x-1}+\dfrac{2x+7}{x+3}=\dfrac{31-12x}{3x-7}+\dfrac{4x+21}{x+5}.$

20. $\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}+\dfrac{x^2-15}{x-4}=\dfrac{x^2+7x+11}{x+5}+\dfrac{x^2-4x-20}{x-7}.$

21. $\frac{2x+11}{x+5}-\frac{9x-9}{3x-4}=\frac{4x+13}{x+3}-\frac{15x-47}{3x-10}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1860]

22. $\frac{x-2}{x-3}+\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-4}{x-5}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1887]

156. বিবিধ প্রশ্নমালার সমাধান :

উদা. 1. সমাধান কর : $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}$.

এখন, পক্ষান্তর করিয়া,

$$\frac{ab}{a+b}\left\{3c+\frac{ab}{(a+b)^2}\right\}=x\left\{3c+\frac{b}{a}-\frac{(2a+b)b^2}{a(a+b)^2}\right\}$$

$$=x\left\{3c+\frac{b}{a}\left[1-\frac{(2a+b)b}{(a+b)^2}\right]\right\}$$

$$=x\left\{3c+\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{(a+b)^2}\right\}$$

$$=x\left\{3c+\frac{ab}{(a+b)^2}\right\}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{ab}{a+b}.$$

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}=\frac{ax+b}{px+q}$.

এখন, $\frac{x(ax+b)+c}{x(px+q)+r}=\frac{ax+b}{px+q}$.

অতএব, $ax+b$ এর পরিবর্তে m এবং $px+q$ এর পরিবর্তে n বসাইয়া,

$$\frac{mx+c}{nx+r}=\frac{m}{n};$$

$\therefore\quad mnx+cn=mnx+rm$; $\therefore\quad cn=rm$,

অথবা, $c(px+q)=r(ax+b)$; $\therefore\quad x(cp-ar)=br-cq$;

$$\therefore\quad x=\frac{br-cq}{cp-ar}.$$

উদা. 3. সমাধান কর : $(x-2a)^3+(x-2b)^3=2(x-a-b)^3$.

এখন, পক্ষান্তর করিয়া,

$$(x-2a)^3-(x-a-b)^3=(x-a-b)^3-(x-2b)^3.$$

$x-2a$ এর পরিবর্তে X, $x-2b$ এর পরিবর্তে Y এবং $x-a-b$ এর পরিবর্তে Z বসাইয়া, $X^3-Z^3=Z^3-Y^3$,

অথবা, $(X-Z)(X^2+XZ+Z^2)=(Z-Y)(Z^2+ZY+Y^2)$.

কিন্তু $X-Z=Z-Y$; কারণ, উহাদের প্রত্যেকেই $=b-a$;

$$\therefore \quad X^2+XZ+Z^2=Z^2+ZY+Y^2.$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $X^2-Y^2=Z(Y-X)$.

সাধারণ গুণনীয়ক $X-Y$ (যাহা $=2b-2a$) কে অপসারণ করিয়া,

$$X+Y=-Z,$$

অর্থাৎ, $(x-2a)+(x-2b)=-(x-a-b)$,

স্থতরাং, $3x=3(a+b)$; $\therefore \; x=a+b$.

উদা. 4. সমাধান কর : $\dfrac{x+a}{x+b}=\left(\dfrac{2x+a+c}{2x+b+c}\right)^2$.

যেহেতু $\dfrac{x+a}{x+b}=\dfrac{(x+b)+(a-b)}{x+b}=1+\dfrac{a-b}{x+b}$,

এবং $\dfrac{2x+a+c}{2x+b+c}=\dfrac{(2x+b+c)+(a-b)}{2x+b+c}=1+\dfrac{a-b}{2x+b+c}$,

অতএব, $1+\dfrac{a-b}{x+b}=\left\{1+\dfrac{a-b}{2x+b+c}\right\}^2$

$$=1+\frac{2(a-b)}{2x+b+c}+\frac{(a-b)^2}{(2x+b+c)^2}.$$

স্থতরাং, পক্ষান্তর করিয়া, এবং $a-b$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{1}{x+b}-\frac{2}{2x+b+c}=\frac{a-b}{(2x+b+c)^2},$$

অথবা, $\dfrac{c-b}{(x+b)(2x+b+c)}=\dfrac{a-b}{(2x+b+c)^2}$;

$$\therefore \quad \frac{c-b}{x+b}=\frac{a-b}{2x+b+c};$$

$$\therefore \quad 2x(c-b)+(c^2-b^2)=x(a-b)+b(a-b);$$

$$\therefore \quad x(a+b-2c)=c^2-ab;$$

$$\therefore \quad x=\frac{c^2-ab}{a+b-2c}.$$

উদা. 5. সমাধান কর :

$$\frac{4x}{3}-\frac{125x^2-5}{(5x-1)(x+5)}=5x-\frac{5}{3}\cdot\frac{3x^2-1}{x+5}-\frac{95-4x}{3}.$$

যেহেতু $\dfrac{125x^2-5}{(5x-1)(x+5)}=\dfrac{5(25x^2-1)}{(5x-1)(x+5)}=\dfrac{5(5x+1)}{x+5}$,

এবং $\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{3x^2-1}{x+5}=\dfrac{\frac{5}{3}(3x^2-1)}{x+5}=\dfrac{5x^2-\frac{5}{3}}{x+5}$;

অতএব, $\dfrac{4x}{3}-\dfrac{5(5x+1)}{x+5}=5x-\dfrac{5x^2-\frac{5}{3}}{x+5}-\dfrac{95}{3}+\dfrac{4x}{3}$.

এখন, পক্ষান্তর করিয়া এবং 5 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{x^2-\frac{1}{3}-(5x+1)}{x+5}=x-6\tfrac{1}{3}.$$

সুতরাং, $x^2-5x-1\frac{1}{3}=x^2-(1\frac{1}{3})x-31\frac{2}{3}$;

$\therefore\quad (3\frac{2}{3})x=30\frac{1}{3}$; $\quad\therefore\quad x=\frac{91}{11}=8\frac{3}{11}$.

প্রশ্নমালা 76

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $\dfrac{2x}{x-4}+\dfrac{7x-3}{x+1}=9.$

2. $\dfrac{x+4a+b}{x+a+b}+\dfrac{4x+a+2b}{x+a-b}=5.$

3. $\dfrac{3x+5}{x+1}=\dfrac{4x+8}{3x+3}+\dfrac{10x+1}{6x+3}.$

4. $\dfrac{6x+8}{2x+1}-\dfrac{2x+38}{x+12}=1.$

5. $\dfrac{x+18}{x-2}-\dfrac{27-3x}{3x-19}=2.$

6. $\dfrac{x-b}{x-a}-\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{2(a-b)}{x-(a+b)}.$

7. $\dfrac{x+2a}{2b-x}+\dfrac{x-2a}{2b+x}+\dfrac{4ab}{x^2-4b^2}=0.$

8. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-a-b}=\dfrac{(x-c)(x-d)}{x-c-d}.$

9. $\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{2x}{x^2+4x+3}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}=14-\dfrac{60+4x}{x+3}.$

10. $\dfrac{a+x}{a^2+ax+x^2}+\dfrac{a-x}{a^2-ax+x^2}=\dfrac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}.$

11. $\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$.

12. $\frac{1}{(x+a)^2-b^2}+\frac{1}{(x+b)^2-a^2}=\frac{1}{x^2-(a+b)^2}+\frac{1}{x^2-(a-b)^2}$.

13. $\frac{3x^2+5x+8}{5x^2+6x+12}=\frac{3x+5}{5x+6}$.

14. $\frac{58x^2+87x+7}{87x^2+145x+11}=\frac{2x+3}{3x+5}$.

15. $\frac{a^2(a-2b)}{b(a-b)^2}\cdot x+\frac{2abc}{(a-b)}-\frac{ax}{b}=2cx-\frac{a^2b^2}{(a-b)^3}$.

16. $(x-23)^3+(x-27)^3=2(x-25)^3$.

17. $\frac{4x-17}{9}-\frac{3\frac{2}{3}-22x}{33}=x-\frac{6}{x}\left(1-\frac{x^2}{54}\right)$.

18. $\left(\frac{x-2a}{x+2b}\right)^2=\frac{x-2a-2b}{x+2a+2b}$.

19. $\frac{x+19}{x+10}=\left(\frac{2x+33}{2x+24}\right)^2$.

20. $\left(\frac{x-a}{x+b}\right)^3=\frac{x-2a-b}{x+a+2b}$.

157. সরল সমীকরণের একাধিক বীজ (root) থাকিতে পারে না : সমীকরণস্থিত পদসমূহের ভিতর অজ্ঞাত রাশি (সাধারণতঃ x)-যুক্ত পদগুলিকে সমতাচিহ্নের বামদিকে এবং অন্যান্য পদগুলিকে সমতাচিহ্নের ডা'নদিকে স্থানান্তরিত করিলে, সকল সরল সমীকরণকেই $ax=b$ এর আকারে প্রকাশ করা যায়।

কিন্তু, $ax=b$ সমীকরণটিতে x এর, $\frac{b}{a}$ ভিন্ন অন্য কোন মান দ্বারাই সমীকরণের সমতা রক্ষিত হইতে পারে না।

অতএব, সরল সমীকরণের একাধিক বীজ থাকা সম্ভবপর নহে।

অথবা : সম্ভব হইলে, ধরা যাউক যে, $ax=b$ সমীকরণটির, α ও β, এই দুইটি বীজ আছে। তাহা হইলে, অবশ্যই

$$\left.\begin{array}{r} a\alpha=b \\ \text{এবং,}\quad a\beta=b \end{array}\right\}$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া, $a(\alpha-\beta)=0$.

কিন্তু, ইহা অসম্ভব ; কারণ, a একটি নির্দ্দিষ্ট সংখ্যা এবং (কল্পনানুসারে, α ও β বিভিন্ন হওয়ায়) $\alpha-\beta$ এর মানও শূন্য নহে।

অতএব, সরল সমীকরণের একাধিক বীজ থাকা অসম্ভব।

158. সরল সমীকরণ-সমাধানে দুইটি ব্যতিক্রম (exceptions) :

(1) কোন সরল সমীকরণ, পক্ষান্তরকরণ ও সরলীকরণ প্রক্রিয়ান্তে $0\times x=0$ এর আকার ধারণ করিলে, স্পষ্টতঃই উহা অজ্ঞাত রাশির যে কোন সাংখ্যমানের জন্যই অক্ষুণ্ণ থাকে। অতএব, এই সকল ক্ষেত্রে সমীকরণের বীজ অসংখ্য হয়। বস্তুতঃ, ইহারা **অভেদ** (identity).

উদা.। $x+2=\frac{x}{2}+\frac{x+4}{2}$ সমীকরণটিতে, পক্ষান্তরকরণ প্রক্রিয়ার দ্বারা $(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})x=\frac{4}{2}-2$, অর্থাৎ $0\times x=0$ পাওয়া গিয়াছে। কাজেই x এর যে কোন সাংখ্যমানের জন্যই ইহার সমতা রক্ষিত হইবে।

বস্তুতঃ, ইহা একটি অভেদ। কারণ, ডা'নপক্ষ $=\frac{x+x+4}{2}$

$$=\frac{2x+4}{2}$$
$$=x+2$$
$$=\text{বামপক্ষ।}$$

(2) আবার, $\frac{x+5}{3}=\frac{x+4}{2}-\frac{x-4}{6}$ সমীকরণটি, পক্ষান্তরকরণ ও সরলীকরণ প্রক্রিয়া দ্বারা, $(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6})x=\frac{4}{2}+\frac{4}{6}-\frac{5}{3}$,

অথবা, $0\times x=1$;

অথবা, $0=1$, এই আকারে পরিবর্তিত হইল, যাহা সম্পূর্ণ **অসম্ভব**। কাজেই, প্রদত্ত সমীকরণে, অজ্ঞাত রাশির কোন মানের জন্যই সমীকরণের সমতা রক্ষিত হইতে পারে না। অর্থাৎ, এই সমীকরণটির কোন বীজ (root) নাই।

মন্তব্য : একটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সরল সমীকরণকে সকল সময়ই পক্ষান্তরকরণ ও সরলীকরণ প্রক্রিয়ার সাহায্যে $a\times x=b$ এর আকারে পরিণত করা যায়।

$\boldsymbol{a\times x=b}$ সমীকরণে

(i) a ও b এর কোনটিই '0' না হইলে, বীজ (অর্থাৎ, x) $=\frac{b}{a}$;

(ii) $a\neq 0$, কিন্তু $b=0$ হইলে, বীজ (অর্থাৎ, x) $=0$;

(iii) $a=0$ এবং $b=0$ হইলে, বীজ (অর্থাৎ, x) = যে কোন সংখ্যা। এক্ষেত্রে সমীকরণটি প্রকৃতপক্ষে একটি অভেদ।

(iv) $a=0$ এবং $b\neq 0$, হইলে, উভয় পক্ষের সমতা-সম্বন্ধ অসম্ভব হয় ; সুতরাং ইহার বীজের কোন প্রশ্নই উঠিতে পারে না।

II. দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সহজ সহ-সমীকরণ

(Easy Simultaneous Equations involving two Unknowns)

159. ভূমিকা : $x-y=2$ সমীকরণটিতে x ও y এই দুইটি অজ্ঞাত রাশি বর্তমান এবং স্পষ্টই বুঝা যায় যে, অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের অসংখ্য মান দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইতে পারে; কারণ, যে সংখ্যাদ্বয়ের অন্তরফল 2 হইবে, সেই সংখ্যাদ্বয় দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। [যথা, $x=4, y=2$; বা, $x=5, y=3$; বা, $x=6, y=4$; বা, $x=-3, y=-5$; ইত্যাদি।] অধিকন্তু, যদি দেওয়া থাকে যে, x ও y, আবার $x+y=8$ সমীকরণটিকেও সিদ্ধ করিবে; তাহা হইলে পূর্ব্বোল্লিখিত বিভিন্ন সংখ্যাযুগলের মধ্যে যে সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 8 হইবে, তাহাদিগকেই নির্ণয় করিতে হইবে। অতএব, দেখা যায় যে,

$$\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ x+y=8 \end{array}\right\}$$

এই সমীকরণদ্বয় x ও y এর **একই** মান দ্বারা যুগপৎ সিদ্ধ হইতে পারে, কেবলমাত্র যদি $x=5$ এবং $y=3$ হয়।

উপরিউক্ত সমীকরণগুলির ন্যায়, দুই সমীকরণের প্রত্যেকটিই যদি উহাদের অন্তর্গত সাধারণ অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের **একই** মান দ্বারা **যুগপৎ** সিদ্ধ হয়, তাহা হইলে ঐ সমীকরণগুলিকে **সহ-সমীকরণ** (simultaneous equation) বলে। সমীকরণস্থিত অজ্ঞাত রাশিগুলির প্রত্যেকটিই একশক্তিবিশিষ্ট হইলে এবং সমীকরণে উহাদের দুই বা ততোধিকের গুণফলবিশিষ্ট কোন পদ না থাকিলে, সমীকরণটিকে **সরল** বা **একশক্তি সমীকরণ** বলা হয়।

প্রথমতঃ আমরা দুই বর্ণ (বা অজ্ঞাত রাশি)-বিশিষ্ট সরল সহ-সমীকরণসম্বন্ধে আলোচনা করিব। এইপ্রকার সমীকরণ সমাধান করিবার সাধারণতঃ তিনটি পদ্ধতি আছে; উহাদিগকে যথাক্রমে নিম্নলিখিতরূপে সন্নিবেশিত করা যাইতেছে।

160. প্রথম পদ্ধতি : সমীকরণদ্বয়ের **যে কোনটি** হইতে, অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে কোনটির মান অপরটি দ্বারা প্রকাশ করিয়া, ঐ লব্ধ মান **অন্য** সমীকরণটিতে বসাও।

উদা. 1. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{r} 5x-24y=16 \\ 4x-y=31 \end{array}\right\}$

দ্বিতীয় সমীকরণটি হইতে দেখা যায় যে, $y=4x-31.$ ... (1)

y এর এই লব্ধ মান প্রথম সমীকরণটিতে y এর পরিবর্ত্তে বসাইলে,

$$5x-24(4x-31)=16;$$

অথবা, $5x-96x+744=16$ পাওয়া যায়।

$$\therefore\quad -91x=-728;\quad \therefore\quad x=8.$$

অতএব, (1) হইতে, $y = 4 \times 8 - 31 = 1$ পাওয়া গেল।

সুতরাং, $x = 8, y = 1$; ইহাই নির্ণেয় বীজ (root)।

টীকা। x ও y এর এই লব্ধ মানদ্বয় সমীকরণ দুইটির প্রত্যেকটিতে x ও y এর পরিবর্ত্তে বসাইয়া পরীক্ষা করিয়া দেখা উচিত যে, উহারা সমীকরণদ্বয়কে প্রকৃতপক্ষে সিদ্ধ করে।

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{3x-5y}{2} + 3 = \dfrac{2x+y}{5}$; $8 - \dfrac{x-2y}{4} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3}$.

প্রথম সমীকরণের উভয় পক্ষকে 10 দ্বারা গুণ কর ;

অতএব, $5(3x - 5y) + 30 = 2(2x + y)$,

অথবা, $15x - 25y + 30 = 4x + 2y$;

$\therefore \quad 11x = 27y - 30. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

দ্বিতীয় সমীকরণের উভয় পক্ষকে 12 দ্বারা গুণ কর ;

অতএব, $96 - 3(x - 2y) = 6x + 4y$,

অথবা, $96 - 3x + 6y = 6x + 4y$;

$\therefore \quad 2y - 9x + 96 = 0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

(1) হইতে, $x = \dfrac{27y - 30}{11}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

x এর এই মান (2) তে x এর পরিবর্ত্তে বসাও ;

অতএব, $2y - \dfrac{9(27y - 30)}{11} + 96 = 0$;

$\therefore \quad 22y - 9(27y - 30) + 1056 = 0$,

অথবা, $22y - 243y + 270 + 1056 = 0$;

$\therefore \quad 221y = 1326$; $\quad \therefore \quad y = 6$.

কাজেই, (3) হইতে, $x = \dfrac{27 \times 6 - 30}{11} = \dfrac{132}{11} = 12$.

সুতরাং, $x = 12$ ও $y = 6$.

প্রশ্নমালা 77

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $\left.\begin{array}{l} x+4y=14 \\ 7x-3y=5 \end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l} 5x-8y=9 \\ 13x+7y=79 \end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=32 \\ 11y-9x=3 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} 9x-4y=8 \\ 13x+7y=101 \end{array}\right\}$ 5. $\left.\begin{array}{l} x+ay=b \\ ax-by=c \end{array}\right\}$ 6. $\left.\begin{array}{l} 2x-\frac{1}{5}(y-3)=4 \\ 3y+\frac{1}{3}(x-2)=9 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{3}(2x+4) \\ \frac{1}{3}(x-y)=\frac{1}{2}(x-24) \end{array}\right\}$ 8. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}(x-y)=\frac{1}{4}(y-1) \\ \frac{1}{7}(4x-5y)=x-7 \end{array}\right\}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1872]

9. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(3x-2y)-3=\frac{1}{4}(2x-y) \\ \frac{1}{2}(5x-4y)-3=\frac{1}{3}(4x-3y) \end{array}\right\}$ 10. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{6}(2x+3y)+\frac{1}{3}x=8 \\ \frac{1}{2}(7y-3x)-y=11 \end{array}\right\}$

161. দ্বিতীয় পদ্ধতি : সমীকরণদ্বয়ের প্রত্যেকটি হইতে, অজ্ঞাত রাশি দুইটির যে কোনটির (ধর, y এর) মান অপর অজ্ঞাত রাশিটি (অর্থাৎ, x) দ্বারা প্রকাশ করিয়া, ঐ লব্ধ মানদ্বয়ের সমতা স্থাপন কর ।

উদা. 1. সমাধান কর : $6x-5y=11,\ 2x+3y=27.$

প্রথম সমীকরণ হইতে, $5y=6x-11$;

$$\therefore\ y=\frac{6x-11}{5}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে, $3y=27-2x$;

$$\therefore\ y=\frac{27-2x}{3}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

অতএব, (1) ও (2) হইতে, $\frac{6x-11}{5}=\frac{27-2x}{3}$;

$\therefore\ 3(6x-11)=5(27-2x)$;

অথবা, $18x-33=135-10x$;

$\therefore\ 28x=168$; $\quad\therefore\ x=6.$

সুতরাং (1) হইতে, $y=\frac{6\times 6-11}{5}=5.$

অতএব, $x=6$ এবং $y=5.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\left.\begin{aligned} \frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}&=3y-5 \\ \frac{5y-7}{2}+\frac{4x-3}{6}&=18-5x. \end{aligned}\right\}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1880]

প্রথম সমীকরণটির উভয় পক্ষকে 20 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$4(7+x)-5(2x-y)=20(3y-5) ;$$

অথবা, $28-6x+5y=60y-100$;

$$\therefore \quad 55y+6x=128. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

দ্বিতীয় সমীকরণটির উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$3(5y-7)+(4x-3)=6(18-5x) ;$$

অথবা, $15y-21+4x-3=108-30x$;

$$\therefore \quad 34x+15y=132. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে, $y=\frac{128-6x}{55}$; $\quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

এবং (2) হইতে, $y=\frac{132-34x}{15}$. $\quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$

$\therefore$ (3) ও (4) হইতে,

$\frac{128-6x}{55}=\frac{132-34x}{15}$; অথবা, $\frac{64-3x}{11}=\frac{66-17x}{3}$;

[উভয় পক্ষকে $\frac{5}{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

$$\therefore \quad 3(64-3x)=11(66-17x) ;$$

অথবা, $192-9x=726-187x$;

$$\therefore \quad 178x=534 ; \quad \therefore \quad x=3.$$

অতএব, (3) হইতে, $y=\frac{128-6\times 3}{55}=\frac{110}{55}=2$.

সুতরাং, $x=3$ এবং $y=2$.

প্রশ্নমালা 78

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $\left.\begin{aligned} 5x-3y&=9 \\ 5y+2x&=16 \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} 3y-4x&=1 \\ 3x+4y&=18 \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} 3x-7y&=7 \\ 11x+5y&=87 \end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} y(3+x)&=x(7+y) \\ 4x+9&=5y-14 \end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} 32x-25y&=28 \\ 14x+15y&=116 \end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{7}(3x+y)&=\tfrac{1}{5}(2x+y+1) \\ 8-\tfrac{1}{5}(x-y)&=6 \end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned} \tfrac{11}{13}(5x-6y)+3x&=4y-2 \\ \tfrac{1}{6}(5x+6y)-\tfrac{1}{4}(3x-2y)&=2y-2 \end{aligned}\right\}$

8. $\left.\begin{aligned} 2x-\tfrac{1}{4}(y+3)&=7+\tfrac{1}{5}(3y-2x) \\ 4y+\tfrac{1}{3}(x-2)&=26\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(2y+1) \end{aligned}\right\}$

9. $\left.\begin{aligned} 2x-\tfrac{1}{3}(2y-1)&=3\tfrac{5}{24}+\tfrac{1}{4}(3x-2y) \\ 4y-\tfrac{1}{4}(5-2x)&=6-\tfrac{1}{5}(3-2y) \end{aligned}\right\}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1873]

10. $\frac{x}{3}-\frac{2}{y}=1,\ \frac{x}{4}+\frac{3}{y}=3.$ [এলাহাবাদ, 1923]

162. তৃতীয় পদ্ধতি : সমীকরণদ্বয়কে এরূপ দুইটি সংখ্যা দ্বারা গুণ কর যে, গুণনোৎপন্ন সমীকরণ দুইটিতে, অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে কোনটির সহগদ্বয়ের পরমমান উভয় সমীকরণেই সমান হইবে ; তাহা হইলে এই শেষোক্ত সমীকরণ দুইটির যোগ বা বিয়োগফল দ্বারা এরূপ একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে, যাহাতে একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি বর্তমান থাকিবে।

উদা. 1. সমাধান কর : $\left.\begin{aligned} 3x-4y&=5 \\ 5x+2y&=17 \end{aligned}\right\}$

দ্বিতীয় সমীকরণটিকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া, $10x+4y=34$ পাওয়া গেল ;
এবং প্রথম সমীকরণটি $3x-4y=5$;

অতএব, যোগ করিয়া, $13x=39$; $\therefore\ x=3.$

প্রথম সমীকরণে x এর এই মান বসাইলে, $4y=9-5=4$; $\therefore\ y=1.$

অতএব, $x=3,\ y=1.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\left.\begin{aligned} 5x+9y&=89 \\ 2x-17y&=15 \end{aligned}\right\}$

সমীকরণদ্বয়ের প্রথমটিকে 2 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে 5 দ্বারা গুণ কর।

$$\left.\begin{aligned} \text{সুতরাং,} \quad 10x+18y&=178 \\ \text{এবং} \quad 10x-85y&=75 \end{aligned}\right\}$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া, $103y=103$; $\therefore \ y=1.$

দ্বিতীয় সমীকরণে y এর এই মান বসাইলে,

$$2x=15+17=32; \qquad \therefore \ x=16.$$

অতএব, $x=16$ এবং $y=1.$

টীকা। উপরিউক্ত প্রক্রিয়ার পরিবর্ত্তে, প্রথম সমীকরণটিকে 17 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে 9 দ্বারা গুণ করিয়া, লব্ধ সমীকরণদ্বয়কে যোগ করিলে x এর মান-নির্ণয়ক সমীকরণটি প্রথমে পাওয়া যাইত। উপরিউক্ত প্রক্রিয়া অবলম্বনের কারণ এই যে, উভয় সমীকরণেই x এর সহগ ছোট সংখ্যা হওয়ায় গুণনকার্য্য সহজসাধ্য হইয়াছে।

উদা. 3. সমাধান কর : $\left.\begin{aligned} 23x-24y&=21 \\ 25x-16y&=43 \end{aligned}\right\}$

সমীকরণদ্বয়ের প্রথমটিকে 2 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে 3 দ্বারা গুণ করিলে,

$$\left.\begin{aligned} 46x-48y&=42 \\ 75x-48y&=129 \end{aligned}\right\} \text{ পাওয়া যায়।}$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া, $29x=87$; $\therefore \ x=3.$

দ্বিতীয় সমীকরণটিতে x এর এই মান বসাইলে,

$$16y=75-43=32; \qquad \therefore \ y=2.$$

সুতরাং, $x=3$ এবং $y=2.$

টীকা। এস্থলে লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, গুণন-লব্ধ সমীকরণদ্বয়ে y এর সহগ, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের y এর সহগ দুইটির ল. সা. গু.। সকল ক্ষেত্রেই সেইরূপ করা উচিত, নতুবা গুণন-প্রক্রিয়া অযথা কষ্টসাধ্য হইয়া পড়ে।

উদা. 4. সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-2}{2}-\frac{x+y}{14}&=\frac{x-y-1}{8}-\frac{y+12}{4},\\ \frac{x+7}{3}+\frac{y-5}{10}&=1-x-\frac{5(y+1)}{7}\end{aligned}\right\}$$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1882]

প্রথম সমীকরণ হইতে,

$$\frac{7(x-2)-(x+y)}{14}=\frac{(x-y-1)-2(y+12)}{8};$$

অথবা, $\frac{6x-y-14}{7}=\frac{x-3y-25}{4}$,

অথবা, $24x-4y-56=7x-21y-175$,

অথবা, $17x+17y=-119$;

অথবা, $x+y=-7$. ... ... (1)

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে,

$$\frac{10(x+7)+3(y-5)}{30}=\frac{7(1-x)-5(y+1)}{7};$$

অথবা, $\frac{10x+3y+55}{30}=\frac{2-7x-5y}{7}$,

অথবা, $70x+21y+385=60-210x-150y$;

অথবা, $280x+171y=-325$. ... ... (2)

(1) কে 171 দ্বারা গুণ করিয়া, $171x+171y=-1197$;
আবার, $280x+171y=-325$.

স্থতরাং, বিয়োগ করিয়া, $109x=872$; $\therefore\ x=8$.

x এর এই মান (1) তে বসাইয়া, $y=-7-8=-15$.

অতএব, $x=8$ এবং $y=-15$.

উদা. 5. সমাধান কর : $\left.\begin{aligned}\frac{2}{x}+\frac{3}{y}&=1\\ \frac{7}{x}+\frac{4}{y}&=1\tfrac{7}{8}\end{aligned}\right\}$

প্রথম সমীকরণটিকে 4 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে 3 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\frac{8}{x}+\frac{12}{y}=4 \text{ এবং } \frac{21}{x}+\frac{12}{y}=\frac{45}{8}.$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া, $\frac{13}{x}=\frac{13}{8}$; $\therefore\ x=8.$

প্রথম সমীকরণে x এর মান বসাইয়া,

$$\frac{3}{y}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}; \quad \therefore\ y=4.$$

সুতরাং, $x=8$ এবং $y=4$.

162A. সহ-সমীকরণ: সাধারণ ক্ষেত্র: দুইটি চলবিশিষ্ট দুইটি সরল সহ-সমীকরণকে সকল ক্ষেত্রেই

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c\ldots(1) \\ px+qy=r\ldots(2) \end{array}\right\}\text{-রূপে পরিণত করা যায়।}$$

[এক্ষেত্রে a, b, c এবং p, q, r কে নির্দিষ্ট মানবিশিষ্ট বিভিন্ন সংখ্যা বলিয়া ধরিয়া লওয়া হয়।]

(*A*) $aq-pb\neq 0$ এবং $cq-br\neq 0$ হইলে,

(1) কে q দ্বারা গুণ করিলে, $aqx+bqy=cq$ ... (3)

এবং (2) কে b দ্বারা গুণ করিলে, $pbx+bqy=br$ ... (4)

(3) হইতে (4) বিয়োগ করিলে, $(aq-pb)x=cq-br.$ ... (5)

$$\therefore\ x=\frac{cq-br}{aq-pb}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (\text{I})$$

এইপ্রকার (1) কে 'p' দ্বারা ও (2) কে 'a' গুণ করিয়া গুণফলের একটি হইতে অন্যটিকে বিয়োগ করিলে, $(aq-pb)y=ar-cp.$ ... ... (6)

$$\therefore\ y=\frac{ar-cp}{aq-bp}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (\text{II})$$

(*B*) (i) $aq-pb=0$, এবং $cq-br=0$ হইলে, (5)-সম্বন্ধটি 158 নিয়মের (1) ক্ষেত্রে পরিণত হয় এবং সেক্ষেত্রে ইহা একটি অভেদ।

বস্তুতঃ, এক্ষেত্রে $aq=pb$ এবং $cq=br$;

অথবা, $\frac{p}{a}=\frac{q}{b}$ এবং $\frac{q}{b}=\frac{r}{c}$; অথবা, $\frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{r}{c}$ ($=k$, মনে কর)

তাহা হইলে, $p=ak$, $q=bk$ এবং $r=ck$.

কাজেই (2)-চিহ্নিত সমীকরণটি $px+qy=r$, $akx+bky=ck$ তে

অর্থাৎ, $ax+by=c$ তে [উভয় পক্ষকে k দ্বারা ভাগ করিয়া]

অর্থাৎ, (1)-চিহ্নিত সমীকরণে পরিণত হয়।

সুতরাং, দুইটি স্বতন্ত্র সমীকরণ আর পাওয়া যায় না।

কাজেই কোন নির্দ্দিষ্ট সমাধান হয় না।

(ii) $aq-pb=0$ এবং $cq-br\neq 0$ (শূন্য না) হইলে, (5)-সম্বন্ধটি 158 নিয়মের দ্বিতীয় ক্ষেত্রে পরিণত হয় এবং সেক্ষেত্রে ইহা অসম্ভব হইয়া পড়ে।

(C) $aq-pb\neq 0$ এবং $cq-br=0$ হইলে, $x=0$ হয়।

এবং $y=\frac{c}{b}$, বা $\frac{r}{q}$ হয় [এবং $\frac{c}{b}$ এর মান $\frac{r}{q}$ এর মানের সমান]।

টীকা। উপরিউক্ত (I) ও (II) ফল দুইটিকে সাধারণতঃ নিম্নলিখিত রূপে লেখা হয় :

$$\frac{x}{cq-br}=\frac{1}{aq-pb};$$

$$\text{এবং}\quad \frac{y}{ar-cp}=\frac{1}{aq-pb};$$

$$\therefore\quad \frac{x}{cq-br}=\frac{y}{ar-cp}=\frac{1}{aq-pb}.$$

প্রশ্নমালা 79

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $\left.\begin{array}{l}7x-5y=11\\3x+2y=13\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}13x+6y=58\\5x-11y=9\end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{l}8x-9y=20\\7x-10y=9\end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l}25x-14y=8\\12x+7y=45\end{array}\right\}$ 5. $\left.\begin{array}{l}12x+11y=70\\8x-7y=18\end{array}\right\}$ 6. $\left.\begin{array}{l}13x-14y=22\\17x-21y=18\end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l}28x-15y=41\\21x+13y=55\end{array}\right\}$ 8. $\left.\begin{array}{l}19x+24y=34\\23x+36y=62\end{array}\right\}$ 9. $\left.\begin{array}{l}47x-56y=123\\25x+84y=293\end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l}51x-16y=3\\68x+23y=137\end{array}\right\}$ 11. $\left.\begin{array}{l}52x-9y=34\\39x+14y=67\end{array}\right\}$ 12. $\left.\begin{array}{l}12x+85y=-49\\19x-34y=91\end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l} 65x - 14y = 9 \\ 91x - 15y = 31 \end{array}\right\}$ 14. $\left.\begin{array}{l} 15x + 46y = 17 \\ 13x + 69y = 73 \end{array}\right\}$ 15. $\left.\begin{array}{l} 14x + 81y = 53 \\ 17x + 135y = 101 \end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l} 5x + 11y = 146 \\ 11x + 5y = 110 \end{array}\right\}$ 17. $\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a^2x + b^2y = c^2 \end{array}\right\}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1881]

18. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{3x-5y}{4} = 2 \\ \dfrac{x}{14} + \dfrac{y}{18} = 1 \end{array}\right\}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1876]

19. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{4x+5y}{40} = x - y \\ \dfrac{2x-y}{3} + 2y = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ 20. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{4x-3y-7}{5} = \dfrac{3x}{10} - \dfrac{2y}{15} - \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{y-1}{3} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3y}{20} = \dfrac{y-x}{15} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{11}{10} \end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{5x-3y}{12} + \dfrac{7x-5y}{15} = 1 - \dfrac{25x+3y}{60} \\ \dfrac{(3\frac{1}{2})x+2y-5}{16} + \dfrac{11x-(4\frac{1}{3})y+17}{11} = \dfrac{19}{22} + \dfrac{17x-10y+2}{3} \end{array}\right\}$

22. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x-5y}{3} - \dfrac{2x-8y-33}{12} = \dfrac{y}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{4} \\ 3\frac{1}{2}\left(\dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{4} + 1\frac{1}{3}\right) = 3\frac{1}{3}\left(4x - \dfrac{y}{8} - 24\right) \end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{l} 2{\cdot}4x + {\cdot}32y - \dfrac{{\cdot}18x - {\cdot}025}{{\cdot}25} = {\cdot}8x + \dfrac{5{\cdot}2 + {\cdot}01y}{{\cdot}5} \\ \dfrac{{\cdot}2y + {\cdot}5}{1{\cdot}5} = \dfrac{{\cdot}49x - {\cdot}7}{4{\cdot}2} \end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{4}{x} + \dfrac{10}{y} = 2 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{19}{20} \end{array}\right\}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1879]

25. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 2 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{10}{y} = 5\frac{5}{6} \end{array}\right\}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1887]

26. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = m \\ \dfrac{b}{x} + \dfrac{a}{y} = n \end{array}\right\}$ 27. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{5y} = 1 \\ \dfrac{1}{5x} + \dfrac{1}{3y} = 1\frac{2}{15} \end{array}\right\}$ 28. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{y} - \dfrac{1}{x} = 1 \\ \dfrac{2}{5x} + \dfrac{5}{2y} = 7 \end{array}\right\}$

29. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{4} + \dfrac{2}{y} = 2 \\ \dfrac{2x}{5} + \dfrac{3}{2y} = 2\frac{7}{20} \end{array}\right\}$ 30. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{5x} + \dfrac{y}{9} = 5 \\ \dfrac{1}{3x} + \dfrac{y}{2} = 14 \end{array}\right\}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1870]

ত্রয়োবিংশ অধ্যায়

প্রশ্নাবলীজাত (I) সরল সমীকরণ ও (II) সহজ সহ-সমীকরণ

[Problems leading to Equations (I) Simple and (II) Simultaneous]

I. (a) প্রশ্নাবলীজাত সরল সমীকরণ (সহজ)

(Problems leading to Simple Equations)

163. 'সরল সমীকরণ'-সংক্রান্ত সহজ প্রশ্নাবলী প্রতীক (symbols) সাহায্যে প্রকাশ করিয়া, উহাদের সমাধান করার প্রণালী ষষ্ঠ এবং ষোড়শ অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে। বর্ত্তমানে ঐ জাতীয় অপেক্ষাকৃত জটিল প্রশ্নসম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে।

পূর্ব্বেই বলা হইয়াছে যে, এইজাতীয় প্রশ্ন সমাধানের পক্ষে, প্রশ্নগুলিকে প্রতীক সাহায্যে প্রকাশ করাই প্রধানতঃ অসুবিধাজনক। অতএব, ইহাতে দক্ষতালাভের জন্য শিক্ষার্থিগণের এইজাতীয় প্রশ্নানুশীলনে বিশেষ অভ্যাস থাকা উচিত।

যদিও এই সকল প্রশ্ন সমাধান করার কোন সাধারণ নিয়ম দেওয়া যায় না, তথাপি নিম্নলিখিত বিষয়গুলি মনে রাখিলে, অনেক সুবিধা হইবে বলিয়া আশা করা যায়।

(1) কোন প্রশ্নকে বহুবার পড়িয়া ভালরূপে উহার অর্থ বুঝিয়া লও।

(2) প্রশ্নের নির্ণেয় রাশিকে x দ্বারা সূচিত কর।

(3) প্রশ্নে প্রদত্ত সর্ত্তসমূহ x এর সাহায্যে প্রকাশ করিয়া একটি সরল সমীকরণ লিখ।

(4) সর্ব্বশেষে, এই সমীকরণ সমাধান করিয়া x এর মান নির্ণয় কর।

পরবর্ত্তী উদাহরণগুলি হইতে প্রক্রিয়া-প্রণালী উত্তমরূপে বুঝিতে পারা যাইবে।

উদা. 1. 20 বৎসর পূর্ব্বে এক ব্যক্তির বয়স তাহার পুত্রের বয়সের পাঁচগুণ ছিল; 16 বৎসর পরে পুত্রের বয়স 41 বৎসর হইলে, পিতার বর্ত্তমান বয়স কত?

[How old is a man now, who, 20 years ago, was five times as old as his son who will be 41 years old 16 years after ?]

এস্থলে, পিতার বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় করিতে হইবে; অতএব, ইহাকে x দ্বারা সূচিত কর।

$\therefore$ 20 বৎসর পূর্ব্বে, পিতার বয়স $=(x-20)$ বৎসর;

আবার, 16 বৎসর পরে, পুত্রের বয়স 41 বৎসর হইবে;

$\therefore$ পুত্রের বর্ত্তমান বয়স $= 41 - 16$ অর্থাৎ 25 বৎসর ;

অতএব, 20 বৎসর পূর্ব্বে, পুত্রের বয়স $= 25 - 20$ অর্থাৎ 5 বৎসর।

কাজেই, প্রশ্নে প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, $x - 20 = 5 \times 5$;

অথবা, $x = 20 + 5 \times 5 = 20 + 25 = 45$ বৎসর।

সুতরাং পিতার বর্ত্তমান বয়স 45 বৎসর।

উদা. 2. পাঁচটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার যোগফল 1185 হইলে, সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

[The sum of five consecutive numbers is 1185. Find the numbers.]

ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটিকে x দ্বারা সূচিত কর। এখন, যেহেতু যে কোন দুইটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার অন্তরফল 1 (এক), সুতরাং অন্যান্য সংখ্যাগুলি যথাক্রমে $x+1$, $x+2$, $x+3$ এবং $x+4$ হইবে।

অতএব, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে,

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 1185 ;$$

অথবা, $5x + 10 = 1185$;

অথবা, $5x = 1185 - 10 = 1175$;

$$\therefore \quad x = \frac{1175}{5} = 235.$$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাগুলির মধ্যে ক্ষুদ্রতমটি 235 হওয়ায়, উহারা যথাক্রমে 235, 236, 237, 238 এবং 239 হইবে।

উদা. 3. দুই ব্যক্তি একই সময়ে A হইতে যাত্রা করিল ; একজন ঘোড়ায় চড়িয়া ঘণ্টায় $7\frac{1}{2}$ মাইল গতিতে এবং অন্য ব্যক্তি রেলগাড়ীতে ঘণ্টায় 30 মাইল গতিতে চলিতে লাগিল ; যদি প্রথমোক্ত ব্যক্তি শেষোক্ত ব্যক্তি অপেক্ষা 30 মিনিট পরে B তে পৌছায়, তাহা হইলে A হইতে B এর দূরত্ব কত, তাহা নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1873]

[Two persons started from A at the same time. One rode on horse back at the rate of $7\frac{1}{2}$ miles an hour and arrived at B, 30 minutes later than the other who travelled the same distance by train at the rate of 30 miles an hour. Find the distance between A and B.]

ধর, মাইল-এককের তুলনায়, A হইতে B এর দূরত্ব-মান $= x$. তাহা হইলে, A হইতে B তে যাইতে, প্রথমোক্ত ব্যক্তির সময় $= \frac{x}{7\frac{1}{2}}$ ঘণ্টা, অর্থাৎ $\frac{2x}{15}$ ঘণ্টা, এবং শেষোক্ত ব্যক্তির সময় $= \frac{x}{30}$ ঘণ্টা।

অতএব, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে,

$$\frac{2x}{15}=\frac{x}{30}+\frac{1}{2}\text{ ; [30 মিনিট} = \tfrac{1}{2}\text{ ঘণ্টা]}$$

অথবা, $4x=x+15$;

অথবা, $3x=15$; $\therefore\ x=5$.

অতএব, A হইতে B এর দূরত্ব $=5$ মাইল।

উদা. 4. এক ব্যক্তিকে তাঁহার বয়সের কথা জিজ্ঞাসা করা হইলে, তিনি উত্তর করিলেন, "10 বৎসর পূর্ব্বে, আমার পুত্রের বয়স অপেক্ষা আমার বয়স পাঁচগুণ বেশী ছিল, কিন্তু 20 বৎসর পরে, আমার বয়স আমার পুত্রের বয়সের কেবলমাত্র দ্বিগুণ হইবে।" ঐ ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স কত ?

[A person being asked his age, replied, "Ten years ago I was five times as old as my son, but 20 years hence, I shall be only twice as old as he." What is his age ?]

ধর, ঐ ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স $=x$ বৎসর। তাহা হইলে, 10 বৎসর পূর্ব্বে, ঐ ব্যক্তির বয়স $=(x-10)$ বৎসর ; এবং পুত্রের বয়স $=\frac{1}{5}(x-10)$ বৎসর। স্থতরাং, পুত্রের বর্ত্তমান বয়স $=\{\frac{1}{5}(x-10)+10\}$ বৎসর। কাজেই, 20 বৎসর পরে, পুত্রের বয়স $=\{\frac{1}{5}(x-10)+30\}$ বৎসর এবং স্পষ্টতঃই পিতার বয়স $=(x+20)$ বৎসর হইবে।

অতএব, প্রদত্ত দ্বিতীয় সর্ত্তানুসারে,

$$x+20=2\{\tfrac{1}{5}(x-10)+30\}$$
$$=\tfrac{2}{5}(x-10)+60\ ;$$
$$\therefore\ 5x+100=2x-20+300\ ;$$
$$\therefore\ 3x=180\ ;\ \text{কাজেই,}\ x=60.$$

অর্থাৎ, ঐ ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স $=60$ বৎসর।

টীকা। উপরিউক্ত উদাহরণে, ঐ ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স $5x$ বৎসর ধরিয়া লইলে, প্রক্রিয়াতে কোন ভগ্নাংশবিশিষ্ট পদ থাকিত না।

উদা. 5. A এবং B উভয়েরই আয় সমান। A তাহার আয়ের এক-পঞ্চমাংশ সঞ্চয় করিল ; কিন্তু B, A অপেক্ষা বৎসরে £80 অধিক ব্যয় করিয়া, চারি বৎসর পরে £220 পরিমাণ ঋণগ্রস্ত হইল। তাহাদের প্রত্যেকের আয় কত ?

[A and B have the same annual income. A lays by a *fifth* of his ; but B, by spending annually £80 more than A, at the end of 4 years finds himself in debt by £220. What was their income ?]

ধর, প্রত্যেকের বাৎসরিক আয়ের পরিমাণ £x. তাহা হইলে A বৎসরে £$\frac{4}{5}x$ খরচ করে; সুতরাং, B বৎসরে £$(\frac{4}{5}x+80)$ খরচ করে; এবং এই পরিমাণ খরচ করিয়া B চারি বৎসরে £220, অর্থাৎ এক বৎসরে £55 পরিমাণ ঋণগ্রস্ত হইল। কাজেই, এক বৎসরে B এর আয় অপেক্ষা ব্যয়, £55 পরিমিত বেশী।

অতএব, $x=(\frac{4}{5}x+80)-55$; অথবা, $\frac{1}{5}x=25$; $\therefore\ x=125$.

সুতরাং, A ও B প্রত্যেকেই বৎসরে £125 আয় করে।

উদা. 6. একজন স্ত্রীলোক কতকগুলি ডিম প্রতি পেনিতে দুইটা দরে, এবং সমান-সংখ্যক ডিম প্রতি পেনিতে তিনটা দরে, ক্রয় করিয়া সমস্ত ডিম প্রতি দুই পেনিতে পাঁচটা দরে বিক্রয় করিল; ইহাতে তাহার 4 পেনি লোকসান হইলে, সে মোট কতগুলি ডিম কিনিয়াছিল?

[A woman bought a certain number of eggs at 2 a penny, and as many, at 3 a penny, and sold them at the rate of 5 for two pence, losing $4d.$ by her bargain. How many eggs did she buy?]

ধর, তাহার ক্রীত ডিমের সংখ্যা $=x$. তাহা হইলে যখন মোট ডিমের অর্দ্ধ-সংখ্যা, পেনি প্রতি দুইটা দরে, এবং অর্দ্ধ-সংখ্যা, পেনি প্রতি তিনটা দরে, কেনা হইয়াছে;

অতএব, সমস্ত ডিমের ক্রয়-মূল্য

$$=\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) \text{ পেন্স}=\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{6}\right) \text{ পেন্স।}$$

সমস্ত ডিম প্রতি দুই পেনিতে 5 টা করিয়া বিক্রয় করিয়া লব্ধ মূল্য $=x\times\frac{2}{5}$ পেন্স।

অতএব, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, $\frac{2x}{5}=\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{6}\right)-4$;

অথবা, $24x=15x+10x-240$; $\therefore\ x=240$.

অতএব, সে 240 টা ডিম কিনিয়াছিল।

উদা. 7. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার এককস্থানীয় অঙ্কটি দশকস্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ; এবং ঐ অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি হইতে 2 বাদ দিলে বিয়োগফল সংখ্যাটির এক-ষষ্ঠাংশ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[There is a number consisting of two digits, the digit in the unit's place is twice that in the ten's place; and if 2 be subtracted from the sum of the digits, the difference is equal to $\frac{1}{6}$th of the number. Find the number.]

ধর, সংখ্যাটির দশকস্থানীয় অঙ্ক $=x$; তাহা হইলে এককস্থানীয় অঙ্ক $=2x$;

$\therefore$ সংখ্যাটি $=10x+2x$

$=12x$.

কাজেই, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে,

$$(x+2x)-2=\frac{12x}{6}\text{; অথবা, } 18x-12=12x\text{;}$$

$$\text{অথবা, } 6x=12\text{; } \therefore\ x=2.$$

সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা = 24.

প্রশ্নমালা 80

1. একখানি জমির দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের দ্বিগুণ; উহা অপেক্ষা দৈর্ঘ্যে 50 গজ এবং প্রস্থে 10 গজ বড় আর একখানি জমির আয়তন পূর্ব্বোক্ত জমির আয়তন অপেক্ষা 6800 বর্গগজ বেশী। প্রত্যেকখানি জমির পরিমাণ নির্ণয় কর।

[The length of a field is twice its breadth ; another field which is 50 yds. longer and 10 yds. broader, contains 6800 square yds. more than the former ; find the size of each.]

2. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থ অপেক্ষা 3 ফুট বেশী। উহার দৈর্ঘ্য 3 ফুট বাড়াইলে এবং প্রস্থ 2 ফুট কমাইলে, উহার ক্ষেত্রফলের কোনরূপ পরিবর্ত্তন হয় না; ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

[The length of a room exceeds its breadth by 3 feet ; if the length had been increased by 3 feet, and the breadth diminished by 2 feet, the area would not have been altered ; find the dimensions.]

3. A ও B সমপরিমাণ অর্থ লইয়া খেলিতে আরম্ভ করিল; খেলায় B তাহার অর্থের $\frac{5}{11}$ অংশ হারিল এবং A, B এর অবশিষ্ট অর্থের অর্দ্ধ অপেক্ষা £6 বেশী লাভ করিল। প্রত্যেকে কত লইয়া খেলা আরম্ভ করিয়াছিল?

[A and B began to play with equal sums, and when B has lost $\frac{5}{11}$th of what he had to begin with, A has gained £6 more than half of what B has been left with ; what had they at first ?]

4. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 80 বৎসর; আবার, পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ করিলে উহা পিতার বয়স অপেক্ষা 10 বৎসর বেশী হয়; প্রত্যেকের বয়স নির্ণয় কর।

[The ages of a father and his son together are 80 years ; and if the age of the son be doubled, it will exceed the father's age by 10 years. Find the age of each.]

5. এক ব্যক্তি 36 জন পুরুষ ও স্ত্রীলোকের মধ্যে £5 এরূপে ভাগ করিয়া দিল যে, প্রত্যেক পুরুষ 3 শি. এবং প্রত্যেক স্ত্রীলোক 2 শি. 6 পে. করিয়া পাইল। পুরুষের সংখ্যা ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

[A person distributed £5 among 36 persons, men and women,

giving 3*s*. to each man and 2*s*. 6*d*. to each woman. How many were there of each ?]

6. 154 মাইল দূরবর্ত্তী দুইটি স্থান হইতে যথাক্রমে A ও B নামক দুই ব্যক্তি পথিমধ্যে মিলিত হইবার নিমিত্ত একই সময়ে যাত্রা করিল ; A, প্রতি দুই ঘণ্টায় 3 মাইল হিসাবে এবং B, প্রতি চারি ঘণ্টায় 5 মাইল হিসাবে গমন করিলে, তাহারা কখন এবং কোথায় মিলিত হইল ?

[There are two places, 154 miles distant from each other, from which two persons A and B set out at the same instant with a design to meet on the road, A travelling at the rate of 3 miles in 2 hours and B at the rate of 5 miles in 4 hours. How long and how far did each travel before they met ?]

7. একজন মজুরকে 36 দিনের জন্য এই সর্ত্তে কাজে নিযুক্ত করা হইল যে, তাহার কাজের জন্য সে দৈনিক 2 শি. 6 পে. করিয়া পাইবে, কিন্তু অনুপস্থিত হইলে, প্রত্যেক দিনের জন্য তাহাকে 1 শি. 6 পে. করিয়া ক্ষতিপূরণ দিতে হইবে। নির্দ্দিষ্ট সময়ের পর সে মোট 58 শি. পাইয়া থাকিলে, সে কতদিন কাজ করিয়াছিল ?

[A labourer was engaged for 36 days, upon the condition that he should receive 2*s*. 6*d*. for every day he worked, but should pay 1*s*. 6*d*. for every day he was idle. At the end of the time he received 58*s*. How many days did he work ?]

8. এক ব্যক্তি যে মূল্যে একখানি ছবি কিনিলেন, সেই পরিমাণ খরচেই উহা বাঁধাইলেন ; যদি বাঁধাই খরচ £1 কম এবং ছবির মূল্য 15 শি. বেশী হইত, তাহা হইলে বাঁধাই খরচ ছবির মূল্যের ঠিক অর্দ্ধ হইত ; ছবির মূল্য নির্ণয় কর।

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1860]

[A person bought a picture at a certain price and paid the same price for the frame ; if the frame had cost £1 less and the picture 15*s*. more, the price of the frame would have been only half that of the picture. Find the cost of the picture.]

9. একটি খুঁটির এক-চতুর্থাংশ কাদার ভিতর, এক-তৃতীয়াংশ জলের ভিতর এবং 10 ফুট জলের উপরে আছে। খুঁটিটির দৈর্ঘ্য কত ? [কলিঃ প্রবেশিকা, 1863]

[A post has a fourth of its length in the mud, a third of its length in the water and 10 feet above the water, what is its length ?]

10. একজন মজুরকে 30 দিনের জন্য এই সর্ত্তে কাজে নিযুক্ত করা হইল যে, কাজ করিলে প্রতিদিন সে 2 শি. 6 পে. করিয়া পাইবে এবং কাজ না করিলে প্রতিদিনের জন্য

তাহার এক শিলিং করিয়া কাটা যাইবে। সে মোট 2 পা. 7 শি. পাইয়া থাকিলে, কতদিন সে কাজ করিয়াছিল এবং কতদিনই বা সে বসিয়া কাটাইয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।

[A labourer is engaged for 30 days on condition that he receives 2*s*. 6*d*. for each day he works, and loses 1*s*. for each day he is idle ; he receives £2. 7*s*. in all. How many days does he work, and how many days is he idle ?]

11. A একটি কাজ 9 দিনে শেষ করিতে পারে, B এর উহা করিতে দ্বিগুণ সময় লাগে, এবং C একদিনে A এর দৈনিক কাজের পরিমাণের $\frac{3}{4}$ অংশ করিতে পারে। A, B, C একত্রযোগে কাজ করিলে, কতদিনে উহা শেষ করিতে পারিবে ?

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1876]

[A can do a piece of work in 9 days, B in twice that time ; C can do only $\frac{3}{4}$ as much as A, in a day ; how long would A, B and C, working together, require to do the same piece of work ?]

12. £54. 12 শি. এর ভিতর যত সংখ্যক পাউণ্ড ঠিক তত সংখ্যক শিলিং আছে ; প্রত্যেকের সংখ্যা নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1885]

[Two sums of money are together equal to £54. 12*s*. and there are as many pounds in the one as shillings in the other. What are the sums ?]

13. A, B ও C এর মধ্যে কতক পরিমাণ অর্থ এরূপভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে, A সমস্ত অর্থের অর্দ্ধ অপেক্ষা £30 কম, B সমস্ত অর্থের এক-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা £10 কম এবং C সমস্ত অর্থের এক-চতুর্থাংশ অপেক্ষা £8 বেশী পাইল। প্রত্যেকে কত করিয়া পাইল ?

[A certain sum is to be divided among A, B and C. A is to have £30 less than the half, B is to have £10 less than the third part, and C is to have £8 more than the fourth part. What does each receive ?]

14. একজন লোক কতকগুলি ভেড়া কিনিতে যাইয়া দেখিতে পাইল যে, প্রতি ভেড়া £2. 2 শি. দরে কিনিলে ভেড়াগুলির মোট মূল্য দিতে তাহার £1. 8 শি. কম পড়িবে ; কিন্তু প্রতি ভেড়া £2 দরে কিনিতে পারিলে, উহাদের মূল্য দেওয়ার পর তাহার তহবিলে £2 উদ্বৃত্ত থাকিবে। সে কতগুলি ভেড়া কিনিতে গিয়াছিল এবং তাহার তহবিলেই বা কত ছিল ?

[A man wishing to purchase a number of sheep, found that if they cost him £2. 2*s*. a head, he would not have money enough by £1. 8*s*. ; but if they cost him £2 a head, he would then have £2 more than he required. Find the number of sheep, and the money which he had.]

15. ইয়র্ক এবং লণ্ডন, 200 মাইল দূরবর্তী এই দুইটি শহর হইতে দুইখানা গাড়ী একই সময়ে রওনা হইল; একখানা ঘণ্টায় $9\frac{1}{2}$ মাইল এবং অন্যখানা ঘণ্টায় $9\frac{1}{4}$ মাইল বেগে চলিতে থাকিলে, রওনা হওয়ার কতক্ষণ পরে এবং কতদূরে তাহারা মিলিত হইবে ?

[Two coaches start at the same time from York and London, a distance of 200 miles, travelling, one at $9\frac{1}{2}$ miles an hour, the other at $9\frac{1}{4}$. Where will they meet and in what time from starting ?]

16. আমি কতকগুলি আতা প্রতি পেনিতে তিনটি দরে এবং উহার $\frac{5}{6}$-সংখ্যক আতা প্রতি পেনিতে চারিটি দরে কিনিয়া, একত্রে প্রতি 6 পেন্সে 16 টি দরে সমস্ত আতা বিক্রয় করিয়া মোট $3\frac{1}{2}$ পেন্স লাভ করিলাম। আমি কতগুলি আতা কিনিয়াছিলাম ?

[I bought a certain number of pine-apples at three a penny, and five-sixths of that number at four a penny ; by selling them at sixteen for six pence I gained $3\frac{1}{2}d.$ How many pine-apples did I buy ?]

17. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 5, এবং বামদিকের অঙ্কটির সহিত 1 যোগ করিলে, যোগফল সংখ্যাটির এক-অষ্টমাংশ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[A number consists of two digits ; the sum of the digits is 5, and if the left digit be increased by 1 it will be equal to $\frac{1}{8}$th of the number. Find the number.]

18. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার দশকস্থানীয় অঙ্কটি এককস্থানীয় অঙ্কটি অপেক্ষা 5 বড়; এবং সংখ্যাটি হইতে অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির পাঁচগুণ বিয়োগ করিলে সংখ্যাস্থিত অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[A number consists of two digits, the digit in the ten's place exceeds that in the unit's place by 5, and if 5 times the sum of the digits be subtracted from the number, the digits will be inverted. Find the number.]

19. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 5 এবং দশকস্থানীয় অঙ্কটির দশগুণের সহিত এককস্থানীয় অঙ্কটির চতুর্গুণ যোগ করিলে, সংখ্যাস্থিত অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[There is a number, the sum of whose digits is 5, and if 10 times the digit in the place of ten be added to 4 times the digit in the place of unit, the number will be inverted. What is the number ?]

20. 39 কে এরূপ চারি ভাগে ভাগ কর যে, প্রথম ভাগের সহিত 1 যোগ করিলে, দ্বিতীয় ভাগ হইতে 2 বাদ দিলে, তৃতীয় ভাগকে 3 দ্বারা গুণ করিলে, এবং চতুর্থ ভাগকে 2 দ্বারা ভাগ করিলে, লব্ধ ফলগুলি পরস্পর সমান হইবে।

[Divide the number 39 into four parts, such that if the first be increased by 1, the second diminished by 2, the third multiplied by 3, and the fourth divided by 4, the results will all be equal.]

21. 60 কে এরূপ চারি ভাগে ভাগ কর যে, প্রথম ভাগ হইতে 3 বাদ দিলে, দ্বিতীয় ভাগের সহিত 11 যোগ করিলে, তৃতীয় ভাগকে 4 দ্বারা গুণ করিলে, এবং চতুর্থ ভাগকে 2 দ্বারা ভাগ করিলে, লব্ধ ফলগুলি পরস্পর সমান হইবে।

[Divide 60 into four parts, such that if the first be diminished by 3, the second increased by 11, the third multiplied by 4, and the fourth divided by 2, the results will all be equal.]

22. 116 কে এরূপ চারি ভাগে ভাগ কর যে, প্রথম ভাগের সহিত 5 যোগ করিলে, দ্বিতীয় ভাগ হইতে 4 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় ভাগকে 3 দ্বারা গুণ করিলে, এবং চতুর্থ ভাগকে 2 দ্বারা ভাগ করিলে, লব্ধ ফলগুলি পরস্পর সমান হইবে।

[Divide the number 116 into four such parts that if the first be increased by 5, the second diminished by 4, the third multiplied by 3, and the fourth divided by 2, the result in each case will be the same.]

I. (b) প্রশ্নাবলীজাত সরল সমীকরণ (জটিল)

164. যে সকল প্রশ্নাবলী হইতে সরল সমীকরণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমাধানের সাধারণ নিয়ম পূর্ব্বেই বর্ণিত হইয়াছে। এক্ষণে, ঐ জাতীয় জটিলতর প্রশ্নসম্পর্কে আলোচনা করা যাইবে।

পরবর্ত্তী উদাহরণগুলি দৃষ্টান্তস্বরূপ সন্নিবেশিত হইল।

উদা. 1. বেলা 1 টা ও 2 টার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটি এক মিনিট সময়-সূচক ব্যবধানে থাকিবে?

[At what time between 1 o'clock and 2 o'clock there will be just one minute-division between the hands of a clock ?]

ধর, 1 টা বাজিয়া x মিনিটের সময় ঘড়ির কাঁটা দুইটি উল্লিখিত ব্যবধানে রহিয়াছে।

তাহা হইলে নির্ণেয় সময়ে মিনিটের কাঁটাটি 12 টার দাগ হইতে x মিনিট দূরে অবস্থিত। এখন যেহেতু মিনিটের কাঁটা, ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা বারগুণ দ্রুতগতিতে চলে, অতএব, মিনিটের কাঁটা যতক্ষণে x-মিনিট পরিমিত স্থান অতিক্রম করে, ঘণ্টার কাঁটাটি ততক্ষণে এক মিনিট-সূচক দাগের $\frac{x}{12}$ অংশ পরিমিত স্থান অতিক্রম করে। কাজেই নির্ণেয় সময়ে ঘণ্টার কাঁটাটি 12 টার দাগ হইতে $\left(5+\frac{x}{12}\right)$ মিনিট দূরে অবস্থিত।

যেহেতু প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, নির্ণেয় সময়ে কাঁটা দুইটির ভিতর এক মিনিট ব্যবধান রহিয়াছে,

$$\text{অতএব,}\quad x=\left(5+\frac{x}{12}\right)\pm 1.$$

[মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার অগ্রবর্ত্তী হইলে, উপরিলিখিত দ্ব্যর্থকচিহ্নের মধ্যে '+' চিহ্নটি, এবং পশ্চাদ্বর্ত্তী হইলে, '−' চিহ্নটি লইতে হইবে।]

$$\therefore\ \tfrac{11}{12}x=5\pm 1=6,\quad \text{অথবা,}\ 4;$$

$$\therefore\quad x=\tfrac{72}{11}=6\tfrac{6}{11},\quad \text{অথবা,}\ =\tfrac{48}{11}=4\tfrac{4}{11}.$$

অতএব, 1 টা বাজিয়া $4\frac{4}{11}$ মিনিটের সময়, অথবা, $6\frac{6}{11}$ মিনিটের সময়, ঘড়ির কাঁটা দুইটি এক মিনিট ব্যবধানে থাকিবে।

উদা. 2. দুইটি স্থান, P ও Q, পরস্পর $3\frac{1}{2}$ মাইল দূরে অবস্থিত। A ও B দুই ব্যক্তি P হইতে, A গাড়ীতে ঘণ্টায় 6 মাইল গতিতে এবং B পায়ে হাঁটিয়া ঘণ্টায় 3 মাইল গতিতে Q অভিমুখে যাত্রা করিল। Q তে পৌছিবার পর A তথায় 15 মিনিট বিশ্রাম করিয়া পুনরায় গাড়ীতে P অভিমুখে রওনা হইলে, সে B এর সহিত কোন্ স্থানে মিলিত হইবে? [কলিঃ প্রবেশিকা, 1882]

[The distance between two places P and Q is $3\frac{1}{2}$ miles. Two persons, A and B, start together from P to go to Q, the former by carriage travelling at the rate of 6 miles per hour, the latter walking at the rate of 3 miles per hour. If A remains at Q for 15 minutes, and returns by the carriage to P, find where he will meet B.]

ধর, যে স্থানে A ও B মিলিত হইল, সেই স্থান P হইতে x মাইল দূরে অবস্থিত; তাহা হইলে B যতক্ষণে x মাইল পথ অতিক্রম করিল, A ততক্ষণে Q তে পৌছিয়া তথায় 15 মিনিট বিশ্রামের পর পুনরায় $(3\frac{1}{2}-x)$ মাইল পথ ভ্রমণ করিল। স্পষ্টতঃ, A এর এই সকল করিতে $\left(\frac{3\frac{1}{2}}{6}+\frac{1}{4}+\frac{3\frac{1}{2}-x}{6}\right)$ ঘণ্টা সময় লাগিয়াছে; এবং B এর x মাইল যাইতে $\frac{x}{3}$ ঘণ্টা লাগিয়াছে।

$$\therefore\quad \frac{3\frac{1}{2}}{6}+\frac{1}{4}+\frac{3\frac{1}{2}-x}{6}=\frac{x}{3};$$

$$\text{অথবা,}\quad 7+3+(7-2x)=4x;$$

$$\therefore\ 6x=17;\ \therefore\ x=2\tfrac{5}{6}.$$

অতএব, P হইতে $2\frac{5}{6}$ মাইল দূরে, B এর সহিত A মিলিত হইবে।

উদা. 6. AB, 220 মাইল দীর্ঘ একটি রেলপথ। তিনখানা রেলগাড়ী P, Q ও R ঘণ্টায় যথাক্রমে 25, 20 ও 30 মাইল গতিতে ঐ পথে চলে। P ও Q যথাক্রমে 7 A.M ও 8-15 A.M. এ A হইতে B অভিমুখে, এবং R, 10-30 A.M. এ B হইতে A অভিমুখে ছাড়িল। কোথায় এবং কোন্ সময় Q এবং R হইতে P সমদূরবর্ত্তী হইবে?

[AB is a railway 220 miles long, and three trains P, Q, R, travel upon it at the rate of 25, 20 and 30 miles per hour respectively ; P and Q leave A at 7 A.M. and 8-15 A.M respectively, and R leaves B at 10-30 A.M. When and where will P be equidistant from Q and R ?]

A Q P R B

মনে কর, উপরিস্থিত চিত্রানুরূপ অবস্থানে P গাড়ীখানি Q ও R হইতে সমদূরবর্ত্তী এবং R গাড়ীখানি B হইতে রওনা হইবার (অর্থাৎ, 10-30 A.M. এর) x ঘণ্টা পরে উহারা উপরিউক্ত অবস্থানে আসিয়াছে।

যেহেতু 10-30 A.M. এর $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পূর্ব্বে P গাড়ীখানি A হইতে রওনা হইয়াছে, অতএব, উহা রওনা হইবার পর $(3\frac{1}{2}+x)$ ঘণ্টা চলিয়া উপরিউক্ত অবস্থানে আসিয়াছে।

কাজেই, $AP=(3\frac{1}{2}+x).25$ মাইল ;

এবং, $AQ=(2\frac{1}{4}+x).20$ মাইল ;

আবার, $BR=30x$ মাইল।

$\therefore$ $PQ=AP-AQ=\{(3\frac{1}{2}+x).25-(2\frac{1}{4}+x).20\}$ মাইল।

এবং, $PR=AB-AP-BR=\{220-(3\frac{1}{2}+x).25-30x\}$ মাইল।

কিন্তু, $PQ=PR$;

$\therefore$ $(3\frac{1}{2}+x).25-(2\frac{1}{4}+x).20=220-(3\frac{1}{2}+x).25-30x$;

$\therefore$ $50.(3\frac{1}{2}+x)-(2\frac{1}{4}+x).20=220-30x$;

$\therefore$ $60x=220-175+45=90$; $\quad x=1\frac{1}{2}$.

অতএব, 10-30 A.M. এর $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে অর্থাৎ 12 টার সময়, P গাড়ীখানি Q ও R হইতে সমদূরবর্ত্তী হইবে।

আবার, যেহেতু P, 7 টার সময় A হইতে রওনা হইয়াছে, অতএব, 12 টার সময় উহা A হইতে 5×25 অর্থাৎ 125 মাইল দূরে থাকিবে।

উদা. 7. দুইজন যাত্রীর সঙ্গে মোট 5 হন্দর ওজনের মাল ছিল, এবং প্রত্যেকে যত পরিমাণ মাল বিনা ভাড়ায় লইয়া যাইতে পারে, তাহা বাদে তাহাদের যথাক্রমে 5 শি. 2 পে. ও 9 শি. 10 পে. মালের ভাড়া বাবদ দিতে হইল। কিন্তু, সমস্ত মালই একজনের

হইলে, তাহাকে উদ্বৃত্ত মালের ভাড়া বাবদ 19 শি. 2 পে. দিতে হইত। প্রত্যেকের সঙ্গে কত ওজনের মাল ছিল ? এবং কত পরিমাণ মাল প্রত্যেকে বিনা ভাড়ায় লইতে পারিত ?

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1877]

[Two passengers have together 5 cwt. of luggage and are charged for the excess above the weight allowed 5*s*. 2*d*. and 9*s*. 10*d*. respectively ; but if the luggage had all belonged to one of them, he would have been charged 19*s*. 2*d*. How much luggage had each passenger ? And how much luggage is each passenger allowed to carry free of charge ?]

ধর, প্রত্যেকে x হন্দর ওজনের মাল বিনা ভাড়ায় লইয়া যাইতে পারিত।

তাহা হইলে (5 শি. 2 পে.) + (9 শি. 10 পে.) = $(5-2x)$ হন্দরের ভাড়া ;

$\therefore\ \dfrac{15\times 12}{5-2x}$ পে. = এক হন্দরের ভাড়া।

আবার, 19 শি. 2 পে. = $(5-x)$ হন্দরের ভাড়া ;

$\therefore\ \dfrac{230}{5-x}$ পে. = এক হন্দরের ভাড়া।

অতএব, $\dfrac{15\times 12}{5-2x}=\dfrac{230}{5-x}$; $\therefore\ 18(5-x)=23(5-2x)$;

অথবা, $28x=115-90=25$; $\therefore\ x=\frac{25}{28}$.

অতএব, বিনা ভাড়ায় লওয়া যাইতে পারে, এরূপ মালের ওজন

= $\frac{25}{28}$ হন্দর = $\frac{25}{28}\times 4\times 28$ পা. = 100 পা. ;

এবং এক হন্দরের ভাড়া = $\dfrac{230}{5-x}$ পে. = $\dfrac{230}{5-\frac{25}{28}}$ পে. = $\dfrac{230\times 28}{5\times 23}$ পে. = 56 পে.।

যেহেতু প্রথম যাত্রীর উদ্বৃত্ত মালের ভাড়া = 5 শি. 2 পে. = 62 পে.,

এবং, দ্বিতীয় যাত্রীর উদ্বৃত্ত মালের ভাড়া = 9 শি. 10 পে. = 118 পে.,

অতএব, প্রথম যাত্রীর উদ্বৃত্ত মালের ওজন = $\frac{62}{56}$ হন্দর = $\frac{62}{56}\times 4\times 28$ পা. = 124 পা. ;

এবং, দ্বিতীয় যাত্রীর উদ্বৃত্ত মালের ওজন = $\frac{118}{56}$ হন্দর = $\frac{118}{56}\times 4\times 28$ পা. = 236 পা.।

সুতরাং, প্রথম যাত্রীর মোট মালের ওজন = (100 + 124) পা. = 224 পা. ;

এবং, দ্বিতীয় যাত্রীর মোট মালের ওজন = (100 + 236) পা. = 336 পা.।

উদা. 8. কোন ব্যক্তি, প্রতি পাউণ্ড 3 শি. দরে কতক পরিমাণ এবং প্রতি পাউণ্ড 5 শি. দরে কতক পরিমাণ, চা ক্রয় করিয়া উভয় প্রকার চা এরূপভাবে সংমিশ্রণ করিল যে, মিশ্রিত চাএর প্রতি পাউণ্ড 3 শি. 8 পে. দরে বিক্রয় করিলে, প্রতি পাউণ্ডে

তাহার শতকরা 10 শি. হিসাবে লাভ হইতে পারে। ভাল চাএর প্রতি পাউণ্ডের সহিত সে কত পরিমাণ খারাপ চা মিশাইয়াছিল ?

[A person buys some tea at 3 shillings a pound and some at 5 shillings a pound ; he wishes to mix them up, so that by selling the mixture at 3*s*. 8*d*. a pound he may gain 10 per cent. on each pound sold. Find how many pounds of the inferior tea he must mix with each pound of the superior.]

ধর, ভাল চাএর এক পাউণ্ডের সহিত সে x পাউণ্ড খারাপ চা মিশ্রিত করিয়াছিল।

এখন, এক পাউণ্ড ভাল চা ও x পাউণ্ড খারাপ চাএর

মোট ক্রয়-মূল্য $=(3x+5)$ শি. ;

$\therefore$ মিশ্রিত চাএর প্রতি পাউণ্ডের ক্রয়-মূল্য $=\dfrac{3x+5}{x+1}$ শি.।

কিন্তু, মিশ্রিত চাএর প্রতি পাউণ্ড $3\frac{2}{3}$ শি. দরে বিক্রয় করিলে, তাহার শতকরা 10 শি. লাভ হইবে ; অর্থাৎ, প্রতি 100 শি. এর দরুণ সে 110 শি., অথবা প্রতি শিলিং এর দরুণ সে $\frac{11}{10}$ শি. করিয়া পাইবে।

কাজেই, $3\frac{2}{3}$ শি. = মিশ্রিত চাএর ক্রয়-মূল্যের $\frac{11}{10}$ অংশ ;

$$\therefore \quad 3\frac{2}{3}=\frac{11}{10}\times\frac{3x+5}{x+1}; \quad \text{অথবা,}\ \frac{11}{3}=\frac{11}{10}\times\frac{3x+5}{x+1};$$

অথবা, $10(x+1)=3(3x+5)$; $\therefore\ x=5$.

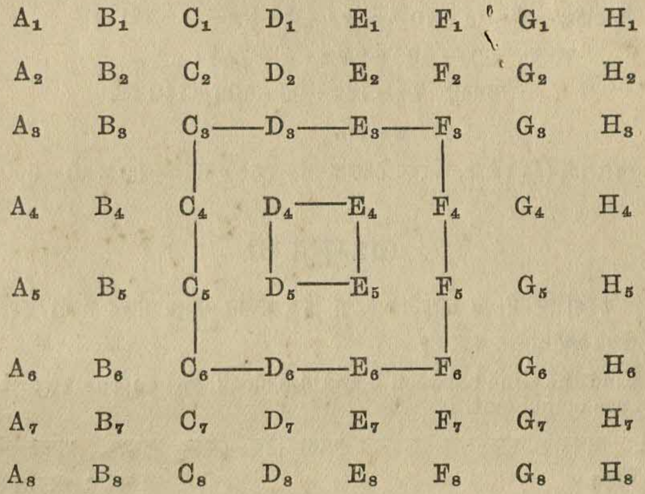
অতএব, ভাল চাএর প্রতি পাউণ্ডের সহিত সে 5 পাউণ্ড খারাপ চা মিশাইয়াছিল।

উদা. 9. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার অধীনস্থ সৈন্যগণদ্বারা 5-গভীরতাবিশিষ্ট (5-deep) এক শূন্যগর্ভ বর্গ (hollow square) রচনা করিতে পারেন, অথবা, 6-গভীরতা-বিশিষ্ট (6-deep) এক শূন্যগর্ভ বর্গও রচনা করিতে পারেন ; কিন্তু, প্রথমোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা হইতে শেষোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা 4 কম। ঐ দলে মোট কত সৈন্য ছিল ?

[An officer can form his men into a hollow square 5-deep and also into a hollow square 6-deep ; but the front in the latter formation contains 4 men fewer than in the former ; find the number of men.]

[যদি কয়েকজন লোককে, কতকগুলি সমান্তর ও সমভাবে স্থিত বিভিন্ন সারিতে এরূপে সাজান যায় যে, প্রত্যেক সারির লোকসংখ্যা, মোট সারির সংখ্যার সমান, তাহা হইলে ঐ লোকদিগকে একটি সম্পূর্ণ

বর্গে (in a solid square) সাজান হইল, বলা হয়। নিম্নপ্রদত্ত চিত্র হইতে, এইরূপ বর্গ-রচনার পরিষ্কার ধারণা হইবে। এক্ষেত্রে, A_1, B_1, C_1 প্রভৃতি এক একজন লোক নির্দ্দেশ করিতেছে।



চিত্রে প্রদর্শিত সম্পূর্ণ বর্গে (solid square এ) সর্ব্বশুদ্ধ আটটি সারি এবং প্রত্যেক সারিতে আটজন করিয়া লোক আছে। এই বর্গের অভ্যন্তর হইতে, $C_3F_3F_6C_6$ সম্পূর্ণ বর্গটি অপসারিত করা হইলে, অবশিষ্টাংশকে 2-**গভীরতাবিশিষ্ট** একটি **শূন্যগর্ভ বর্গ** (hollow square, two-deep) বলা হয়; স্পষ্টতঃ, ইহারও সম্মুখ-সারির লোকসংখ্যা ৪; কিন্তু, $C_3F_3F_6C_6$ বর্গটির পরিবর্ত্তে যদি $D_4E_4E_5D_5$ বর্গটি অপসারিত করা হইত, তাহা হইলে অবশিষ্টাংশকে 3-গভীরতাবিশিষ্ট (three-deep) একটি শূন্যগর্ভ বর্গ (hollow square) বলা হইত; বলা বাহুল্য যে, এস্থলেও সম্মুখ-সারির লোকসংখ্যা ৪ই থাকিত।

অতএব দেখা যায় যে, সম্মুখ-সারিতে x-সংখ্যক লোক-সমন্বিত, এবং 2-গভীরতাবিশিষ্ট (two-deep) কোন শূন্যগর্ভ বর্গের লোকসংখ্যা$=x^2-(x-4)^2$ ঐরূপ 3-গভীরতাবিশিষ্ট (three-deep) কোন শূন্যগর্ভ বর্গের লোকসংখ্যা$=x^2-(x-6)^2$; ইত্যাদি।

কাজেই, যে শূন্যগর্ভ বর্গের (hollow square এর) সম্মুখ-সারির লোকসংখ্যা x, এবং যাহার গভীরতা (depth) n, সেই শূন্যগর্ভ বর্গের লোকসংখ্যা$=x^2-(x-2n)^2$.]

ধর, উদাহরণোল্লিখিত প্রথমোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা$=x$; তাহা হইলে শেষোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা, স্পষ্টতঃ, $=x-4$.

কাজেই, প্রথমোক্ত বর্গের সৈন্যসংখ্যা$=x^2-(x-10)^2$; ... ... (1)

এবং শেষোক্ত বর্গের সৈন্যসংখ্যা$=(x-4)^2-\{(x-4)-12\}^2$. ... (2)

এখন, যেহেতু একই সৈন্যদল হইতে উভয় প্রকার বর্গ রচনা হইতে পারে, অতএব, মোট সৈন্যসংখ্যা উভয় ক্ষেত্রেই এক।

স্থতরাং, $x^2-(x-10)^2=(x-4)^2-\{(x-4)-12\}^2$;

অথবা, $20x-100=24(x-4)-144$;

অথবা, $4x=144+96-100=140$;

$\therefore \quad x=35.$

কাজেই, (1) হইতে, নির্ণেয় সৈন্যসংখ্যা $=35^2-25^2=60\times10=600.$

প্রশ্নমালা 81

1. বেলা তিনটা ও চারিটার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটির একটি, অপরটির উপর সমাপতিত হইবে ?

[Find the time between 3 and 4 o'clock, when the two hands of a watch are coincident.]

2. অপরাহ্ণ পাঁচটা ও ছয়টার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে, ঘড়ির কাঁটা দুইটি একত্রিত হইবে ? [কলিঃ প্রবেশিকা, 1886]

[At what time are the hands of a watch together between 5 and 6 o'clock ?]

3. বেলা সাতটা ও আটটার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটি (i) পরস্পর-বিপরীতমুখী, (ii) পরস্পর-লম্ব, (iii) একত্রিত, হইবে ?

[Find the respective times between 7 and 8 o'clock, when the hour and minute hands of a watch are (i) exactly opposite to each other; (ii) at right angles to each other ; (iii) coincident.]

4. ছয়টা বাজিবার পর সর্ব্বপ্রথম কোন্ সময়ে, ঘড়ির কাঁটা দুইটি (i) পরস্পর-বিপরীতমুখী, (ii) পরস্পর-লম্ব, হইবে ?

[What is the *first* hour after 6 o'clock, at which the two hands of a watch are (i) directly opposite, and (ii) at right angles to each other ?]

5. দুই ব্যক্তির একজন, A হইতে B অভিমুখে ঘণ্টায় p মাইল গতিতে, এবং অন্যজন B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টায় q মাইল গতিতে, চলিতে লাগিল ; উহারা একই সময়ে যাত্রা করিয়া থাকিলে এবং A ও B এর দূরত্ব a মাইল হইলে, A হইতে কতদূরে উহারা পরস্পরের সহিত মিলিত হইবে ?

[Two men set out at the same time to walk, one from A to B, and the other from B to A, a distance of a miles. The former walks at

the rate of p miles and the latter at the rate of q miles an hour ; at what distance from A will they meet ?]

6. দুই ব্যক্তি পরস্পর সাক্ষাৎ করিবার জন্য 22 মাইল দূরবর্ত্তী দুইটি স্থান হইতে যথাক্রমে ঘণ্টায় 5 মাইল ও 6 মাইল গতিতে চলিতে আরম্ভ করিল ; তাহারা প্রথম সাক্ষাতের পরও (পুনর্ব্বার সাক্ষাতের জন্য) বরাবর চলিতে থাকিলে, কোথায় ও কোন্ সময়ে, তাহারা পুনরায় মিলিত হইবে ?

[Two persons walk at the rate of 5 and 6 miles an hour respectively. They set out to meet each other from two places 22 miles apart. Having passed each other once, find the place of their *second* meeting, supposing them to continue their journey between the two places. Also find the time when the second meeting takes place.]

7. কোন ব্যক্তি ঘোড়ায় চড়িয়া A হইতে B পর্য্যন্ত যাইতে এক-তৃতীয়াংশ পথ ঘণ্টায় a মাইল গতিতে এবং বাকী পথ ঘণ্টায় $2b$ মাইল গতিতে অতিক্রম করিল ; সে যদি প্রথম হইতে বরাবর ঘণ্টায় $3c$ মাইল গতিতে চলিত, তাহা হইলে সে ঐ সময়ের মধ্যে B তে পৌছিয়া পুনরায় A তে ফিরিয়া আসিতে পারিত।

প্রমাণ কর যে, $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889]

[A man rides one-third of the distance from A to B at the rate of a miles per hour and the remainder at the rate of $2b$ miles per hour. If he had travelled at a uniform rate of $3c$ miles per hour he could have ridden from A to B and back again in the same time.

Prove that $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.]

8. কোন দৌড়-প্রতিযোগিতায় A, B কে পাঁচ মিনিটে 75 গজ পিছনে ফেলিয়া 900 গজ পথ অতিক্রম করিল ; কিন্তু এই সময়, A হঠাৎ পড়িয়া যাইয়া, পূর্ব্ব বেগ অপেক্ষা মিনিটে 20 গজ কম দৌড়াইয়াও, B এর মাত্র অর্দ্ধ মিনিট পরে গন্তব্যস্থানে পৌছিল। মোট কত সময়ের জন্য প্রতিযোগিতা চলিয়াছিল ?

[A and B start to run a race. At the end of 5 minutes, when A has run 900 yards and has outstripped B by 75 yards, he falls ; but though he loses ground by the accident, and for the rest of the course makes 20 yards a minute less than before, he comes in only half a minute behind B. How long did the race last ?]

9. কোন শহর হইতে এক ব্যক্তি কোন নির্দ্দিষ্ট সময়ে এক নির্দ্দিষ্ট স্থানে পৌঁছিবার নিমিত্ত যাত্রা করিয়া এক-চতুর্থাংশ পথ অতিক্রম করিবার পর বুঝিতে পারিল যে, সে ঐরূপ বেগে চলিতে থাকিলে নির্দ্দিষ্ট সময়ে গন্তব্যপথের কেবলমাত্র $\frac{5}{6}$ অংশ

যাইতে পারিবে ; তৎপরে, সে ঘণ্টায় এক মাইল হিসাবে তাহার গতি বাড়াইয়া ঠিক সময়েই নির্দ্দিষ্ট স্থানে পৌছিল। তাহার ভ্রমণের গতি নির্ণয় কর।

[A person sets out to walk from a certain town ; but when he has accomplished a quarter of his journey, he finds that if he continues at the same pace he will have gone only $\frac{5}{8}$ths of the whole distance when he ought to be at his destination. He, therefore, increases his speed by a mile an hour, and arrives just in time. Find the rate of walking.]

10. কোন প্রজা বাৎসরিক খাজনা বাবদ নগদ £80 এবং কতক পরিমাণ ধান দেওয়ার চুক্তিতে কতক জমি পত্তন লইল। ধানের দর যখন প্রতি বুসেল্ £1. 5 শি., তখন তাহার জমির খাজনা গড়ে প্রতি একরে £1. 15 শি. করিয়া পড়িত ; এবং ধান যখন প্রতি বুসেল্ £1. 10 শি. দরে বিক্রয় হইত, তখন তাহার জমির খাজনা গড়ে প্রতি একরে £2 করিয়া পড়িত। কত বুসেল্ ধান তাহাকে খাজনা বাবদ দিতে হইত ?

[A tenant hired his farm for £80 a year in money and a corn-rent in paddy. When paddy sold at £1. 5*s*. a bushel, he paid at the rate of £1. 15*s*. an acre for his land ; when it sold at £1. 10*s*. a bushel, he paid at the rate of £2 an acre. Find the number of bushels of paddy in the rent.]

11. কোন চাপরাসীকে বাৎসরিক £8 ও একটি অফিস-পরিচ্ছদ দেওয়ার চুক্তিতে কাজে নিযুক্ত করিয়া, 7 মাস পরে নগদ £2. 3 শি. 4 পে. ও অফিস-পরিচ্ছদ দিয়া কাজ হইতে বরখাস্ত করা হইল। অফিস-পরিচ্ছদের মূল্য কত ছিল ?

[A footman who contracted for £8 a year and a livery suit, was turned away at the end of 7 months and received only £2. 3*s*. 4*d*. and his livery. What was its value ?]

12. একটি খরগোস 50 লাফে যতদূর পথ অতিক্রম করিতে পারে, ততদূর হইতে একটি কুকুর খরগোসটিকে ধরিবার জন্য দৌড়াইতে লাগিল। কুকুর যে সময়ে তিনবার লাফ দেয়, খরগোস সে সময়ে চারিবার লাফ দেয় ; কিন্তু কুকুর দুই লাফে যতদূর যায়, খরগোস তিন লাফে ততদূর যায়। কুকুর কতবার লাফ দেওয়ার পর খরগোসটিকে ধরিবে ?

[A hare, 50 of her leaps before a greyhound, takes 4 leaps to the greyhound's 3 ; but 2 of the greyhound's leaps are as much as 3 of the hare's. How many leaps must the greyhound take to catch the hare ?]

13. একটি কুকুর 60 লাফে যতদূর যাইতে পারে, ততদূর পিছন হইতে, সে একটি খরগোসকে ধরিবার জন্য দৌড়াইতে লাগিল। খরগোস যে সময়ে পাঁচবার লাফ দেয়, কুকুর সেই সময়ে চারিবার লাফ দেয় ; কিন্তু খরগোস চারি লাফে যতদূর যায়, কুকুর তিন লাফে ততদূর যায় ; খরগোসটি ধরা পড়িবার সময় পর্য্যন্ত, প্রত্যেকে কতবার লাফ দিয়াছিল ?

[A greyhound spying a hare at a distance of 60 of his own leaps

from him, pursues her, making 4 leaps for every 5 leaps of the hare ; but he passes over as much ground in 3 leaps as the hare does in 4. How many leaps did each make during the whole course ?]

14. 'সেণ্ট্ জন্' এর নৌকাখানি, 30 বার দাঁড় টানিয়া যতদূর অগ্রসর হইতে পারে, ততদূর পিছন হইতে 'কেয়াস্' এর নৌকা 'জন্' এর নৌকাটিকে ধরিবার জন্য উহার পশ্চাদ্‌গামী হইল। 'কেয়াস্' এর নৌকায় যে সময়ে তিনবার দাঁড় টানা হয়, 'জন্' এর নৌকায় সে সময়ে চারিবার দাঁড় টানা হয়; কিন্তু দুইবার দাঁড় টানায় 'কেয়াস্' এর নৌকা যতদূর যায়, তিনবার দাঁড় টানায় 'জন্' এর নৌকা ততদূর যায়। 'জন্' এর নৌকার সহিত সংঘর্ষ ঘটিবার সময় পর্য্যন্ত, 'কেয়াস্' এর নৌকায় কতবার দাঁড় টানা হইয়াছিল ?

[The St. John's boat is ahead of the Caius by a distance equivalent to 30 strokes of the former. The Johnians pull 4 strokes to 3 strokes of the Caius, but 2 of the latter are equivalent to 3 of the former. How many strokes must the Caius take to bump the St. John's boat ?]

15. A এবং B কতকগুলি শিলিংএ পরিপূর্ণ একটি থলিয়া পাইল। A উহা হইতে 2 শিলিং এবং অবশিষ্টের ছয়ভাগের একভাগ, এবং তৎপরে B, 3 শিলিং ও তদবশিষ্টের ছয়ভাগের একভাগ লইয়া দেখিতে পাইল যে, উভয়ই সমান অংশ লইয়াছে। থলিয়াটিতে কত-সংখ্যক শিলিং ছিল, এবং প্রত্যেকে কত করিয়া লইয়াছিল ?

[A and B find a purse with shillings in it. A takes out two shillings and one-sixth of what remains ; then B takes out three shillings and one-sixth of what remains ; and then they find that they have taken out equal shares. How many shillings were in the purse, and how many did each take ?]

16. নাবিকদের জন প্রতি এক পাউণ্ড হিসাবে 60 দিনের আহার্য্য বিস্কুট লইয়া সমুদ্রপথে কোন জাহাজ রওনা হইল। রওনা হওয়ার 20 দিন পরে, ঝড় ও বন্যায় 5 জন নাবিক ভাসিয়া গেল, এবং জাহাজখানিও এরূপ ক্ষতিগ্রস্ত হইল যে, উহাকে ঐ স্থানে 24 দিন বিলম্ব করিতে হইল। এইজন্য, প্রত্যেক নাবিকের দৈনিক আহার্য্য এক পাউণ্ডের $\frac{5}{7}$ অংশেতে পরিণত করিতে হইলে, কতজন নাবিক লইয়া জাহাজখানি রওনা হইয়াছিল ?

[A ship sails with a supply of biscuit for 60 days at a daily allowance of 1 pound a head ; after being at sea 20 days she encounters a storm in which 5 men are washed overboard and damage sustained, that will cause delay of 24 days, and it is found that each man's allowance must be reduced to $\frac{5}{7}$ths of a pound. Find the original number of the crew.]

17. জলের ভিতর ওজন করায়, 19 পাউণ্ড সোনা 18 পাউণ্ড হইলে, এবং 10 পাউণ্ড রূপা 9 পাউণ্ড হইলে, সোনা ও রূপা নির্ম্মিত একটি ডেলার ওজন যদি সাধারণভাবে (অর্থাৎ, বায়ুতে) 106 পাউণ্ড, এবং জলের ভিতর 99 পাউণ্ড হয়, তবে ডেলাটিতে কত পরিমাণ সোনা এবং কত পরিমাণ রূপা আছে, তাহা নির্ণয় কর।

[If 19 lbs. of gold weigh 18 lbs. in water, and 10 lbs. of silver weigh 9 lbs. in water, find the quantity of gold and silver in a mass of gold and silver weighing 106 lbs. in air and 99 lbs. in water.]

18. কোন লোক নৌকায় দাঁড় টানিয়া দশ ঘণ্টায় কেম্ব্রিজ (Cambridge) হইতে 20 মাইল দূরবর্ত্তী ইলি (Ely) শহর পর্য্যন্ত যাইয়া পুনরায় কেম্ব্রিজে ফিরিয়া আসিল; ঐ সময়ে স্রোতের গতি সর্ব্বক্ষণ একই দিকে ছিল। সে লক্ষ্য করিয়াছিল যে, স্রোতের অনুকূলে 3 মাইল পথ যাইতে, তাহার যে সময় লাগিয়াছিল, সেই সময়ে স্রোতের প্রতিকূলে সে মাত্র 2 মাইল পথ অতিক্রম করিতে পারিয়াছিল। কেম্ব্রিজ হইতে ইলি যাইতে তাহার কত সময় লাগিয়াছিল, এবং ইলি হইতে ফিরিয়া আসিতেই বা কত সময় লাগিয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।

[A person rows from Cambridge to Ely, a distance of 20 miles and back again in 10 hours, the stream flowing uniformly in the same direction all the time; and he finds that he can row 2 miles against the stream in the same time that he rows 3 miles with it. Find the time of his going and returning.]

19. কোন লোক তাহার জীবনের $\frac{1}{6}$ অংশ শৈশবে, $\frac{1}{12}$ অংশ যৌবনে এবং ($\frac{1}{7}$ অংশ + 5 বৎসর) বিবাহিত জীবন কাটাইবার পর, তাহার একটি পুত্র জন্মে। পুত্রটি পিতার অর্দ্ধ বয়সে মারা গেলে এবং পিতা তাহার পর আরও চারি বৎসর বাঁচিয়া থাকিলে, পুত্রটি কত বয়সে মারা গিয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।

[A person passed $\frac{1}{6}$th of his age in childhood, $\frac{1}{12}$th in youth, $\frac{1}{7}$th + 5 years in matrimony; he had then a son, whom he survived 4 years, and who reached only one-half the age of his father. Find the son's age when he died.]

20. দুইটি ধাতব শলাকার একটি 14 আউন্স রূপা ও 6 আউন্স টিন দ্বারা, এবং অপরটি 8 আউন্স রূপা ও 12 আউন্স টিন দ্বারা, নির্ম্মিত; সমান পরিমাণ রূপা ও টিন দ্বারা নির্ম্মিত 20 আউন্স ওজনের একটি শলাকা তৈয়ারী করিতে হইলে, উপরিলিখিত শলাকা দুইটির প্রত্যেকটি হইতে, কতটুকু করিয়া লইতে হইবে?

[There are two bars of metal, the first containing 14 oz. of silver and 6 of tin, the second containing 8 of silver and 12 of tin. How much must be taken from each to form a bar of 20 oz. containing equal weights of silver and tin?]

21. £607. 1 শি. 8 পে. কে এরূপ দুই অসমান অংশে ভাগ কর যে, বৃহত্তর অংশের দুই বৎসরের শতকরা £3½ হারে সুদ, অপর অংশের 2½ বৎসরের শতকরা £3¼ হারে সুদ অপেক্ষা £18. 16 শি. বেশী হইবে।

[Divide £607. 1*s.* 8*d.* into two sums, such that the simple interest of the greater sum for two years, at 3½ per cent. shall exceed that of the less for 2½ years, at 3¼ per cent. by £18. 16*s.*]

22. আমি আমার আসবাবপত্রের চারিটি জিনিষ স্থানান্তরিত করিবার নিমিত্ত, প্রথম জিনিষটির জন্য দুইটি, দ্বিতীয় জিনিষটির জন্য তিনটি, তৃতীয় জিনিষটির জন্য চারিটি এবং চতুর্থ জিনিষটির জন্য পাঁচটি কুলী নিযুক্ত করিলাম। প্রথম শ্রেণীর কুলীদ্বয়কে একটি পয়সাপূর্ণ থলিয়া এবং আরও এক পয়সা, দ্বিতীয় শ্রেণীর কুলী তিনটিকে একটি পূর্ব্বানুরূপ থলিয়া এবং আরও চারিটি পয়সা, তৃতীয় শ্রেণীর কুলী চারিটিকে একটি পূর্ব্বানুরূপ থলিয়া এবং আরও পাঁচটি পয়সা এবং চতুর্থ শ্রেণীর কুলী পাঁচটিকে একটি পূর্ব্বানুরূপ থলিয়া এবং আরও নয়টি পয়সা দিয়া দেখিতে পাইলাম যে, তৃতীয় ও চতুর্থ শ্রেণীর কুলীদিগের প্রত্যেকে সমান-সংখ্যক পয়সা পাইয়াছে। প্রত্যেক থলিয়াতে কত করিয়া পয়সা ছিল, প্রত্যেক কুলী কত করিয়া পয়সা পাইয়াছিল এবং আমিই বা সর্ব্বসমেত কত পয়সা দিয়াছিলাম, তাহা নির্ণয় কর।

[To remove four articles of furniture, I required for the 1st article two coolies, for the 2nd three, for the 3rd four, and for the 4th five. After giving the 1st set of men one group of pice and one pice more, to the 2nd set an equal group and four pice more, to the 3rd an equal group and five pice more and to the 4th an equal group and nine pice more. I found that each man of the 3rd and 4th sets had received the same number of pice. How many pice were there in each group ; how many pice did each man receive, and how many pice did I distribute ?]

23. পনরখানা গিনির ওজন 4 আউন্স হওয়া উচিত ; কিন্তু, গিনিপূর্ণ একটি পার্শেলের গিনিগুলি ওজন করিয়া এবং উহাদের সংখ্যা গণনা করিয়া দেখা গেল যে, ওজনানুসারে উহাতে গিনির সংখ্যা যত হওয়া উচিত, প্রকৃতপক্ষে তাহা হইতে (পার্শেলে) নয়খানা গিনি বেশী আছে। আবার, পার্শেলস্থিত গিনির সংখ্যার অর্দ্ধ হইতে 10½ খানি বেশী গিনির ওজন, ঐ-সংখ্যক গিনির যথাযথ ওজন অপেক্ষা 1⅓ আউন্স কম। পার্শেলে কতগুলি গিনি ছিল ?

[Fifteen current guineas should weigh 4 ounces ; but a parcel of light gold being weighed and counted, was found to contain 9 more guineas than was supposed from the weight ; and a part of the whole, exceeding the half by 10 guineas and a half, was found to be 1⅓ oz. deficient in weight. What was the number of guineas in the parcel ?]

24. কোন কর্ম্মকার £10 মূল্যের কতক পরিমাণ বিশুদ্ধ রৌপ্য-পাতের বিনিময়ে সমপরিমাণ সাধারণ রৌপ্য ও নগদ £3. 15 শি. পাইল। পুনরায়, সে পূর্ব্বপ্রকার 12 আউন্স বিশুদ্ধ রৌপ্য-পাতের বিনিময়ে 8 আউন্স সাধারণ রৌপ্য (যাহার জন্য সে পূর্ব্বহারেই মূল্য ধরিয়াছিল) ও নগদ £2. 16 শি. পাইয়াছিল। বিশুদ্ধ রৌপ্য-পাতের এক আউন্সের মূল্য কত, এবং কত পরিমাণ বিশুদ্ধ রৌপ্য-পাতই বা সে প্রথমে বিক্রয় করিয়াছিল ?

[A silversmith received in payment for a certain weight of wrought plate, the price of which was £10, the same weight of unwrought plate, and £3. 15*s*. besides. At another time he exchanged 12 oz. of wrought plate, of the same workmanship as before for 8 oz. of unwrought (for which he allowed the same price as before), and £2. 16*s*. in money. What was the price of wrought plate per ounce, and the weight of the first sold ?]

25. দুইজন যাত্রীকে, তাহাদের অতিরিক্ত মালের ভাড়া বাবদ যথাক্রমে 2 শি. 10 পে. ও 7 শি. 6 পে., দিতে হইয়াছিল ; যদি সমস্ত মালই একজনের হইত, তাহা হইলে তাহাকে অতিরিক্ত মালের ভাড়া বাবদ 14 শি. 6 পে. দিতে হইত ; যদি বিনা ভাড়ায় কোন মাল লইয়া যাইতে দেওয়া না হয়, তবে, মালের ভাড়া বাবদ তাহাদের প্রত্যেককে কত করিয়া দিতে হইবে ?

[Two passengers are charged for excess of luggage 2*s*. 10*d*. and 7*s*. 6*d*. respectively ; had the luggage all belonged to one of them, he would have been charged for excess 14*s*. 6*d*. ; how much would they have been charged if none had been allowed free ?]

26. কোন ঘাসওয়ালা, 'হাজার আঁটি 5 টাকা' দরের কত আঁটি ঘাস, 'হাজার আঁটি 6 টাকা' দরের, 5600 আঁটির সহিত মিশাইবে, যাহাতে মিশ্রণের 'প্রতি 100 আঁটি 11 আনা' দরে বিক্রয় করিয়া তাহার শতকরা 20 টাকা করিয়া লাভ হইবে ?

[কলিঃ, 1875]

[How many bundles of hay, at Rs. 5 per thousand, must a *ghaswalla* mix with 5600 bundles at Rs. 6 per thousand, in order that he may gain 20 per cent. by selling the whole at 11*as*. per hundred ?]

27. কোন বালক প্রতি 2 পেন্সে 3 টা দরে কতকগুলি, এবং প্রতি পেন্সে 2 টা দরে পূর্ব্বসংখ্যার এক-তৃতীয়াংশ কমলালেবু ক্রয় করিল। সমস্ত কমলালেবু কত দরে বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা 20 শিলিং করিয়া লাভ থাকিবে ? তাহার মোট লাভ 5 শি. 4 পে. হইয়া থাকিলে, সে মোট কতগুলি লেবু কিনিয়াছিল ? [কলিঃ, 1885]

[A boy buys a certain number of oranges at 3 for 2*d*. and one-third of that number at 2 for 1*d*. ; at what price must he sell them

to get 20 per cent. profit ; if his profit be 5*s*. 4*d*., find the number bought.]

28. কোন লোক, কতকগুলি বৈদেশিক স্বর্ণমুদ্রার প্রত্যেকটি হইতে উহার পাঁচভাগের একভাগ ঘষিয়া বাহির করিয়া লইয়া, উহাদের (ঐরূপ হালকা স্বর্ণমুদ্রার) $\frac{2}{3}$ অংশ চালাইবার পর ধরা পড়িল ; এবং একটি হালকা মুদ্রা বাদে, বাকী সকল মুদ্রাই হালকা বলিয়া বাজেয়াপ্ত হইল। তাহার নিকট যে মুদ্রাটি রহিল তাহা লইয়া সরিয়া পড়িয়া দেখিতে পাইল যে, সে পূর্ব্বে যত পরিমাণ লাভ করিয়াছিল, পরে তাহার ঠিক তত পরিমাণ লোকসান হইয়াছে। প্রথমে তাহার নিকট কতগুলি বৈদেশিক মুদ্রা ছিল ?

[From each of a number of foreign gold coins a person filed a fifth part, and had passed two-thirds of them, when the rest were seized as light coins except one, with which the man decamped, having lost upon the whole half as much as he had gained before. How many coins were there at first ?]

29. তিন অঙ্কবিশিষ্ট এরূপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহার অঙ্ক তিনটির যে কোনটি তৎপরবর্ত্তী অঙ্কটি অপেক্ষা এক বেশী, এবং নির্ণেয় সংখ্যাটি হইতে, উহাকে উল্টাইয়া লিখিয়া লব্ধ সংখ্যার এক-চতুর্থাংশের পার্থক্য, সংখ্যাস্থিত অঙ্কত্রয়ের সমষ্টির 36 গুণ হইবে।

[Find a number of three digits, each greater by unity than that which follows it, so that its excess above one-fourth of the number formed by inverting the digits shall be 36 times the sum of the digits.]

30. কোন সৈন্যদলকে সম্পূর্ণ বর্গে সাজাইয়া দেখা গেল যে, 60 জন সৈন্য বেশী হইয়াছে ; তৎপরে, উহার সম্মুখ-সারির সংখ্যা 5 বাড়াইয়া, এবং গভীরতায় (depth-এ) 3 জন সৈন্য কমাইয়া দেখা গেল যে, উহাতে একজন সৈন্য কম পড়ে। দলের সৈন্যসংখ্যা নির্ণয় কর।

[A number of troops being formed into a solid square, it was found there were 60 over ; but when formed into a column with 5 men more in front than before and 3 less in depth, there was just one man wanting to complete it. Find the number.]

31. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার অধীনস্থ সৈন্যগণদ্বারা 10-গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্যগর্ভ বর্গ (hollow square, 10-deep) রচনা করিতে পারেন। দলে মোট 2800 সৈন্য থাকিলে, উপরিউক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা কত ?

[An officer can form the men of his regiment into a hollow square 10 deep. The number of men in the regiment is 2800. Find the number of men in the front of the hollow square.]

32. একদল লোককে, 4-গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্যগর্ভ বর্গে, অথবা, 8-গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্যগর্ভ বর্গে, সাজান যাইতে পারে ; কিন্তু, প্রথমোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সংখ্যা, শেষোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সংখ্যা অপেক্ষা 19 বেশী। দলের লোকসংখ্যা নির্ণয় কর।

[A company of men is formed into a hollow square 4 deep and also into a hollow square 8 deep; the front in the latter formation contains 19 men fewer than that in the former formation; find the number of men.]

33. সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা হইতে গভীরতায় পাঁচজন বেশী সৈন্য লইয়া, একদল সৈন্য সমভাবে অগ্রসর হইতেছিল; কিন্তু, শত্রুসৈন্য দৃষ্টিগোচর হওয়ায়, সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা 845 বাড়াইয়া দলটিকে নূতন রকমে সাজাইতে হইল; এবং ইহা করিতে গভীরতা 5 এ পরিণত করিতে হইল। দলে কত সৈন্য ছিল ?

[A detachment from an army was marching in regular column with 5 men more in depth than in front; but upon the enemy coming in sight, the front was increased by 845 men; and by this movement the detachment was drawn up in five lines. Find the number of men in the detachment.]

II. প্রশ্নাবলীজাত দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সহজ সহ-সমীকরণ

(Problems leading to Simultaneous Equations involving two unknown quantities)

165. উদা. 1. A এবং B উভয়ের নিকটেই কতকগুলি করিয়া আম ছিল; A, B কে বলিল, "তোমার আম হইতে আমাকে 30 টি দিলে আমার আমের সংখ্যা তোমার সংখ্যার দ্বিগুণ হইবে।" B উত্তর করিল, "তুমি যদি আমাকে 10 টি দাও, তবে আমার আমের সংখ্যা তোমার আমের সংখ্যার তিনগুণ হইবে।" প্রত্যেকের কতগুলি করিয়া আম ছিল ?

[A and B each had a number of mangoes. A said to B, "If you give me 30 of your mangoes, my number will be twice yours." B replied, "If you give me 10, my number will be thrice yours." How many had each ?]

ধর, A এর আমের সংখ্যা x এবং B এর আমের সংখ্যা y.

তাহা হইলে, A এর উক্তি অনুসারে, $x+30=2(y-30)$; ... (1)

এবং B এর উক্তি অনুসারে, $y+10=3(x-10)$. ... (2)

(2) হইতে, $3x - y = 40$;

অথবা, $6x - 2y = 80$. ... (3)

(1) হইতে, $x - 2y = -90$. ... (4)

সুতরাং, বিয়োগ করিয়া, $5x = 170$; $\therefore\ x = 34$.

(4) তে x এর এই মান বসাইলে,

$$2y = 34 + 90 = 124\ ; \quad \therefore\ y = 62.$$

অতএব, A এর 34 টি এবং B এর 62 টি আম ছিল।

উদা. 2. কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 7 যোগ করিলে উহা 2 তে পরিণত হয় এবং হর হইতে 2 বাদ দিলে উহা 1 এ পরিণত হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

[A certain fraction becomes 2 when 7 is added to its numerator and becomes 1, when 2 is subtracted from the denominator. Find the fraction.]

ধর, নির্ণেয় ভগ্নাংশ $= \frac{x}{y}$.

তাহা হইলে, $\frac{x+7}{y} = 2$; ... (1)

এবং $\frac{x}{y-2} = 1$. ... (2)

এখন, (1) হইতে, $x + 7 = 2y$; $\therefore\ x = 2y - 7$

এবং (2) হইতে, $x = y - 2$

$$\therefore\ 2y - 7 = y - 2\ ; \quad \therefore\ y = 5 \text{ এবং } x = 5 - 2 = 3.$$

অতএব, নির্ণেয় ভগ্নাংশ $= \frac{3}{5}$.

উদা. 3. চারিজন পুরুষ এবং চারিজন বালক যে কাজ তিনদিনে সম্পন্ন করিতে পারে, দুইজন পুরুষ এবং সাতজন বালকের তাহা করিতে চারিদিন লাগে। একজন পুরুষ বা একজন বালক ঐ কাজ কতদিনে শেষ করিতে পারে ?

[Two men and 7 boys can do, in 4 days, a piece of work which would be done in 3 days by 4 men and 4 boys. How long would it take one man or one boy to do it ?]

ধর, একজন পুরুষ x দিনে এবং একজন বালক y দিনে ঐ কাজ সম্পন্ন করিতে পারে। তাহা হইলে, একজন পুরুষ একদিনে সম্পূর্ণ কাজের $\frac{1}{x}$ অংশ এবং একজন বালক একদিনে $\frac{1}{y}$ অংশ করিতে পারে।

যেহেতু দ্বিতীয় সর্ত্ত অনুসারে, 2 জন পুরুষ ও 7 জন বালক একদিনে সম্পূর্ণ কাজের $\frac{1}{4}$ অংশ করিতে পারে,

অতএব, $\frac{2}{x}+\frac{7}{y}=\frac{1}{4}$; ... (1)

এবং প্রথম সর্ত্ত অনুসারে, 4 জন পুরুষ ও 4 জন বালক একদিনে সম্পূর্ণ কাজের $\frac{1}{3}$ অংশ করিতে পারে,

অতএব, $\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{3}$. ... (2)

(1) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ সমীকরণ হইতে (2) বাদ দিলে,

$$\frac{10}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}; \quad \therefore \; y=60.$$

অতএব, (2) হইতে, $\frac{4}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{15}=\frac{4}{15}$; $\therefore \; x=15$.

স্থতরাং, একজন পুরুষ সম্পূর্ণ কাজটি 15 দিনে এবং একজন বালক সম্পূর্ণ কাজটি 90 দিনে শেষ করিতে পারে।

উদা. 4. 192 গ্যালন জলপূর্ণ একটি চৌবাচ্চার তলদেশে জল নিষ্কাশন করিবার জন্য দুইটি নল বসান হইল। দুইটি নল একই সময় খুলিয়া দিয়া তিন ঘণ্টা পরে একটিকে বন্ধ করিয়া দেওয়ায় চৌবাচ্চাটি আরও 11 ঘণ্টা পরে শূন্য হইল; কিন্তু, ঐ নলটিকে যদি 6 ঘণ্টা পরে বন্ধ করা হইত, তবে আর 6 ঘণ্টা পরে চৌবাচ্চাটি শূন্য হইত। বরাবর সমান বেগে জল পড়িয়া থাকিলে, প্রত্যেকটি নল হইতে ঘণ্টায় কত গ্যালন করিয়া জল পড়িয়াছিল ?

[Two plugs are opened at the bottom of a cistern containing 192 gallons of water ; after 3 hours one of them is closed and the cistern is emptied by the other in 11 hours ; had 6 hours elapsed before the closing, the other one would have required only 6 hours more to empty it. How many gallons would each plug-hole discharge in one hour, supposing the discharge to be uniform.]

ধর, নল দুইটি ঘণ্টায় যথাক্রমে x ও y গ্যালন করিয়া জল বাহির করে।

এখন প্রথম ক্ষেত্রে, প্রথম নলটি 3 ঘণ্টা এবং দ্বিতীয় নলটি 3 + 11 অর্থাৎ 14 ঘণ্টা খোলা ছিল। অতএব, $3x+14y=192$. ... (1)

আবার, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, প্রথম নলটি 6 ঘণ্টা এবং দ্বিতীয়টি 12 ঘণ্টা খোলা ছিল।

অতএব, $6x+12y=192$. ... (2)

(1) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ সমীকরণ হইতে (2) বাদ দিলে,

$$16y=2\times 192-192=192; \quad \therefore \; y=12.$$

অতএব, (2) হইতে, $6x = 192 - 144 = 48$; $\therefore\ x = 8$.

সুতরাং, নল দুইটি ঘণ্টায় যথাক্রমে 8 গ্যালন এবং 12 গ্যালন করিয়া জল বাহির করে।

উদা. 5. আয়তক্ষেত্রাকৃতি একটি প্রাঙ্গণ এরূপ দৈর্ঘ্য ও প্রস্থবিশিষ্ট যে, উহার দৈর্ঘ্য 3 গজ বাড়াইলে এবং প্রস্থ 3 গজ কমাইলে, ক্ষেত্রফল 18 বর্গগজ কমিয়া যাইত; এবং দৈর্ঘ্য 3 গজ বাড়াইলে এবং প্রস্থ 3 গজ বাড়াইলে, ক্ষেত্রফল 60 বর্গগজ বাড়িয়া যাইত। প্রাঙ্গণটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1888]

[The dimension of a rectangular court is such that if the length were increased by 3 yds. and the breadth diminished by the same, its area would be diminished by 18 square yards; and if its length were increased by 3 yards and its breadth increased by the same, its area would be increased by 60 square yards; find the dimension.]

ধর, প্রাঙ্গণটির দৈর্ঘ্য x গজ এবং প্রস্থ y গজ।

তাহা হইলে, প্রথম সর্ত অনুসারে, $(x+3)(y-3) = xy - 18$ ... (1)

এবং দ্বিতীয় সর্ত অনুসারে, $(x+3)(y+3) = xy + 60$. ... (2)

(1) হইতে, $3y - 3x = -9$,

অথবা, $y - x = -3$. ... ... (3)

(2) হইতে, $3y + 3x = 51$,

অথবা, $y + x = 17$. ... ... (4)

(3) ও (4) যোগ করিয়া, $2y = 14$; $\therefore\ y = 7$.

অতএব, (4) হইতে, $x = 17 - 7 = 10$.

সুতরাং, প্রাঙ্গণটির দৈর্ঘ্য 10 গজ এবং প্রস্থ 7 গজ।

উদা. 6. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সহিত 7 যোগ করিলে যোগফল দশকস্থানীয় অঙ্কটির তিনগুণ হইবে; কিন্তু সংখ্যাটি হইতে 18 বাদ দিলে উহার অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া যাইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[If 7 be added to the sum of the digits of a certain number consisting of two digits, the result will be three times the number in the ten's place; but if 18 be subtracted from the number, the digits will be interchanged. Find the number.]

ধর, x দশকস্থানীয় এবং y এককস্থানীয় অঙ্ক। তাহা হইলে, নির্ণেয় সংখ্যা $10x + y$, এবং অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া লিখিলে, সংখ্যাটি $10y + x$ হইবে।

তাহা হইলে, প্রশ্নের সর্ত অনুসারে,

$x + y + 7 = 3x$, ... (1)

এবং $(10x+y)-18=10y+x.$ ... ... (2)

(1) হইতে, $2x-y=7$; ... ... (3)

এবং (2) হইতে, $9x-9y=18$, অথবা, $x-y=2.$ ... (4)

(3) হইতে (4) বাদ দিলে, $x=5$; সুতরাং, (4) হইতে, $y=5-2=3.$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাটি 53.

উদা. 7. A এবং B এই সর্ত্তে ঘুঁটি খেলিতে আরম্ভ করিল যে, A খেলায় যতবার জিতিবে প্রতিবারে B এর নিকট হইতে 2 শিলিং করিয়া পাইবে এবং যতবার হারিবে প্রতিবারে B কে 3 শিলিং করিয়া দিবে। কয়েকবার খেলার পর দেখা গেল যে, A 3 শিলিং জিতিয়াছে ; কিন্তু A প্রতিবারে হারিবার জন্য যদি B কে 5 শিলিং করিয়া দিত এবং মোট ঐ সংখ্যক বার খেলার মধ্যেই আরও একবার বেশী হারিত, তাহা হইলে তাহার মোট 30 শিলিং লোকসান হইত। প্রত্যেকে কয়টি করিয়া বাজী জিতিয়াছিল ?

[A and B play at bowls, and A bets B 3 shillings to 2 upon every game ; after a certain number of games it appears that A has won 3 shillings ; but if A had bet 5 shillings to 2 and lost one game more out of the same number, he would have lost 30 shillings. How many games did each win ?]

ধর, $x=A$ যতবার বাজী জিতিয়াছে ;

$y=B$ " " " ।

তাহা হইলে, স্পষ্টই বুঝা যায় যে, মোট $x+y$-সংখ্যক বার খেলা হইয়াছিল।

এখন, যেহেতু A প্রতিবারে জিতিবার জন্য B এর নিকট হইতে 2 শিলিং করিয়া পায় এবং প্রতিবারে হারিবার জন্য (অর্থাৎ, B এর প্রতিবারে জয়ের জন্য) B কে 3 শিলিং করিয়া দেয়, তাহার মোট লাভ অবশ্যই $(2x-3y)$ শিলিং।

অতএব, $2x-3y=3.$ ... ... (1)

অপর সর্ত্তানুসারে, A এর $2(x-1)$ শি. লাভ এবং $5(y+1)$ শি. লোকসান হইত ; সুতরাং, তাহার মোট লোকসান $[5(y+1)-2(x-1)]$ শি. হইত।

অতএব, $5(y+1)-2(x-1)=30$;

অথবা, $5y-2x=23.$ ... ... (2)

(1) এবং (2) যোগ করিয়া, $2y=26$; $\therefore\ y=13.$

অতএব, (1) হইতে, $x=\frac{3+39}{2}=21.$

অতএব, A, 21 টি বাজী এবং B, 13 টি বাজী জিতিয়াছিল।

প্রশ্নমালা 82

1. কোন ভগ্নাংশের লবকে দ্বিগুণ এবং হরের সহিত 7 যোগ করিলে উহার মান $\frac{2}{3}$ হয়, কিন্তু হরকে দ্বিগুণ এবং লবের সহিত 2 যোগ করিলে উহার মান $\frac{3}{5}$ হয়; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

[What fraction is that whose numerator being doubled and denominator increased by 7, the value becomes $\frac{2}{3}$; but the denominator being doubled and the numerator increased by 2, the value becomes $\frac{3}{5}$?]

2. দুইটি সংখ্যার প্রথমটিকে দ্বিতীয়টির পাঁচগুণের সহিত যোগ করিলে যোগফল 52 হয়, কিন্তু দ্বিতীয়টিকে প্রথমটির আটগুণের সহিত যোগ করিলে যোগফল 65 হয়; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[Find two numbers such that if the first be added to 5 times the second, the sum is 52; and if the second be added to 8 times the first, the sum is 65.]

3. দুইটি সংখ্যার বৃহত্তরটির পাঁচগুণ, ক্ষুদ্রতরটির চারিগুণ অপেক্ষা 22 বেশী, এবং বৃহত্তরটির তিনগুণ ও ক্ষুদ্রতরটির সাতগুণের যোগফল 32; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[Find two numbers such that five times the greater exceeds four times the less by 22, and three times the greater together with seven times the less is 32.]

4. দুইটি সংখ্যার অন্তরফল 45 এবং ভাগফল 4; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[What numbers are those whose difference is 45, and the quotient of the greater by the less is 4?]

5. এরূপ দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যেন বৃহত্তরটির $\frac{1}{4}$ অংশের ও ক্ষুদ্রতরটির $\frac{1}{3}$ অংশের যোগফল 11 হয়, এবং বৃহত্তরটির $\frac{1}{8}$ অংশ ও ক্ষুদ্রতরটির $\frac{1}{5}$ অংশ সমান হয়।

[Find two numbers such that the sum of one-fourth of the greater and one-third of the less is eleven and one-fifth of the less is equal to one-eighth of the greater.]

6. কোন একটি ভগ্নাংশের হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে, উহা $\frac{1}{2}$ এ পরিণত হয়, কিন্তু লবের সহিত 7 যোগ করিলে উহা 1 এ পরিণত হয়; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

[A certain fraction becomes $\frac{1}{2}$ when 1 is subtracted from its denominator, and 1 when 7 is added to its numerator. What is the fraction?]

7. কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 1 যোগ করিলে উহার মান 1 হয়, কিন্তু হরের সহিত 1 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{2}$ হয়; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1862]

[What fraction is that which, if 1 be added to the numerator, becomes 1, and if 1 be added to the denominator, becomes $\frac{1}{2}$?]

8. কোন একটি ভগ্নাংশের লবের সহিত 1 যোগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$ এ পরিণত হয় এবং হরের সহিত 1 যোগ করিলে $\frac{1}{3}$ এ পরিণত হয় ; ভগ্নাংশটি কত ?

[A certain fraction becomes $\frac{1}{2}$ when its numerator is increased by unity, and $\frac{1}{3}$ when its denominator is increased by unity. What is the fraction ?]

9. A এবং B এর একত্রে 39 টাকা আছে, কিন্তু A যদি তাহার টাকার $\frac{2}{3}$ অংশ এবং B তাহার $\frac{3}{4}$ অংশ হারাইত, তবে তাহাদের কেবলমাত্র 11 টাকা থাকিত। প্রত্যেকের কত টাকা আছে ?

[A and B have 39 rupees between them, but if A were to lose two-thirds of his money, and B three-fourths of his, they would then have only 11 rupees. How much has each ?]

10. দুইটি সংখ্যা এরূপভাবে আছে যে, ছোটটির সহিত 7 যোগ করিলে যোগফল বড়টির দ্বিগুণ হইবে, এবং বড়টির সহিত 4 যোগ করিলে যোগফল ছোটটির তিনগুণ হইবে ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[Two numbers are such that if 7 be added to the less, the sum is twice the greater, and if 4 be added to the greater, the sum is 3 times the less. Find the numbers.]

11. দুই ব্যক্তি, 27 মাইল দূর হইতে, একই সময় যাত্রা করিয়া একই দিকে চলিলে, 9 ঘণ্টায় মিলিত হইতে পারে, কিন্তু বিপরীত দিকে চলিলে 3 ঘণ্টায় মিলিতে পারে। তাহাদের প্রত্যেকের গতিবেগ নির্ণয় কর।

[Two persons, 27 miles apart, setting out at the same time, meet together in 9 hours if they walk in the same direction, but in 3 hours if they walk in opposite directions ; find their rates of walking ?]

12. একজন পোদ্দার (banker) কে £10 পরিমিত অর্থ, সভ্রিণ এবং অর্দ্ধ-ক্রাউন এই দুইজাতীয় মুদ্রাতে এরূপভাবে দিতে বলা হইল, যেন অর্দ্ধ-ক্রাউনের সংখ্যা সভ্রিণের সংখ্যার ঠিক দ্বিগুণ হয়। সে কি প্রকারে ঐরূপ দিবে ?

[A banker was asked to pay £10 in sovereigns and half-crowns, so that the number of the latter should be exactly twice that of the former. How must he do it ?]

13. একজন লোক এবং একটি বালক, কোন কাজ 15 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে, কিন্তু সেই কাজই সাতজন লোক এবং নয়টি বালক 2 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। একজন লোক কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারে ?

[A man and a boy can do in 15 days a piece of work which would be done in 2 days by 7 men and 9 boys. How long would it take one man to do it ?]

14. একটি আয়তক্ষেত্র, দৈর্ঘ্যে 6 গজ বড় ও প্রস্থে 4 গজ ছোট অপর একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান এবং ইহা দৈর্ঘ্যে 8 গজ বড় ও প্রস্থে 5 গজ ছোট একটি তৃতীয় ক্ষেত্রফলের সমান। উহার ক্ষেত্রফল কত ?

[A rectangle is of the same area as another which is 6 yards longer and 4 yards narrower ; it is also of the same area as a third, which is 8 yards longer and 5 yards narrower. What is its area ?]

15. 15 পাউণ্ড চা এবং 17 পাউণ্ড কফির মূল্য একত্রে 3 পা. 5 শি. 6 পে. এবং 25 পাউণ্ড চা ও 13 পাউণ্ড কফির মূল্য একত্রে 4 পা. 6 শি. 2 পে. হইলে, প্রত্যেকটির প্রতি পাউণ্ডের মূল্য নির্ণয় কর।

[If 15 lbs. of tea and 17 lbs. of coffee together cost £3. 5*s*. 6*d*. and 25 lbs. of tea and 13 lbs. of coffee together cost £4. 6*s*. 2*d*., find the price of each per pound.]

16. A এর 30 মাইল হাঁটিতে B এর চেয়ে 3 ঘণ্টা বেশী সময় লাগিল ; কিন্তু পদক্ষেপ দ্বিগুণ করিয়া, তাহার B অপেক্ষা 2 ঘণ্টা সময় কম লাগিল ; তাহাদের প্রত্যেকের গতিবেগ নির্ণয় কর।

[A takes 3 hours longer than B to walk 30 miles ; but if he doubles his pace he takes 2 hours less time than B ; find their rates of walking ?]

17. চার্লস্ উইলিয়ম্‌কে বলিল, "তোমার মারবেল হ'তে 10টি আমাকে দিলে, আমার মারবেলের সংখ্যা তোমার দ্বিগুণ হবে" ; কিন্তু উইলিয়ম্ চার্লস্‌কে বলিল, "তুমি আমাকে 10টি দিলে, আমার মারবেলের সংখ্যা তোমার তিনগুণ হবে"। প্রত্যেকের কয়টি করিয়া মারবেল ছিল ?

[Says Charles to William, "If you give me 10 of your marbles, I shall then have just *twice* as many as you" ; but says William to Charles, "If you give me 10 of yours, I shall then have *three times* as many as you." How many had each ?]

18. A, B এবং C এর মধ্যে 1100 টাকা এরূপভাবে ভাগ করা হইয়াছিল যে, A এর, B কে 200 টাকা দেওয়ার পর, B, A এর দ্বিগুণ এবং C এর তিনগুণ পাইল। পূর্ব্বে A, B এবং C এর প্রত্যেকে কত টাকা করিয়া পাইয়াছিল ?

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1872]

[Rs. 1100 are so divided among A, B and C, that if A were to give B Rs. 200, B would then have twice as much as A, and three times as much as C. How many rupees did A, B and C each receive originally ?]

19. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন একটি সংখ্যাকে উহার অঙ্ক দুইটির সমষ্টি দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল 6 হয় এবং 3 অবশিষ্ট থাকে। অঙ্ক দুইটিকে বিপরীতভাবে স্থাপন করিয়া, উৎপন্ন সংখ্যাটিকে, অঙ্ক দুইটির সমষ্টি দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল 4 হয় এবং 9 অবশিষ্ট থাকে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[If a certain number be divided by the sum of its two digits the quotient is 6 and the remainder is 3. If the digits be inverted and the resulting number be divided by the sum of the digits, the quotient is 4 and the remainder 9. Find the number.]

20. দুই অঙ্কবিশিষ্ট এরূপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাকে, উহার অন্তর্গত অঙ্ক দুইটিকে উল্টাইয়া লিখিলে যাহা হয়, তাহার সহিত যোগ করিলে, যোগফল 121 হয় এবং ছোট সংখ্যাটি বড় সংখ্যাটি হইতে বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল 9 হয়।

[Find the number of 2 figures, to which, if the number formed by changing the places of the digits, be added, the sum is 121 ; and if the smaller number be subtracted from the larger, the remainder is 9.]

21. ক্রাউন এবং অর্দ্ধ-গিনি দ্বারা 25 গিনির একটি বিল (bill) পরিশোধ করা হইল এবং অর্দ্ধ-গিনির সংখ্যার দ্বিগুণ ক্রাউনের সংখ্যার তিনগুণের চেয়ে 17 বেশী ; প্রত্যেকটির সংখ্যা নির্ণয় কর।

[A bill of 25 guineas was paid with crowns and half-guineas ; and twice the number of half-guineas exceed 3 times that of the crowns by 17. How many were there of each ?]

22. এক ব্যক্তি, কোন একটি ক্রেতার নিকট 9 টি ঘোড়া এবং 7 টি গরু £300 মূল্যে বিক্রয় করিল ; সে অন্য এক ব্যক্তির নিকট একই হারে এবং উক্ত মূল্যে 6 টি ঘোড়া ও 13 টি গরু বিক্রয় করিল। ঘোড়া ও গরু প্রত্যেকটির মূল্য কত ?

[A person sells to one person 9 horses and 7 cows for £300 ; and to another, at the same prices, 6 horses and 13 cows for the same sum. What was the price of each ?]

23. A এবং B যথাক্রমে 15 দিন ও 14 দিন কাজ করিয়া তাহাদের বেতন বাবদ £5. 17*s*. পাইল ; এবং B এর তিনদিনের বেতন অপেক্ষা A এর চারিদিনের বেতন 11*s*. বেশী, তাহাদের প্রত্যেকের দৈনিক বেতন কত ?

[A and B received £5. 17*s*. for their wages, A having been employed for 15 and B for 14 days ; and A received, for working 4 days, 11*s*. more than B did for three days. What were their daily wages ?]

24. A এবং B একটি কাজ 16 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে ; একত্রে 4 দিন কাজ

করিয়া A অবসর গ্রহণ করিলে, B কাজটি 36 দিনে শেষ করিল। প্রত্যেকে পৃথক্‌ভাবে কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারে ?

[A and B can do a piece of work in 16 days ; they work together for 4 days, when A leaves, and B finishes it in 36 days more. In what time would each do the work separately ?]

25. কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 2 এবং হরের সহিত 1 যোগ করিলে, ভগ্নাংশটি $\frac{5}{8}$ এ পরিণত হয়, এবং লব ও হর প্রত্যেকটি হইতে 1 বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ এ পরিণত হয় ; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

[If the numerator of a fraction is increased by 2 and the denominator by 1, it becomes equal to $\frac{5}{8}$; and if the numerator and denominator are each diminished by 1, it becomes equal to $\frac{1}{2}$. Find the fraction.]

26. এক ব্যক্তি খানিকটা পথ ভ্রমণ করিল ; ঘণ্টায় অর্দ্ধমাইল দ্রুততর চলিলে সে পূর্ব্ব সময়ের $\frac{4}{5}$ অংশ সময়ে ভ্রমণ শেষ করিতে পারিত ; কিন্তু ঘণ্টায় অর্দ্ধমাইল ধীরতর পদে চলিলে সে রাস্তায় আরও $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা বেশী সময় কাটাইত। ঐ ব্যক্তি কতটা পথ ভ্রমণ করিয়াছিল ?

[A traveller walks a certain distance ; had he gone half a mile an hour faster, he would have walked it in four-fifths of the time ; had he gone half a mile an hour slower, he would have been $2\frac{1}{2}$ hours longer on the road. Find the distance.]

27. 10 এবং 100 এর মধ্যবর্ত্তী কোন একটি সংখ্যা উহার অঙ্কগুলির যোগফলের আটগুণ এবং উহা হইতে 45 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল, সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয়কে উল্টাইয়া লিখিয়া উৎপন্ন সংখ্যা হইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[A certain number between 10 and 100 is eight times the sum of its digits, and if 45 be subtracted from it, the digits will be reversed ; find the number.]

28. A এবং B 10 শিলিং বাজী ধরিল। A হারিয়া গেলে, তাহার B এর তখনকার তহবিলের দ্বিগুণ অপেক্ষা 25 শিলিং কম থাকিবে ; কিন্তু B হারিয়া গেলে, তাহার A এর তখনকার তহবিলের $\frac{5}{17}$ অংশ থাকিবে। তাহাদের প্রত্যেকের তহবিলের পরিমাণ নির্ণয় কর।

[A and B lay a wager of 10s. If A loses, he will have twenty-five shillings less than twice as much as B will then have ; but if B loses, he will have five-seventeenths of what A will then have ; find how much money each of them has.]

29. এক ব্যক্তি কয়েকটি ভেড়া কিনিবার ইচ্ছা করিয়া দেখিল যে, এক একটি ভেড়ার দাম £2. 2s. হইলে তাহার £1. 8s. কম পড়িবে কিন্তু এক একটির দাম £2 হইলে

প্রয়োজন অপেক্ষা তাহার £2 বেশী থাকিবে। ভেড়ার সংখ্যা এবং ঐ ব্যক্তির অর্থের পরিমাণ নির্ণয় কর।

[A farmer wishing to purchase a number of sheep found that if they cost him £2. 2*s*. a head, he would not have money enough by £1. 8*s*. ; but if they cost him £2 a head, he would then have £2 more than he required ; find the number of sheep, and the money which he had.]

30. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন একটি সংখ্যা উহার অঙ্ক দুইটির যোগফলের তিনগুণ এবং সংখ্যাটিকে 3 দ্বারা গুণ করিলে, গুণফল উক্ত অঙ্ক দুইটির যোগফলের বর্গ হইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[There is a number consisting of two digits ; the number is equal to three times the sum of its digits, and if it be multiplied by 3, the result will be equal to the square of the sum of its digits. Find the number.]

166. নিয়ম 165 তে আলোচিত প্রশ্নাবলী অপেক্ষা অপেক্ষাকৃত জটিল প্রশ্নাবলী-সম্পর্কে এক্ষণে আলোচনা করা হইবে।

পরবর্তী উদাহরণগুলিকে দৃষ্টান্তরূপে সন্নিবেশিত করা হইল।

উদা. 1. একটি পাত্র P তে 12 গ্যালন দুধ ও 18 গ্যালন জল, এবং অপর একটি পাত্র Q তে 9 গ্যালন দুধ ও 3 গ্যালন জল আছে। প্রত্যেকটি পাত্র হইতে কত পরিমাণ লইয়া মিশ্রিত করিলে, মিশ্রণে 7 গ্যালন দুধ ও 7 গ্যালন জল থাকিবে ?

[A cask P contains 12 gallons of milk and 18 gallons of water, and another cask Q contains 9 gallons of milk and 3 gallons of water. How many gallons must be drawn from each cask so that their mixture may contain 7 gallons of milk and 7 gallons of water ?]

P পাত্রস্থিত মিশ্রণে মোট 30 গ্যালনের মধ্যে 12 গ্যালন দুধ আছে ; অতএব, এই মিশ্রণের $\frac{12}{30}$, অর্থাৎ $\frac{2}{5}$ ভাগ দুধ, এবং $\therefore$ $\frac{3}{5}$ ভাগ জল আছে।

সুতরাং, P হইতে গৃহীত প্রতি গ্যালনের মধ্যে $\frac{2}{5}$ ভাগ দুধ ও $\frac{3}{5}$ ভাগ জল থাকিবে।

এইরূপে, Q হইতে গৃহীত প্রতি গ্যালনের মধ্যে $\frac{3}{4}$ ভাগ দুধ ও $\frac{1}{4}$ ভাগ জল থাকিবে।

ধর, P হইতে গৃহীত গ্যালনের সংখ্যা $= x$,

এবং Q হইতে গৃহীত গ্যালনের সংখ্যা $= y$.

তাহা হইলে, যেহেতু P হইতে গৃহীত x গ্যালনের মধ্যে $\frac{2}{5}x$ গ্যালন দুধ ও $\frac{3}{5}x$ গ্যালন জল, এবং Q হইতে গৃহীত y গ্যালনের মধ্যে $\frac{3}{4}y$ গ্যালন দুধ ও $\frac{1}{4}y$ গ্যালন জল থাকিবে,

অতএব, নূতন মিশ্রণে, $(\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y)$ গ্যালন দুধ এবং $(\frac{3}{5}x+\frac{1}{4}y)$ গ্যালন জল থাকিবে।

সুতরাং, প্রদত্ত সর্তানুসারে,

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{2}{5}x+\tfrac{3}{4}y=7\ ; &\cdots\quad (1)\\ \text{এবং}\ &\tfrac{3}{5}x+\tfrac{1}{4}y=7. &\cdots\quad (2)\end{aligned}\right\}$$

(2) কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া, গুণনলব্ধ সমীকরণ হইতে (1) কে বিয়োগ করিয়া,

$$\tfrac{7}{5}x=14\ ; \qquad \therefore\ x=10.$$

অতএব, (2) হইতে, $y=4(7-\frac{3}{5}\times 10)=4.$

সুতরাং, P হইতে 10 গ্যালন এবং Q হইতে 4 গ্যালন লইতে হইবে।

উদা. 2. 120 গজ যাইতে একখানা গাড়ীর সম্মুখের চাকা, উহার পিছনের চাকা অপেক্ষা 6 বার বেশী ঘোরে; সম্মুখের চাকার পরিধিকে বর্ত্তমান পরিধির $\frac{1}{4}$ অংশ পরিমিত বর্দ্ধিত করিলে এবং পিছনের চাকার পরিধিকে উহার বর্ত্তমান পরিধির $\frac{1}{5}$ অংশ পরিমিত বর্দ্ধিত করিলে, সম্মুখের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা মাত্র 4 বার বেশী ঘুরিবে। প্রত্যেক চাকার পরিধি নির্ণয় কর।

[The fore-wheel of a carriage makes 6 revolutions more than the hind-wheel in going 120 yards ; if the circumference of the fore-wheel be increased by $\frac{1}{4}$th of its present size, and the circumference of the hind-wheel by $\frac{1}{5}$th of its present size, the *six* would be changed into *four*. Find the circumference of each wheel.]

ধর, সম্মুখের চাকার পরিধি x গজ এবং পিছনের চাকার পরিধি y গজ।

তাহা হইলে, চাকাগুলি 120 গজ যাইতে যথাক্রমে $\dfrac{120}{x}$ এবং $\dfrac{120}{y}$ বার ঘুরিবে।

সম্মুখের এবং পিছনের চাকার পরিধিদ্বয়কে যথাক্রমে $\frac{1}{4}$ অংশ এবং $\frac{1}{5}$ অংশ বর্দ্ধিত করিলে, উহাদের নূতন পরিধিদ্বয় যথাক্রমে, $\left(x+\dfrac{x}{4}\right)$ এবং $\left(y+\dfrac{y}{5}\right)$ গজ, অর্থাৎ, $\dfrac{5x}{4}$ ও $\dfrac{6y}{5}$ গজ হইবে। অতএব, 120 গজ যাইতে চাকাগুলি যথাক্রমে, $120\div\dfrac{5x}{4}$ বার, অর্থাৎ $\dfrac{96}{x}$ বার এবং $120\div\dfrac{6y}{5}$ বার, অর্থাৎ $\dfrac{100}{y}$ বার ঘুরিবে।

সুতরাং, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে,

$$\left.\begin{aligned} \frac{120}{x}&=\frac{120}{y}+6\ ; \quad \cdots \quad \cdots (1) \\ \text{এবং}\ \frac{96}{x}&=\frac{100}{y}+4. \quad \cdots \quad \cdots (2) \end{aligned}\right\}$$

(1) কে 5 দ্বারা, এবং (2) কে 6 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\frac{600}{x}=\frac{600}{y}+30\ ;$$

$$\text{এবং}\ \frac{576}{x}=\frac{600}{y}+24\ ;$$

$\therefore$ বিয়োগ করিয়া, $\frac{24}{x}=6$; $\therefore\ x=4.$

অতএব, (1) হইতে, $\frac{120}{y}=\frac{120}{4}-6=24$; $\therefore\ y=5.$

সুতরাং, সম্মুখের ও পিছনের চাকার পরিধি যথাক্রমে 4 এবং 5 গজ।

উদা. 3. এক পাউণ্ড চা এবং তিন পাউণ্ড চিনির মূল্য মোট 6 শিলিং ; কিন্তু চিনি ও চাএর মূল্য যথাক্রমে শতকরা 50 শি. ও 10 শি. হিসাবে বাড়িলে, উহাদের মূল্য মোট 7 শিলিং হইবে। চা এবং চিনির প্রত্যেকের মূল্য নির্ণয় কর।

[A pound of tea and three pounds of sugar cost six shillings ; but if the cost of sugar rise by 50 per cent. and that of tea by 10 per cent., they would cost 7 shillings. Find the price of tea and sugar.]

ধর, এক পাউণ্ড চাএর মূল্য x শিলিং এবং এক পাউণ্ড চিনির মূল্য y শিলিং।

তাহা হইলে, স্পষ্টতঃ, $x+3y=6.$ ... ... (1)

চাএর মূল্য শতকরা 10 শিলিং হিসাবে বাড়িলে, এক পাউণ্ড চাএর মূল্য $=\left(x+\frac{x}{10}\right)$, অর্থাৎ $\frac{11}{10}x$ শিলিং ; এবং চিনির মূল্য শতকরা 50 শিলিং হিসাবে বাড়িলে, এক পাউণ্ড চিনির মূল্য $=\left(y+\frac{y}{2}\right)$, অর্থাৎ $\frac{3y}{2}$ শিলিং।

অতএব, $\frac{11}{10}x+3.\frac{3y}{2}=7.$ ... ... (2)

(2) হইতে, $\frac{11}{5}x+9y=14$; ... ... (3)

এবং (1) হইতে, $3x+9y=18$; ... ... (4)

$\therefore$ (4) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া, $(3 - \frac{11}{5})x = 4$;

অথবা, $\frac{4x}{5} = 4$; $\therefore$ $x = 5$.

অতএব, (1) হইতে, $y = \frac{6-5}{3} = \frac{1}{3}$.

সুতরাং এক পাউণ্ড চাএর মূল্য 5 শিলিং এবং এক পাউণ্ড চিনির মূল্য $\frac{1}{3}$ শি., অর্থাৎ 4 পেন্স।

উদা. 4. কতক পরিমাণ অর্থ কয়েকজন লোকের মধ্যে ভাগ করিয়া দিতে হইবে; তিনজন লোক কম হইলে, প্রত্যেকে 150 পাউণ্ড করিয়া বেশী পাইত; কিন্তু 6 জন লোক বেশী হইলে, প্রত্যেকে 120 পাউণ্ড করিয়া কম পাইত। অর্থের পরিমাণ এবং লোক-সংখ্যা নির্ণয় কর।

[A certain sum of money is to be divided among a certain number of men ; if there were 3 men fewer, each man would have got £150 more ; but if there were 6 men more, each man would have got £120 less. Find the sum of money and the number of men.]

ধর, x পাউণ্ড পরিমিত অর্থ, y-সংখ্যক লোকের মধ্যে ভাগ করিতে হইবে।

অতএব, প্রত্যেক লোক $\frac{x}{y}$ পাউণ্ড পাইবে। তিনজন লোক কম হইলে, প্রত্যেকে $\frac{x}{y-3}$ পাউণ্ড করিয়া পাইত; এবং 6 জন বেশী হইলে, প্রত্যেকে $\frac{x}{y+6}$ পাউণ্ড করিয়া পাইত।

সুতরাং, প্রদত্ত সর্তানুসারে, $\frac{x}{y-3} = \frac{x}{y} + 150$, $\cdots$ (1)

এবং $\frac{x}{y+6} = \frac{x}{y} - 120$. $\cdots$ (2)

(1) হইতে, $150 = x\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y}\right) = \frac{3x}{y^2-3y}$; $\therefore$ $\frac{x}{50} = (y^2 - 3y)$. $\cdots$ (3)

(2) হইতে, $120 = x\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+6}\right) = \frac{6x}{y^2+6y}$; $\therefore$ $\frac{x}{20} = (y^2 + 6y)$. $\cdots$ (4)

অতএব, (4) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{x}{20} - \frac{x}{50} = (y^2 + 6y) - (y^2 - 3y) = 9y;$$

অথবা, $\frac{30x}{1000} = 9y$; অথবা, $30x = 9000y$;

অথবা, $x = 300y$.

x এর এই মান (1) তে বসাইয়া,

$$\frac{300y}{y-3}=\frac{300y}{y}+150=300+150=450\ ;$$

অথবা, $300y=450(y-3)$;

অথবা, $30y=45y-135$;

অথবা, $15y=135$, $\therefore\ y=9.$

$\therefore\ x=300y=2700.$

অতএব, নির্ণেয় লোক-সংখ্যা $=9$, এবং অর্থের পরিমাণ $=$ £2700.

উদা. 5. কোন পথিক 40 মাইল ভ্রমণ করিবার পর তাহার গতিবেগ ঘণ্টায় 2 মাইল হিসাবে বাড়াইল। কিন্তু প্রথম হইতেই এই বর্দ্ধিত বেগে ভ্রমণ করিতে পারিলে, সে 40 মিনিট পূর্ব্বে তাহার গন্তব্যস্থানে পৌছিতে পারিত; আবার পূর্ব্বের বেগে সমস্ত পথ চলিলে, সে 20 মিনিট পরে আসিয়া পৌছিত। সে কত পথ ভ্রমণ করিয়াছিল?

[A traveller after covering a distance of 40 miles increases his speed by 2 miles an hour. If he had travelled with this increased speed from the beginning, he could have arrived at his destination 40 minutes earlier; but if he had travelled the whole distance with his speed at start, he would have arrived at his destination 20 minutes later. How far did he travel?]

ধর, ঐ পথিক ঘণ্টায় y মাইল বেগে প্রথম 40 মাইল পথ, এবং সর্ব্বশুদ্ধ x মাইল পথ ভ্রমণ করিয়াছিল।

স্বতরাং, ভ্রমণ শেষ করিবার প্রকৃত সময় $=\left(\frac{40}{y}+\frac{x-40}{y+2}\right)$ ঘণ্টা $=\frac{80+xy}{y(y+2)}$ ঘণ্টা।

কিন্তু বর্দ্ধিত বেগে সমস্ত পথ চলিলে, সে $\frac{x}{y+2}$ ঘণ্টায় ভ্রমণ শেষ করিতে পারিত; এবং পূর্ব্বের বেগে চলিলে, $\frac{x}{y}$ ঘণ্টায় সে ভ্রমণ শেষ করিত।

অতএব, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে,

$$\frac{x}{y+2}=\frac{80+xy}{y(y+2)}-\frac{2}{3}, \qquad \cdots \quad (1)$$

এবং $$\frac{x}{y}=\frac{80+xy}{y(y+2)}+\frac{1}{3}. \qquad \cdots \quad (2)$$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $x\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}\right)=1,$

অথবা, $2x=y(y+2).$ $\cdots$ (3)

আবার, (2) হইতে, $3x(y+2)=3(80+xy)+y(y+2)$;

অথবা, $6x-240=y(y+2)$. ... (4)

অতএব, (3) এবং (4) হইতে, $6x-240=2x$;

অথবা, $4x=240$. $\therefore\ x=60$.

সুতরাং, ঐ ব্যক্তি 60 মাইল পথ ভ্রমণ করিয়াছিল।

উদা. 6. A হইতে B পর্য্যন্ত যাইতে ঘোড়ার গাড়ীতে যে সময় লাগে, কোনরূপ দুর্ঘটনা না ঘটিলে রেলগাড়ীতে তাহার ঠিক অর্দ্ধসময় আবশ্যক হয়। রেলগাড়ীতে পথিমধ্যে আকস্মিক বিলম্বের জন্য 3 ঘণ্টা সময় ধরিয়া লইলেও যে সময়ে সমস্ত পথ ভ্রমণ করা যাইতে পারে, ঘোড়ার গাড়ীতে ঐ সময়ে সমস্ত পথ অপেক্ষা 15 মাইল কম পথ গমন করা যায় ; কিন্তু সম্পূর্ণ পথ যদি বর্ত্তমান পথের $\frac{2}{3}$ অংশ হইত, তাহা হইলে রেলগাড়ীর আকস্মিক বিলম্বের জন্য পূর্ব্বানুরূপ 3 ঘণ্টা ধরিয়া লইলে, সম্পূর্ণ পথ গমন করিতে ঘোড়ার গাড়ীর ও রেলগাড়ীর ঠিক একই সময় দরকার হইত। A হইতে B এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

[If there were no accidents, it would take half as long to travel the distance from A to B by rail road as by coach ; but three hours being allowed for accidental stoppages by the former, the coach will travel the distance all but 15 miles in the same time ; if the distance were two-thirds as long as it is, and the same time allowed for railway stoppages, the coach would take exactly the same time as the rail. Find the distance from A to B.]

ধর, A হইতে B এর দূরত্ব $=x$ মাইল ; এবং ঘোড়ার গাড়ী ঘণ্টায় y মাইল বেগে গমন করে। তাহা হইলে, স্পষ্টতঃ, রেলগাড়ীর গতি ঘণ্টায় $2y$ মাইল।

এখন, (রেলগাড়ীতে A হইতে B তে যাওয়ার সময়) + 3 ঘণ্টা = ঘোড়ার গাড়ীতে $(x-15)$ মাইল পথ যাওয়ার সময়।

অতএব, $\frac{x}{2y}+3=\frac{x-15}{y}$; ... ... (1)

এবং $\frac{\frac{2}{3}x}{2y}+3=\frac{\frac{2}{3}x}{y}$, অথবা, $\frac{x}{3y}+3=\frac{2x}{3y}$. ... (2)

(2) হইতে, $\frac{x}{3y}=3$, অথবা, $x=9y$. ... (3)

(1) হইতে, $x+6y=2x-30$; অথবা, $6y=x-30$. (4)

অতএব, (3) এবং (4) হইতে, $6y=9y-30$; অথবা, $y=10$;

$\therefore\ x=9\times10=90$.

সুতরাং, নির্ণেয় দূরত্ব = 90 মাইল।

উদা. 7. কোন নৌকা 10 ঘণ্টায় স্রোতের প্রতিকূলে 30 মাইল এবং স্রোতের অনুকূলে 44 মাইল গমন করিল; এবং 13 ঘণ্টায় স্রোতের প্রতিকূলে 40 মাইল এবং উহার অনুকূলে 55 মাইল পথ অতিক্রম করিল। স্রোতের বেগ ও নৌকার গতি নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1880]

[A boat goes up-stream 30 miles and down-stream 44 miles in 10 hours; it can also go up-stream 40 miles and down-stream 55 miles in 13 hours. Find the speed of the current and that of the boat.]

ধর, স্রোতবিহীন জলে নৌকাখানি ঘণ্টায় x মাইল বেগে গমন করে; এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় y মাইল।

তাহা হইলে এক ঘণ্টায় নৌকাখানি স্রোতের অনুকূলে $x+y$ মাইল এবং প্রতিকূলে $x-y$ মাইল গমন করে।

অতএব, স্রোতের প্রতিকূলে 30 মাইল যাইতে নৌকাখানির $\frac{30}{x-y}$ ঘণ্টা, এবং অনুকূলে 44 মাইল যাইতে উহার $\frac{44}{x+y}$ ঘণ্টা লাগিবে। অতএব, প্রশ্নপ্রদত্ত প্রথম সর্তানুসারে,

$$\frac{30}{x-y}+\frac{44}{x+y}=10; \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

তদ্রূপ, দ্বিতীয় সর্তানুসারে,

$$\frac{40}{x-y}+\frac{55}{x+y}=13. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) কে 4 দ্বারা, এবং (2) কে 3 দ্বারা, গুণ করিয়া,

$$\frac{120}{x-y}+\frac{176}{x+y}=40;$$

$$\text{এবং} \quad \frac{120}{x-y}+\frac{165}{x+y}=39;$$

$\therefore$ বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{11}{x+y}=1; \quad \text{অথবা,} \quad x+y=11. \quad \cdots \quad (3)$$

অতএব, (1) হইতে, $\frac{30}{x-y}=10-4=6$; $\therefore\ x-y=5.$ ⋯ (4)

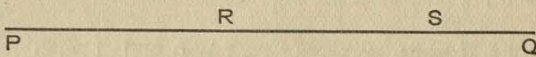
(3) ও (4) যোগ করিয়া, $2x=16$; $\therefore\ x=8.$
আবার, (3) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া, $2y=6$; $\therefore\ y=3.$

অতএব, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 মাইল, এবং নৌকার গতি ঘণ্টায় 8 মাইল হইবে।

উদা. 8. 1040 গজ দূরত্বের সাইকেল-ভ্রমণ প্রতিযোগিতায় B 120 গজ পথ অতিক্রম করিবার পর A রওনা হইল এবং B অপেক্ষা মাত্র 5 সেকেণ্ড পরে নির্দ্দিষ্ট স্থানে পৌঁছিল; পরবর্ত্তী বারে A, B এর পাঁচ সেকেণ্ড পরে রওনা হইয়া, B কে 120 ফুট দূরত্বে হারাইল। প্রত্যেকে কত সময়ে নির্দ্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করিয়াছিল?

[In a cycle-race competition for 1040 yards, A first gave B a start for 120 yards but lost by 5 seconds ; he then gave B 5 seconds' start and won by 120 feet. How long does each take to cover the distance ?]

মনে কর, নির্দ্দিষ্ট দূরত্ব যাইতে A এর x সেকেণ্ড এবং B এর y সেকেণ্ড সময় লাগিয়াছিল। তাহা হইলে, এক গজ যাইতে, A এর $\frac{x}{1040}$ সেকেণ্ড এবং B এর $\frac{y}{1040}$ সেকেণ্ড লাগিয়াছিল।



ধর, উপরিপ্রদর্শিত চিত্রে PQ নির্দ্দিষ্ট দূরত্ব, এবং PR ও SQ যথাক্রমে 120 গজ ও 120 ফুট (অর্থাৎ, 40 গজ) দূরত্ব সূচিত করিতেছে।

প্রতিযোগিতার প্রথম বারে, B, R পর্য্যন্ত পৌঁছিলে পর, A, P হইতে রওনা হইয়া B অপেক্ষা 5 সেকেণ্ড পরে Q তে পৌঁছিল। অতএব, B এর RQ দূরত্ব অতিক্রম করিতে $(x-5)$ সেকেণ্ড সময় লাগিল।

অতএব, $x-5=(1040-120)\times\frac{y}{1040}=(1-\frac{3}{26})y=\frac{23}{26}y.$ ⋯ (1)

দ্বিতীয় বারে, A, B এর 5 সেকেণ্ড পরে রওনা হইয়া, যখন Q তে পৌঁছিল, তখন B, P হইতে রওনা হইয়া মাত্র S পর্য্যন্ত যাইতে পারিল। অতএব, PS দূরত্ব অতিক্রম করিতে B এর মোট $(x+5)$ সেকেণ্ড সময় লাগিল।

সুতরাং, $x+5=(1040-40)\times\frac{y}{1040}=(1-\frac{1}{26})y=\frac{25}{26}y.$ ⋯ (2)

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $\frac{2}{26}y=10$; $\therefore\ y=130.$

অতএব, (1) হইতে, $x=5+\frac{23}{26}\times130=5+115=120.$

কাজেই, A ও B এর, নির্দ্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করিবার সময় যথাক্রমে 120 সেকেণ্ড ও 130 সেকেণ্ড।

সুতরাং, A, 2 মিনিটে এবং B, 2 মিনিট 10 সেকেণ্ডে উক্ত দূরত্ব অতিক্রম করিয়াছিল।

উদা. 9. কোন সংখ্যার অঙ্কসমূহের সমষ্টি 9 দ্বারা বিভাজ্য হইলে, অঙ্কটিও 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে। [B. C. S. 1923]

[If the sum of the digits of a number is divisible by 9, so is the number.]

সংখ্যাটি এক অঙ্কবিশিষ্ট হইলে, উহা স্পষ্টতঃই 9 ; অতএব, উপরিউক্ত সিদ্ধান্তটি এক অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার বেলায় অক্ষুণ্ণ রহিল।

এখন, দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা লও ; এবং ধর, উহার দশকস্থানীয় অঙ্কটি y দ্বারা, এবং এককস্থানীয় অঙ্কটি x দ্বারা সূচিত হইতেছে। তাহা হইলে সংখ্যাটি অবশ্যই $=10y+x$.

এখন, $$\frac{10y+x}{9}=y+\frac{y+x}{9}.$$

কাজেই, $y+x$ (অর্থাৎ, অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি) 9 দ্বারা বিভাজ্য হইলে, সংখ্যাটি (অর্থাৎ, $10y+x$)-ও 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

এরূপভাবে, দুইএর অধিক অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা লইয়া দেখান যাইতে পারে যে, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই উপরিউক্ত সিদ্ধান্তটি অক্ষুণ্ণ থাকিবে।

প্রশ্নমালা 83

1. এক দোকানদার, তাহার হিসাব-বহি পরিষ্কাররূপে লিখিয়া না রাখায় কোন একটি জিনিষের কত ওজন, বা কত ক্রয়-মূল্য, কিছুই স্মরণ করিতে পারিল না ; শুধু, এই মাত্র স্মরণ করিতে পারিল যে, জিনিষটি কিনিবার পর সে মনে করিয়াছিল যে, উহার প্রতি পাউণ্ড 30 শি. দরে সমগ্র জিনিষটি বিক্রয় করিলে, তাহার £5 লাভ হইবে, কিন্তু 22 শি. দরে বিক্রয় করিলে, £15 লোকসান হইবে। জিনিষটির ওজন, এবং ক্রয়-মূল্য নির্ণয় কর।

[A shop-keeper, on account of bad book-keeping knows neither the weight nor the prime cost of a certain article which he purchased. He only recollects that if he had sold the whole at 30*s*. per lb., he would have gained £5 by it, and if he had sold it at 22*s*. per lb., he would have lost £15 by it. What was the weight and prime cost of the article ?]

2. A এবং B এই দুই ব্যক্তি বাজী ধরিয়া তাস খেলিতে আরম্ভ করিল। কয়েকবার খেলার পর A দেখিতে পাইল যে, সে যত অর্থ লইয়া খেলিতে আরম্ভ করিয়াছিল, তাহার অর্দ্ধ-পরিমাণ জিতিয়াছে এবং তাহার যদি আরও 15 শি. থাকিত, তাহা হইলে তাহার অর্থের পরিমাণ B এর অর্থের তিনগুণ হইত। কিন্তু, B, তারপর 10 শি.

জিতিল বলিয়া, B এর অর্থের পরিমাণ তখন A এর অর্থের দ্বিগুণ হইল। প্রত্যেকে কত লইয়া খেলিতে আরম্ভ করিয়াছিল ?

[Two persons A and B, played cards. After a certain number of games, A had won half as much as he had at first and found that if he had 15 shillings more, he would have had just three times as much as B. But B afterwards won 10 shillings back, and he had then twice as much as A. What had each at first ?]

3. A এর নিকট যতগুলি শিলিং আছে, তাহার দ্বিগুণসংখ্যক পেনি আছে; B এর নিকট A অপেক্ষা 8 পে. বেশী আছে, এবং উহাতে যতগুলি পেনি, তাহার দ্বিগুণসংখ্যক শিলিং আছে; A ও B এর মোট তহবিলে, 'শিলিং'এর সংখ্যা অপেক্ষা পেনির সংখ্যা এক বেশী। প্রত্যেকের নিকট কি পরিমাণ অর্থ আছে, তাহা নির্ণয় কর।

[A has twice as many pennies as shillings; B, who has 8*d.* more than A, has twice as many shillings as pennies; together they have one more penny than they have shillings. How much has each ?]

4. কোন কাজ, A ও B দুইজনে m দিনে শেষ করিতে পারে; উভয়ে একত্রে n দিন কাজ করার পর A কে সরাইয়া দেওয়া হইল, এবং B উক্ত কাজের বাকী অংশ p দিনে সম্পন্ন করিল। প্রত্যেকে পৃথক্‌ভাবে ঐ কাজ কতদিনে শেষ করিতে পারিবে ?

[Two persons, A and B could finish a work in m days; they worked together n days when A was called off, and B finished it in p days. In what time could each do it ?]

5. 35 মাইল পথ অতিক্রম করিতে একজন লোক, কতক অংশ পথ ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে এবং অবশিষ্টাংশ ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে গমন করিল। যে পরিমাণ পথ সে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে অতিক্রম করিয়াছে, যদি উহা ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে, এবং বাকী পথ ঘণ্টায় 4 মাইল গতিতে অতিক্রান্ত হইত, তাহা হইলে সে পূর্ব্বসময়ের মধ্যেই আরও দুই মাইল যাইতে পারিত। কত সময় ধরিয়া সে ভ্রমণ করিয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।

[A man walks 35 miles partly at the rate of 4 miles an hour and partly at 5; if he had walked at 5 miles an hour when he walked at 4, and *vice versa*, he would have covered two miles more in the same time. Find the time he was walking.]

6. একখানা রেলগাড়ী বরাবর সমান বেগে কতক পরিমাণ পথ অতিক্রম করিল। উহার গতির বেগ ঘণ্টায় 6 মাইল করিয়া বেশী হইলে, ঐ পথ 4 ঘণ্টা কম সময়ে অতিক্রান্ত হইতে পারিত এবং গতির বেগ ঘণ্টায় 6 মাইল করিয়া কম হইলে, ঐ পথ যাইতে উহার 6 ঘণ্টা সময় বেশী লাগিত। রেলগাড়ীখানি কত পরিমাণ পথ অতিক্রম করিয়াছিল ?

[A train travelled a certain distance at a uniform rate. Had the speed been 6 miles an hour more, the journey would have occupied

4 hours less ; and had the speed been 6 miles an hour less, the journey would have occupied 6 hours more. Find the distance.]

7. দুইটি পাত্রের প্রত্যেকটিতে জল ও মদ মিশ্রিত আছে ; একটিতে যত পরিমাণ জল তাহার তিনগুণ মদ, এবং অপরটিতে যত পরিমাণ মদ, তাহার পাঁচগুণ জল আছে। 7 গ্যালন ধরে এরূপ একটি পাত্র পূর্ণ করিতে হইলে, উপরিউক্ত পাত্র দুইটির কোন্‌টি হইতে কত পরিমাণ লইতে হইবে, যাহাতে শেষোক্ত পাত্রস্থিত মিশ্রণে সম-পরিমাণ জল ও মদ থাকিতে পারে ?

[Two vessels contain mixtures of wine and water ; in one there is three times as much wine as water, in the other five times as much water as wine. Find how much must be drawn off from each to fill a third vessel which holds seven gallons, in order that its contents may be half wine and half water.]

8. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কত্রয়ের সমষ্টি 10 ; মধ্যস্থিত অঙ্কটি পার্শ্বস্থিত অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সমান ; এবং অঙ্ক তিনটিকে বিপরীতক্রমে লিখিলে যে সংখ্যা উৎপন্ন হয়, উহা প্রদত্ত সংখ্যা অপেক্ষা 99 বেশী। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[A number consists of 3 digits whose sum is 10. The middle digit is equal to the sum of the other two ; and the number will be increased by 99 if its digits be reversed. Find the number.]

9. কতক পরিমাণ অর্থ কয়েকজন লোকের ভিতর সমান ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। কিন্তু 4 জন লোক বেশী হইলে প্রত্যেকে এক শিলিং করিয়া কম পাইত, এবং 5 জন লোক কম হইলে প্রত্যেকে 2 শিলিং করিয়া বেশী পাইত। কি পরিমাণ অর্থ কতজন লোকের ভিতর ভাগ করা হইল, তাহা নির্ণয় কর।

[A sum of money is divided equally among a certain number of persons ; if there had been four more persons, each would have received a shilling less ; and if there had been five fewer, each would have received two shillings more ; find the sum of money thus divided and the number of persons.]

10. কোন চৌবাচ্চা জলপূর্ণ করিবার নিমিত্ত উহার সহিত তিনটি নল সংলগ্ন আছে ; এবং উহাদের দুইটি নল সম্পূর্ণ এক আকারের। তিনটি নলই একসঙ্গে খুলিয়া রাখিলে, 4 ঘণ্টায় চৌবাচ্চার $\frac{5}{12}$ অংশ পূর্ণ হয় ; সমান নল দুইটির একটিকে বন্ধ রাখিলে, 10 ঘণ্টা 40 মিনিটে চৌবাচ্চার $\frac{7}{9}$ অংশ পূর্ণ হয়। প্রত্যেকটি নল পৃথক্‌ভাবে কত সময়ের ভিতর চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করিতে পারিবে ?

[There is a cistern, into which water is admitted by three cocks, two of which are exactly of the same dimensions. When they are all open, five-twelfths of the cistern is filled in four hours ; and if one of the equal cocks is stopped, seven-ninths of the cistern is filled in ten

hours and forty minutes. In how many hours would each cock fill the cistern ?]

11. কোন মদ্যবিক্রেতার দুই প্রকারের মদ ছিল ; এক প্রকার প্রতি কোয়ার্ট 2 শি. দরের এবং অন্য প্রকার প্রতি কোয়ার্ট 3 শি. 4 পে. দরের। ইহা হইতে তাহাকে প্রতি কোয়ার্ট 2 শি. 4 পে. দরের 100 কোয়ার্ট মদ তৈয়ারী করিতে হইলে, প্রত্যেক প্রকার মদ হইতে কত পরিমাণ করিয়া লইতে হইবে ?

[A wine-merchant has two sorts of wine, one sort worth 2 shillings a quart, and the other worth 3*s*. 4*d*. a quart ; from these he wants to make a mixture of 100 quarts worth 2*s*. 4*d*. a quart. How many quarts must he take from each sort ?]

12. কোন জমির খাজনা বাবদ, নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ বার্লি এবং নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ ময়দা ধার্য্য আছে ; যখন ময়দার দর প্রতি কোয়ার্টার 55 শি., এবং বার্লির দর প্রতি কোয়ার্টার 33 শি., তখন খাজনাতে ময়দার অংশের এবং বার্লির অংশের মূল্য পরস্পর সমান। কিন্তু, ময়দা ও বার্লি, যথাক্রমে প্রতি কোয়ার্টার 65 শি. ও 41 শি. দরে বিক্রয় হইলে, খাজনার পরিমাণ £7 বৃদ্ধি হয়। খাজনাতে ময়দার পরিমাণ ও বার্লির পরিমাণ নির্ণয় কর।

[The rent of a farm is paid in certain fixed numbers of quarters of flour and barley ; when wheat is at 55*s*. and barley at 33*s*. per quarter, the portions of rent by wheat and barley are equal to one another ; but when wheat is at 65*s*. and barley at 41*s*. per quarter, the rent is increased by £7. What is the corn-rent ?]

13. 60 গজ দীর্ঘ একখানা গতিশীল রেলগাড়ী, এক সমান্তর পথে একই দিকে গতিশীল অপর একখানা 72 গজ দীর্ঘ রেলগাড়ীকে 12 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। অপেক্ষাকৃত ধীরগামী গাড়ীখানির গতি যদি অর্দ্ধগুণ বর্দ্ধিত করা হইত, তাহা হইলে দ্রুতগামী গাড়ীখানি উহাকে 24 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিত। প্রত্যেকখানি গাড়ী কত বেগে যাইতেছিল ?

[A train 60 yards long passed another train 72 yards long which was travelling in the same direction on a parallel line of rails, in 12 seconds. Had the slower train been travelling half as fast again, it would have been passed in 24 seconds. Find the rates at which the trains were travelling.]

14. কোন কৃষক, প্রতি বুসেল্ 3 শি. 4 পে. দরের 100 বুসেল্ মিশ্রণ প্রস্তুত করিতে, প্রতি বুসেল্ 2 শি. 4 পে. দরের 28 বুসেল্ বার্লির সহিত, প্রতি বুসেল্ 3 শিলিং দরের কত পরিমাণ 'রাই' এবং প্রতি বুসেল্ 4 শি. দরের কত বুসেল্ ময়দা মিশ্রিত করিবে ?

[A farmer with 28 bushels of barley at 2*s*. 4*d*. a bushel, would mix rye at 3*s*. per bushel, and wheat 4*s*. per bushel, so that the whole

mixture may consist of 100 bushels, and be worth 3*s*. 4*d*. per bushel. How many bushels of rye, and how many of wheat must he mix with the barley ?]

15. কোন লোক নৌকাযোগে স্রোতের অনুকূলে A হইতে B পর্য্যন্ত 18 মাইল পথ দেড় ঘণ্টায় যাইয়া ঐ স্রোতেরই প্রতিকূলে B হইতে A তে সওয়া দুই ঘণ্টায় নদীর কিনারা ধরিয়া ফিরিয়া আসিল। নদীর কিনারায় স্রোতের বেগ যদি মধ্যস্থিত স্রোতের বেগের $\frac{3}{5}$ অংশ হয়, তবে মধ্যস্থিত স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

[A man finds that he can row with the tide from A to B a distance of 18 miles, in an hour and a half, and that to return from B to A against the same tide, though he rows back along the shore where the stream is only three-fifths as strong as in the middle, takes him just two hours and a quarter. Find the rate at which the tide runs in the middle where it is strongest.]

16. এক মাইল দৌড়-প্রতিযোগিতায়, প্রথম বারে B, 44 গজ দৌড়াইবার পর, A দৌড়াইতে আরম্ভ করিয়া B কে 51 সেকেণ্ডে হারাইল; পরবর্ত্তী বারে, B, 1 মিনিট 15 সেকেণ্ড দৌড়াইবার পর, A দৌড়াইতে আরম্ভ করিয়া, B এর নিকট 88 গজে হারিল। এক মাইল পথ দৌড়াইতে উহাদের প্রত্যেকের কত সময় করিয়া লাগিবে ?

[A and B run a mile. First A gives B a start of 44 yards, and beats him by 51 seconds ; at the second hit A gives B a start of 1 minute 15 seconds, and is beaten by 88 yards. Find the times in which A and B can run a mile separately.]

17. দুই মাইল দৌড়-প্রতিযোগিতায় প্রথম বারে B, A কে দুই মিনিটে হারাইল; দ্বিতীয় বারে, A এর গতি ঘণ্টায় দুই মাইল বাড়াইবার, এবং B এর গতি ঘণ্টায় দুই মাইল হিসাবে কমাইবার ফলে, A, B কে দুই মিনিটে হারাইল। A ও B এর প্রথম বারে দৌড়াইবার বেগ নির্ণয় কর।

[A and B run a race of two miles. In the first hit B reaches the winning post 2 minutes before A. In the second hit A increases his speed by 2 miles an hour, and B diminishes his by the same quantity, and A then arrives at the winning post 2 minutes before B. Find at what rate each ran in the first hit.]

18. লণ্ডন হইতে কেম্ব্রিজে যাইতে পথিমধ্যে কোন দুর্ঘটনার জন্য একখানা রেল-গাড়ী উহার গতিবেগ পূর্ব্ব-বেগের $\frac{1}{n}$ অংশে পরিণত করিয়া, a ঘণ্টা বিলম্বে কেম্ব্রিজে পৌছিল। দুর্ঘটনার স্থান যদি কেম্ব্রিজ হইতে b মাইল নিকটতর হইত, তাহা হইলে

গাড়ীখানি কেম্ব্রিজে c ঘণ্টা বিলম্বে পৌছিত। দুর্ঘটনার পূর্ব্বে গাড়ীখানি কত বেগে যাইতেছিল?

[A railway train running from London to Cambridge meets on the way with an accident, which causes it to diminish its speed to $\frac{1}{n}$th of what it was before, and it is in consequence a hours late. If the accident had happened b miles nearer Cambridge, the train would have been c hours late. Find the speed of the train before the accident occurred.]

19. একখানা রেলগাড়ী এক ঘণ্টা চলিবার পর কোন দুর্ঘটনায় পড়িয়া তথায় এক ঘণ্টা বিলম্ব করিল এবং তৎপরে, পূর্ব্ব-বেগের $\frac{3}{5}$ অংশ বেগে চলিয়া 3 ঘণ্টা বিলম্বে গন্তব্যস্থানে পৌছিল। যদি দুর্ঘটনা, রওনা হইবার স্থান হইতে, আরও 50 মাইল দূরবর্ত্তী স্থানে হইত, তাহা হইলে গাড়ীখানি পূর্ব্বাপেক্ষা 1 ঘণ্টা 20 মিনিট পূর্ব্বে গন্তব্যস্থানে পৌছিতে পারিত। গাড়ীখানি মোট কত মাইল পথ চলিয়াছিল?

[A railway train after travelling for one hour, meets with an accident, which delays it one hour, after which it proceeds at three-fifths of its former rate, and arrives at the terminus three hours behind time ; had the accident occurred 50 miles further on, the train would have arrived 1 hour 20 minutes sooner. Required the length of the journey.]

20. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কসমূহের সমষ্টি 3 দ্বারা বিভাজ্য হইলে, সংখ্যাটিও 3 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

[If the sum of the digits of a number consisting of two digits is divisible by 3, so is the number.]

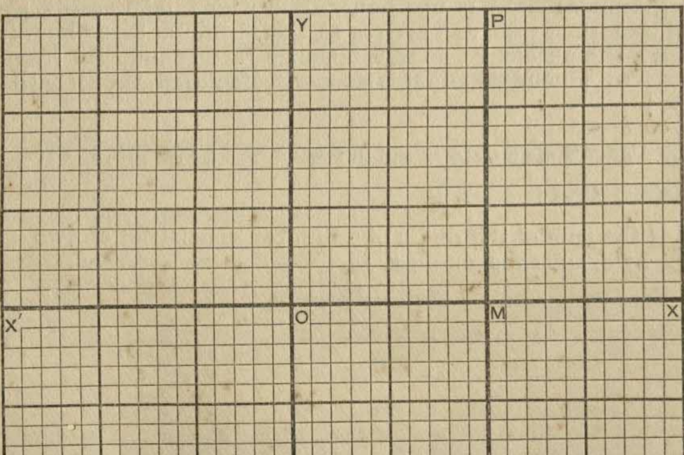
চতুর্ব্বিংশ অধ্যায়

সরল সমীকরণের লৈখিক চিত্রাবলী

(Graphs of Simple Equations)

167. সংখ্যাসমূহ জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা কি প্রকারে সূচিত করা হয়, তাহা সপ্তদশ অধ্যায়ে আলোচিত হইয়াছে। এক্ষণে, সরল সমীকরণগুলিকে কিরূপে লৈখিক চিত্রে প্রকাশ করা যাইতে পারে, তাহাই বিবেচ্য বিষয়। নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা এই বিষয়ের সম্যক্ ধারণা হইবে।

উদা. 1. একটি বিন্দু যদি এরূপভাবে স্থান পরিবর্ত্তন করে যে, সকল অবস্থানেই উহার ভুজ (abscissa) 5 একক দীর্ঘ, তাহা হইলে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ (locus) কি হইবে, তাহা নির্ণয় কর। অর্থাৎ, $x=5$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কিত কর। (Draw the graph of the equation $x=5$.)



মনে কর, ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দ্বিগুণকে দৈর্ঘ্যের একক ধরা হইল।

OX (অর্থাৎ, x-অক্ষরেখা) এর উপর একটি বিন্দু M এরূপে লও, যেন $OM=5$ একক দীর্ঘ। M বিন্দু দিয়া YOY' এর সমান্তর করিয়া PMP' রেখাটি টান।

এখন, স্পষ্টই দেখা যায় যে, PMP' রেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ সর্ব্বদা 5 একক দীর্ঘ হইবে; এবং এতদ্ব্যতীত অন্য কোন বিন্দুরই ভুজ 5 একক দীর্ঘ হইবে না।

কাজেই, সচল বিন্দুটি সকল সময়েই PMP' রেখার উপরে থাকিবে।

অতএব দেখা যায় যে, একটি বিন্দু যদি এরূপভাবে চলিতে থাকে যে, উহার ভুজ সকল সময়েই 5 একক দীর্ঘ, তাহা হইলে উহার সঞ্চারপথ PMP' রেখাটি দ্বারা সূচিত হয়। ইহাকেই সংক্ষেপে বলা হয় যে, **PMP' সরলরেখা $x=5$ এই সমীকরণটির লেখ** বা **লৈখিক চিত্র** (graph).

টীকা 1. ইহা হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, $y=5$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্র XOX' এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা এবং ইহা হইতে উপরের দিকে 5 একক দূরে অবস্থিত।

টীকা 2. সাধারণভাবে বলা যাইতে পারে যে, $x=a$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্র (graph) y-অক্ষরেখা (y-axis) এর সমান্তরাল একটি রেখা, এবং এই রেখাটি x-অক্ষরেখার উপরিস্থিত এরূপ একটি বিন্দু দিয়া যায়, যাহা মূলবিন্দু (origin) হইতে a-একক দূরে অবস্থিত।

তদ্রূপ, $y=b$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্র x-অক্ষরেখা (x-axis) এর সমান্তরাল একটি রেখা, এবং উহা y-অক্ষরেখাস্থিত এরূপ একটি বিন্দু দিয়া যায়, যাহা মূলবিন্দু হইতে b-একক দূরে অবস্থিত।

টীকা 3. স্পষ্টতঃই, $x=0$ এর লৈখিক চিত্র y-অক্ষরেখা; এবং $y=0$ এর লৈখিক চিত্র x-অক্ষরেখা।

উদা. 2. একটি বিন্দু যদি এরূপভাবে চলিতে থাকে যে, উহার ভুজ (অর্থাৎ, x) এবং কোটি (অর্থাৎ, y) সর্ব্বদা $y=3x$ সমীকরণটি দ্বারা পরস্পর-সম্বদ্ধ, তাহা হইলে ঐ সচল বিন্দুটির সঞ্চারপথ কি, তাহা নির্ণয় কর। অর্থাৎ,

$y=3x$ সমীকরণটির লেখ অঙ্কিত কর। (Draw the graph of the equation $y=3x$)

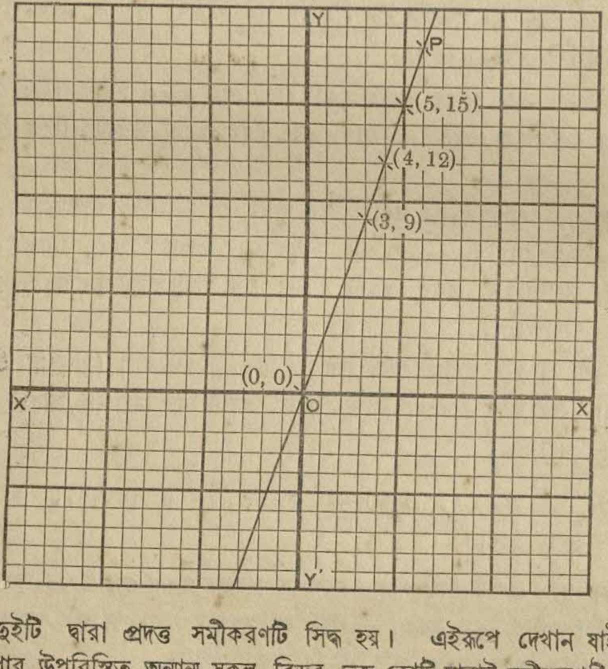
এস্থলে, x এর পরিবর্ত্তে ইচ্ছানুযায়ী মান বসাইয়া, সমীকরণ হইতে y এর অনুরূপ-মান নির্ণয় কর; যথা,

x	0	3	4	5
y	0	9	12	15

এবং x ও y এর এই যুগপৎ মানদ্বয়কে জ্যামিতিক বিন্দুদ্বারা সূচিত কর। ঐ বিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলেই সমীকরণটির লেখ পাওয়া যাইবে।

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া, (0, 0), (3, 9), (4, 12), এবং (5, 15) বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর। এখন একখানা মাপনীর সাহায্যে প্রত্যক্ষ কর যে, উপরিউক্ত বিন্দুগুলির যে কোন দুইটির সংযোজক সরলরেখা অপর বিন্দুগুলি দিয়াও যায়।

আবার ধর, এই অসীম সরলরেখাটির উপর P যে কোন একটি বিন্দু। চিত্র হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, P এর ভুজ-কোটি (co-ordinates) যথাক্রমে 6 এবং 18; এবং



এই সংখ্যা দুইটি দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, উক্ত রেখার উপরিস্থিত অন্যান্য সকল বিন্দুর ভুজ-কোটি দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। কিন্তু ঐ রেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ভুজ-কোটি দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। অথবা, বিপরীতভাবে বলিলে x ও y এর যে যে মান, $y=3x$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে, ঐ সকল যুগপৎ মান জ্যামিতিক বিন্দুদ্বারা সূচিত করিলে উক্ত বিন্দুসমূহ সর্ব্বদা OP সরল রেখার উপর অবস্থিত হইবে।

কাজেই, ঐ সকল বিন্দু সকল সময়েই OP সরলরেখার উপর থাকিবে এবং কোন সময়েই উহার বাহিরে যাইবে না।

অতএব, ইহা প্রতিপন্ন হইল যে, কোন সচল বিন্দুর ভুজ-কোটি (অর্থাৎ, x এবং y) সকল সময়েই যদি $y=3x$ সমীকরণ দ্বারা পরস্পর-সম্বদ্ধ হয়, তাহা হইলে ঐ বিন্দুর

সঞ্চারপথ OP রেখা দ্বারা সূচিত হইবে। অর্থাৎ, **OP সরলরেখাই $y=3x$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্র।**

টীকা 1. সাধারণভাবে বলিলে, m যে কোন ধ্রুবক-সংখ্যা (constant) ই হউক না কেন, $y=mx$ এর লৈখিক চিত্র, মূলবিন্দুগামী এক সরলরেখা হইবে।

টীকা 2. লক্ষ্য করিবে যে, সংস্থাপিত বিন্দুগুলির সংখ্যা যত বেশী হইবে এবং উহাদের অবস্থান যত সন্নিকটবর্ত্তী হইবে, ততই লেখটি নির্ভুল ভাবে অঙ্কিত করা যাইবে। **কোন সময়ই অন্ততঃ তিনটি বিন্দু সংস্থাপন না করিয়া কোন সরল সমীকরণের লেখ অঙ্কিত করিবে না।**

উদা. 3. একটি বিন্দু যদি এরূপভাবে চলিতে থাকে যে, উহার ভুজ-কোটি (অর্থাৎ, x এবং y) সর্ব্বদা $y=-4x+5$ সমীকরণটি দ্বারা পরস্পর-সম্বদ্ধ, তাহা হইলে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ কি, তাহা নির্ণয় কর। অর্থাৎ,

$y=-4x+5$ এর লেখ অঙ্কিত কর। (Draw the graph of $y=-4x+5$.)

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে উদা. 2 এর নির্দ্দেশ অনুসারে, x ও y-এর যুগপৎ মানের একটি তালিকা প্রস্তুত কর ; যথা,

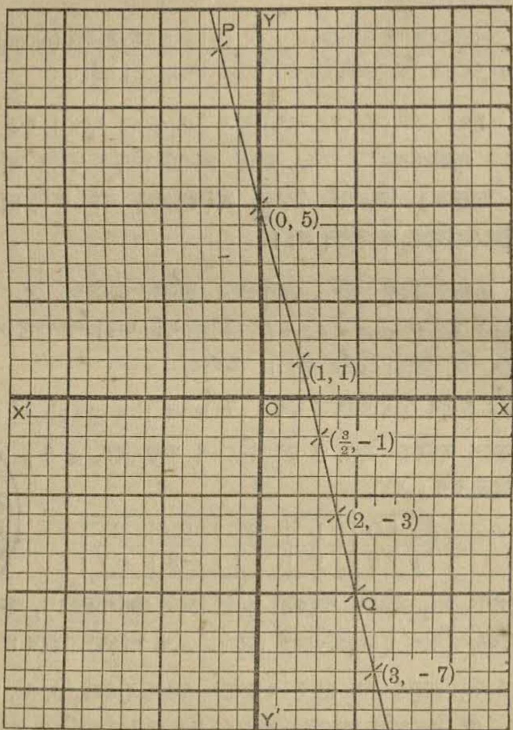
x	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3
y	5	1	-1	-3	-7

এবং ঐ যুগপৎ মানগুলিকে পরবর্ত্তী পৃষ্ঠার চিত্রে প্রদর্শিতরূপে, জ্যামিতিক বিন্দুদ্বারা সূচিত কর। ঐ বিন্দুগুলিকে যুক্ত করিলেই নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে।

এখন, ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দ্বিগুণকে একক ধরিয়া $(0, 5)$, $(1, 1)$, $(\frac{3}{2}, -1)$, $(2, -3)$ এবং $(3, -7)$ বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর। উহাদের সংযোজক অসীম সরলরেখাটিই নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইবে।

আবার, ধর, এই অসীম সরলরেখার উপর P যে কোন একটি বিন্দু। চিত্র হইতে দেখা যায় যে, P এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে -1 ও 9 ; এবং এই সংখ্যা দুইটি দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। সরলরেখার উপর আর একটি বিন্দু, Q, লইলেও দেখা যায় যে, উহার ভুজ ও কোটি '$\frac{5}{2}$ এবং -5' ও সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। তদ্রূপ, দেখা যাইবে যে, এই সরলরেখার উপরিস্থিত সকল বিন্দুর ভুজ-কোটিই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। কিন্তু সরল-রেখাটির বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ভুজ-কোটি দ্বারাই প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে না। কাজেই, সচল বিন্দুটি সর্ব্বদা PQ সরলরেখার উপরে থাকিবে এবং কোন সময়েই উহার বাহিরে যাইবে না। আবার, x ও y এর যে যে যুগপৎ মান সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে ঐ সকল যুগপৎ মানদ্বারা সূচিত সকল বিন্দুই PQ সরলরেখার উপর অবস্থিত।

সুতরাং, কোন সচল বিন্দুর ভুজ-কোটি যদি $y = -4x + 5$ দ্বারা সম্বদ্ধ হয়, তাহা



হইলে উহার সঞ্চারপথ, PQ, এই অসীম সরলরেখার দ্বারা স্থচিত হইবে। অর্থাৎ, **PQ সরলরেখাটিই $y = -4x + 5$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্র।**

টীকা 1. সাধারণভাবে বলিলে, m ও c যে কোন দুই ধ্রুবক-সংখ্যা (any two constants) ই হউক না কেন, $y = mx + c$ এর লৈখিক চিত্র, $(0, c)$ বিন্দুগামী এক সরলরেখা হইবে।

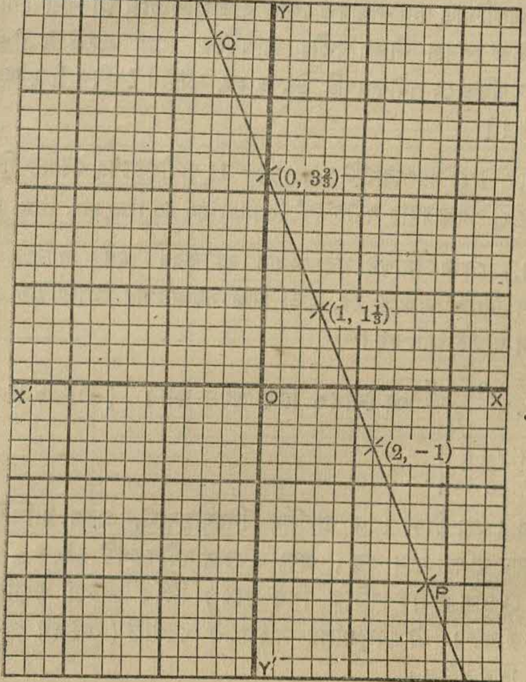
টীকা 2. যেহেতু দুই অক্ষর (ধর, x ও y)-বিশিষ্ট প্রত্যেক সরল সমীকরণকেই $y = mx + c$ এর আকারে প্রকাশ করা যায়, অতএব **সকল সরল সমীকরণের লৈখিক চিত্রই সরলরেখা হইবে।** কারণ, মনে কর, $ax + by + c = 0$ যে কোন দুইটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট সরল সমীকরণ। ইহাকে পক্ষান্তর করিয়া $by = -ax - c$ রূপে লেখা যায়। তারপর 'b' দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ দিলেই $y = \left(\frac{-a}{b}\right)x + \left(\frac{-c}{b}\right)$ হয়।

টীকা 3. কোন নির্দ্দিষ্ট সমীকরণের লৈখিক চিত্রকে এক সচল বিন্দুর সঞ্চার-পথ বলিয়া অভিহিত করা যায়, যদি উক্ত সচল বিন্দুর যে কোন অবস্থানের ভুজ-কোটির মানদ্বয়ই নির্দ্দিষ্ট সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

উদা. 4. $7x+3y=11$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর। (Draw the graph of the equation $7x+3y=11$.) এস্থলে,

x	0	1	2
y	$3\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	-1

এখন, ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর তিনগুণকে একক ধরিয়া $(0, 3\frac{2}{3})$, $(1, 1\frac{1}{3})$ এবং $(2, -1)$ বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর। স্পষ্টই $(0, 3\frac{2}{3})$, $(1, 1\frac{1}{3})$ এবং $(2, -1)$ বিন্দুগুলির প্রত্যেকটি নির্ণেয় চিত্রের উপর অবস্থিত। একখানা মাপনীর সাহায্যে প্রত্যক্ষ কর, উক্ত বিন্দু তিনটির যে কোন দুইটির সংযোজক সরলরেখার উপর তৃতীয়টি অবস্থিত। এই অসীম সরলরেখাটিই নির্ণেয় লেখ হইবে।



এই অসীম সরলরেখাটির উপর যে কোন একটি বিন্দু, P, লইয়া দেখা যায় যে, উহার ভুজ-কোটি (অর্থাৎ, 3 এবং $-3\frac{1}{3}$) প্রদত্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। ঐ সরলরেখার উপর অন্য একটি বিন্দু, Q, লইলেও দেখা যায় যে, উহার ভুজ-কোটি, -1 এবং 6, সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, এই অসীম সরলরেখা, PQ, এর উপরিস্থিত সকল বিন্দুর ভুজ-কোটিই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে ; কিন্তু উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ভুজ-কোটিই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না। অতএব, PQ দ্বারা সূচিত অসীম সরলরেখাটিই নির্ণেয় লৈখিক চিত্র।

টীকা 1. $7x+3y=11$ সমীকরণটিকে পক্ষান্তরকরণ প্রভৃতি প্রক্রিয়া দ্বারা $y=\frac{11-7x}{3}$ রূপেও লেখা যায়। সুতরাং, $7x+3y=11$ এর লৈখিক চিত্রকে, (অর্থাৎ, $y=\frac{11-7x}{3}$ এর লৈখিক চিত্রকে) $\frac{11-7x}{3}$ **এই বীজগণিতীয় রাশির লৈখিক চিত্রও** বলা হয়।

অতএব, একটিমাত্র 'চল'-সমন্বিত কোন **বীজগণিতীয় রাশির** লৈখিক চিত্র অঙ্কন করিতে হইলে, উক্ত সমগ্র বীজগণিতীয় রাশিটিকে অপর একটি 'চল' এর সমান ধরিয়া লইয়া দুইটি চল-সমন্বিত যে সমীকরণটি উৎপন্ন হয়, তাহার লৈখিক চিত্র অঙ্কন করিতে হয়। [উদাহরণ 5 দেখ।]

টীকা 2. PQ সরলরেখাটি $7x+3y=11$ সমীকরণের লৈখিক চিত্র হওয়ায়, উক্ত সমীকরণটিকে 'PQ সরলরেখার সমীকরণ' (equation to the str. line PQ) বলে।

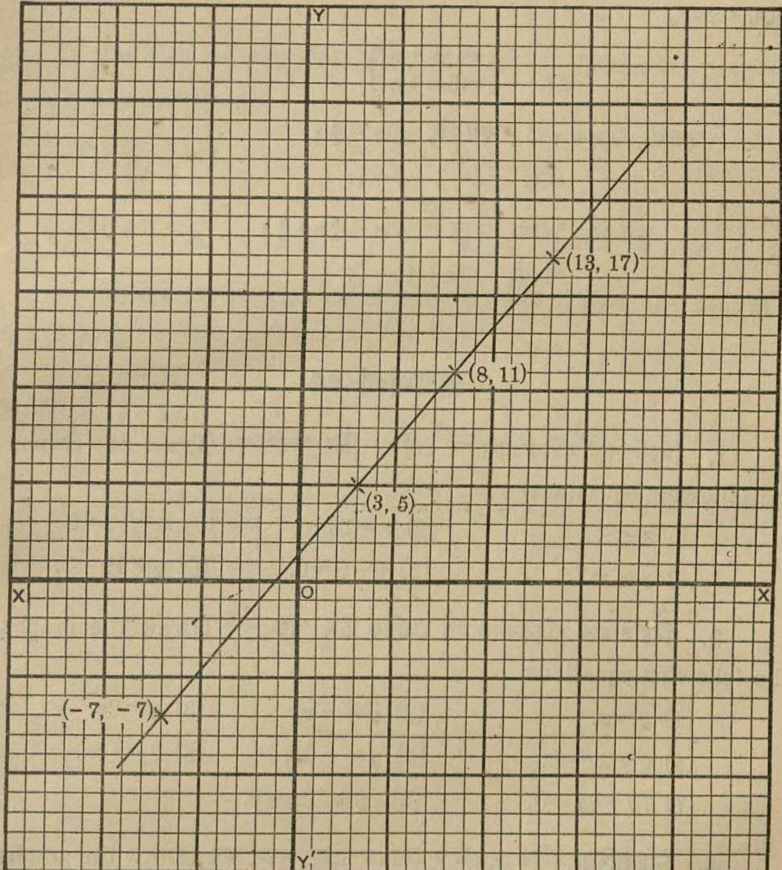
টীকা 3. কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইলে, এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় করিতে হয়, যাহা উক্ত সরলরেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটির মান দ্বারাই সিদ্ধ হয়।

উদা. 5. $\frac{6x+7}{5}$ এর লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর। [Draw the graph of the expression $\frac{6x+7}{5}$.]

উদাহরণ 4 এর টীকা 1 এ প্রদর্শিত নিয়মানুযায়ী, প্রদত্ত রাশিটিকে অপর একটি 'চল'-y এর সমান বলিয়া মনে কর ; এবং এতল্লব্ধ সমীকরণটি হইতে x ও y এর কয়েকটি যুগপৎ মান (যেগুলি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে) নির্ণয় করিয়া উহাদিগকে জ্যামিতিক বিন্দুদ্বারা সূচিত কর। ঐ বিন্দুগুলির সংযোজক রেখাটি (এইরূপ ক্ষেত্রে সরলরেখা) ই নির্ণেয় লৈখিক চিত্র হইবে।

x	-7	3	8	13
y	-7	5	11	17

এখন, ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে একক ধরিয়া, $(-7, -7)$, $(3, 5)$, $(8, 11)$, $(13, 17)$ প্রভৃতি বিন্দুগুলিকে সংস্থাপন কর।



একখানা মাপনীর সাহায্যে প্রত্যক্ষ কর যে উহাদের যে কোন দুইটির সংযোজক সরলরেখার উপর অন্য বিন্দুগুলিও অবস্থিত। এই সরলরেখাটিই প্রদত্ত **বীজগণিতীয় রাশিটির লৈখিক চিত্র।**

উদা. 6. $(1, 1)$ এবং $(3, -\frac{1}{2})$ বিন্দু দুইটি দিয়া অঙ্কিত সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, $y = mx + c$ নির্ণেয় সমীকরণ।

যেহেতু $(1, 1)$ এবং $(3, -\frac{1}{2})$ এর প্রত্যেক মানযুগল দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে, অতএব,

$$\left.\begin{aligned} 1 &= m + c \\ \text{এবং } -\tfrac{1}{2} &= 3m + c \end{aligned}\right\}$$

সুতরাং, $2m = -\frac{3}{2}$; কাজেই, $m = -\frac{3}{4}$;

এবং $c = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$;

অথবা, $3x + 4y = 7$.

প্রশ্নমালা 84

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর (Draw the graphs of the following equations) :

(1) $x = 8$. (2) $x = 13$. (3) $x + 11 = 0$.

(4) $y = -7$. (5) $y - 9 = 0$. (6) $y + 10 = 0$.

2. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর (Draw the graphs of the following equations) :

(1) $y = x$. (2) $y = -x$. (3) $y = 2x$.

(4) $y + 2x = 0$. (5) $y = -3x$. (6) $3y = 5x$.

(7) $7y + 8x = 0$. (8) $6y + 13x = 0$.

3. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর (Draw the graphs of the following equations) :

(1) $y = 3x + 4$. (2) $y = 7x - 8$. (3) $y = -5x + 9$.

(4) $y = -8x - 11$. (5) $3y = 7x + 4$. (6) $-6y = 7x - 10$.

4. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর (Draw the graphs of the following equations):

(1) $2x+7y=10$. (2) $4x-5y-7=0$.

(3) $5x+6y+8=0$. (4) $-3x+7y+8=0$.

(5) $10y-9x=13$. (6) $8x-11y+13=0$.

5. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর (Draw the graphs of the following equations):

(1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$. (2) $\frac{x}{7}+\frac{y}{-9}=1$. (3) $\frac{x}{-8}+\frac{y}{13}=1$.

(4) $y=\frac{5-7x}{6}$. (5) $y=\frac{9x-13}{4}$. (6) $\frac{3x}{4}-\frac{4y}{3}=1$.

6. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর (Draw the graphs of the following expressions):

(1) $x-3$. (2) $3x+4$. (3) $-7x+8$.

(4) $\frac{7-4x}{3}$. (5) $\frac{5x-9}{4}$. (6) $\frac{8x+11}{5}$.

7. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরলরেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর (Find the equation of the straight line which passes through each of the following pairs of points):

(1) (0, 0), (5, 6). (2) (0, 5), (7, 0).

(3) (6, −8), (−7, 5). (4) (−4, 8), (−9, −13).

(5) (−11, 0), (7, −10).

[দশম শ্রেণীর পাঠ্য]

পঞ্চবিংশ অধ্যায়

পূর্ব্বপাঠের পুনরালোচনা

(Revision of previous work)

168. পূর্ব্বপাঠের পুনরালোচনার জন্য নিম্নে কয়েকটি জটিল সূত্রাবলী ও উহাদের প্রয়োগ এবং একটি বিবিধ প্রশ্নমালা সন্নিবেশিত হইল। ইহা পড়িলে এবং প্রশ্নমালাটির সমাধান করিলে, পূর্ব্বে আলোচিত বিষয়সমূহের সম্যক ধারণা হইবে।

I. (*a*) জটিল সূত্রাবলী (Harder Formulæ) ও উহাদের প্রয়োগ (Their Applications)

169. সূত্র : $(x+a)(x+b)(x+c)$

$$= x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc.$$

[$(x+a)(x+b)(x+c) = (x+a)\{(x+b)(x+c)\}$

$= (x+a)\{x^2+(b+c)x+bc\}$

$= x\{x^2+(b+c)x+bc\}+a\{x^2+(b+c)x+bc\}$

$= \{x^3+(b+c)x^2+bcx\}+\{ax^2+a(b+c)x+abc\}$

$= x^3+(b+c+a)x^2+\{a(b+c)+bc\}x+abc$

$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc.$]

টীকা। শিক্ষার্থিগণ অতি সহজেই প্রত্যক্ষ করিতে পারে যে, নিম্নলিখিত সূত্রাবলীও এই সূত্রটিরই অন্তর্ভুক্ত।

$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc$;

$(x+a)(x+b)(x-c) = x^3+(a+b-c)x^2-(bc+ca-ab)x-abc$;

$(x+a)(x-b)(x-c) = x^3+(a-b-c)x^2+(bc-ca-ab)x+abc.$

দৃষ্টান্তস্বরূপ,

$(x-a)(x-b)(x-c) = \{x+(-a)\}\{x+(-b)\}\{x+(-c)\}$

$= x^3+\{(-a)+(-b)+(-c)\}x^2+\{(-b)(-c)$
$+(-c)(-a)+(-a)(-b)\}x+(-a)(-b)(-c)$

$= x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc.$

এইরূপে অন্য দুইটি সূত্রের সত্যতাও প্রতিপন্ন করা যায় ; ছাত্রদের উপর উহাদের প্রমাণের ভার অর্পিত হইল।

উদা. 1. $x+2$, $x+4$ এবং $x+6$ এর গুণফল লিখ।

$$2+4+6=12,$$
$$4\times6+6\times2+2\times4=24+12+8=44,$$
$$2\times4\times6=48.$$

অতএব, নির্ণেয় গুণফল $=x^3+12x^2+44x+48.$

উদা. 2. $x-3$, $x-5$ এবং $x-7$ এর গুণফল লিখ।

$$(-3)+(-5)+(-7)=-15,$$
$$(-5)(-7)+(-7)(-3)+(-3)(-5)=35+21+15=71,$$
$$(-3)(-5)(-7)=-105.$$

অতএব, নির্ণেয় গুণফল $=x^3-15x^2+71x-105.$

উদা. 3. $x-4$, $x+5$ এবং $x-3$ এর গুণফল লিখ।

$$(-4)+5+(-3)=-2,$$
$$(5)(-3)+(-3)(-4)+(-4)(5)=-15+12-20=-23,$$
$$(-4)\times5\times(-3)=60.$$

অতএব, নির্ণেয় গুণফল $=x^3-2x^2-23x+60.$

উদা. 4. $x+3$, $x+5$ এবং $x-8$ এর গুণফল লিখ।

$$3+5+(-8)=0,$$
$$(5)(-8)+(-8)(3)+(3)(5)=-40-24+15=-49,$$
$$3\times5\times(-8)=-120.$$

∴ অতএব, নির্ণেয় গুণফল $=x^3-0.x^2-49x-120$

$$=x^3-49x-120.$$

প্রশ্নমালা 85

গুণফল লিখ (Write down the product of) :

1. $x+1$, $x+2$ এবং $x+3$.
2. $x+2$, $x+5$ এবং $x+7$.
3. $x+3$, $x-6$ এবং $x+2$.
4. $x+4$, $x+5$ এবং $x-10$.
5. $x-8$, $x+3$ এবং $x+1$.
6. $x-5$, $x-2$ এবং $x+8$.
7. $x-3$, $x+7$ এবং $x-4$.
8. $x+6$, $x-5$ এবং $x-7$.
9. $x-5$, $x-7$ এবং $x-11$.
10. $x-3$, $x-6$ এবং $x-9$.
11. $x+4$, $x-5$ এবং $x-12$.
12. $x+5$, $x+9$ এবং $x+11$.

13. $x-6,\ x+8$ এবং $x-2$.
14. $x-3, x-7$ এবং $x-13$.
15. $x-3,\ x+12$ এবং $x+4$.
16. $x-9, x-10$ এবং $x+12$.
17. $x+9,\ x-5$ এবং $x-7$.
18. $x+8, x+12$ এবং $x+15$.
19. $x-14, x+8$ এবং $x+6$.
20. $x-5, x-10$ এবং $x-16$.

170. বহুপদরাশির বর্গ-নির্ণয়ঃ নিয়ম 59 এর অন্তর্গত উদা. 4 এবং 5 এ যথাক্রমে দেখান হইয়াছে যে,

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\ ;$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

উপরিউক্ত উদাহরণ দুইটিতে দেখা যায় যে, সম্পূর্ণ রাশিটির বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে, উহার অন্তর্গত প্রত্যেকটি পদের বর্গের সমষ্টি লইয়া উহার সহিত, প্রত্যেকটি পদকে উহার পরবর্ত্তী সকল পদ দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলের দ্বিগুণ, যোগ করিতে হয়। উপরিউক্ত ফলগুলিকে নিম্নলিখিতরূপে লিখিলে মনে রাখা স্থবিধাজনক। যথা,

$$(a+b+c^2)=a^2+b^2+c^2+2a(b+c)+2bc\ ;$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2a(b+c+d)+2b(c+d)+2cd.$$

ইহা দেখান যাইতে পারে যে, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই এই নিয়ম প্রযোজ্য। দৃষ্টান্তস্বরূপ, $a+b+c+d+e$ এর বর্গ নির্ণয় করা যাক।

এখন, $(a+b+c+d+e)^2$

$$=\{(a+b+c)+(d+e)\}^2$$
$$=(a+b+c)^2+2(a+b+c)(d+e)+(d+e)^2$$
$$=\{a^2+b^2+c^2+2a(b+c)+2bc\}$$
$$+\{2a(d+e)+2b(d+e)+2c(d+e)\}+(d^2+e^2+2de)$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2a(b+c+d+e)+2b(c+d+e)$$
$$+2c(d+e)+2de.$$

অতএব, আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পারি যে, কোন বহুপদরাশির বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে, উহার অন্তর্গত প্রত্যেক পদের বর্গ লইয়া উহাদের সমষ্টির সহিত, প্রত্যেক পদকে তৎপরবর্ত্তী পদসমূহ দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলের দ্বিগুণ, যোগ করিতে হয়।

বলা বাহুল্য যে, বহুপদরাশিটিতে এক বা একাধিক ঋণাত্মক পদ থাকিলেও উপরিবর্ণিত নিয়ম প্রযোজ্য হইবে; কারণ, ঐ নিয়মে উল্লিখিত প্রতীকসমূহ অত্যন্ত ব্যাপক অর্থেই প্রযুক্ত হইয়াছে, এবং উহাদের মধ্যে যে কোনটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক রাশি নির্দ্দেশ করিতে পারে।

টীকা। যেহেতু $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$,

অতএব, $2(ab+ac+bc)=\{a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\}-(a^2+b^2+c^2)$
$$=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2).$$

তদ্রূপ, $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$.

উদা. 1. $x-y+z-v$ এর বর্গ লিখ।

$$(x-y+z-v)^2=x^2+y^2+z^2+v^2+2x(-y+z-v)+2(-y)(z-v)+2z(-v)$$
$$=x^2+y^2+z^2+v^2-2xy+2xz-2xv-2yz+2yv-2zv.$$

উদা. 2. $-a+2b-3c-d$ এর বর্গ লিখ।

$$(-a+2b-3c-d)^2=a^2+4b^2+9c^2+d^2+2(-a)(2b-3c-d)+2(2b)(-3c-d)+2(-3c)(-d)$$
$$=a^2+4b^2+9c^2+d^2-4ab+6ac+2ad-12bc-4bd+6cd.$$

উদা. 3. $a=19$, $b=18$ এবং $c=32$ হইলে, $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $=a^2+b^2+c^2+2a(b-c)+2b(-c)=(a+b-c)^2$.

অতএব, নির্ণেয় মান $=(19+18-32)^2=(5)^2=25$.

উদা. 4. $x=b+c$, $y=c-a$ এবং $z=a-b$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz=4b^2.$$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1883]

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz=x^2+y^2+z^2+2x(-y-z)+2(-y)(-z)$$
$$=(x-y-z)^2=\{(b+c)-(c-a)-(a-b)\}^2$$
$$=(2b)^2=4b^2.$$

প্রশ্নমালা 86

বর্গ নির্ণয় কর (Write down the square of) :

1. $x+y-z$.
2. $x-y+z$.
3. $-x+y+z$.
4. $-x-y+z$.
5. $x-y-z$.
6. $a-x+y-z$.
7. $a-x-y-z$.
8. $m+n+p+q+r$.
9. $p-q+r-x-y$.
10. $-a+b-c+x-y-z$.
11. $a-2x-3y-4z$.
12. $2a-b+2c-d$.

মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

13. $l^2+m^2+n^2-2lm+2ln-2mn$, যখন $l=17$, $m=23$ এবং $n=13$.

14. $p^2+q^2+r^2+2pq-2pr-2qr$, যখন $p=16$, $q=12$ এবং $r=25$.

15. $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$, যখন $a=28$, $b=13$ এবং $c=15$.

16. $x^2+y^2+1+2xy-2x-2y$, যখন $x=6$ এবং $y=7$.

17. $x^2+y^2+2xy-2x-2y+36$, যখন $x=23$ এবং $y=18$.

18. $x^2+4y^2+1-4xy-2x+4y$, যখন $x=26$ এবং $y=12$.

19. $x^2+9y^2-6xy-2x+6y+64$, যখন $x=49$ এবং $y=16$.

20. $9x^2+y^2-6xy+6x-2y-24$, যখন $x=14$ এবং $y=38$.

21. $a+b+c=12$ এবং $a^2+b^2+c^2=50$ হইলে, $ab+ac+bc$ এর মান নির্ণয় কর।

22. $a+b+c=13$ এবং $ab+ac+bc=50$ হইলে, $a^2+b^2+c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

171. দ্বিপদরাশির ঘাত-নির্ণয় : উদ্ঘাতন (Involution) :

গুণন-প্রক্রিয়া দ্বারা দেখান যাইতে পারে যে,

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2&=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2&=a^2-2ab+b^2\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^3&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3&=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^4&=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\(a-b)^4&=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^5&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\(a-b)^5&=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^6&=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6\\(a-b)^6&=a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6\end{aligned}\right\}$$

টীকা 1. কোন রাশিকে সেই রাশি দ্বারা এক বা একাধিক বার পর পর গুণ করিলে, লব্ধ গুণফলকে ঐ রাশির **শক্তি** (power) বলে ; এবং ঐ রাশিটিকে গুণন-প্রক্রিয়া-নির্দ্দিষ্ট **শক্তিতে উন্নীত** করা হইল, এরূপ বলা হয়। কোন রাশিকে যে কোন শক্তিতে উন্নীত করার প্রক্রিয়াকে **উদ্ঘাতন** (involution) বলে ; এবং কোন রাশির উদ্ঘাতন প্রক্রিয়া দ্বারা যে রাশিমালা পাওয়া যায়, তাহাকে ঐ রাশির **বিস্তৃতি** (expansion) বলে।

টীকা 2. উপরিউক্ত ফলগুলি পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে,

(1) দ্বিপদরাশির যে কোন শক্তির বিস্তৃতিতে (expansion এ) লব্ধ পদ-সংখ্যা, ঐ শক্তির সূচক-সংখ্যা হইতে 1 (এক) অধিক হয়। যথা, পঞ্চম শক্তির বিস্তৃতিতে পদ-সংখ্যা 6, ষষ্ঠ শক্তির বিস্তৃতিতে পদ-সংখ্যা 7, ইত্যাদি।

(2) $a-b$ এর যে কোন শক্তির বিস্তৃতি (expansion)-এর এবং $a+b$ এর সমশক্তির বিস্তৃতির মধ্যে পার্থক্য এই যে, পূর্ব্বোক্ত বিস্তৃতির পদগুলি একান্তরভাবে (alternately) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক, কিন্তু শেষোক্ত বিস্তৃতির পদগুলি সমস্তই ধনাত্মক হয়।

(3) কোন দ্বিপদরাশির শক্তিতে যে সূচক থাকে, দ্বিপদরাশির প্রথম পদ a এবং দ্বিতীয় পদ b কে সেই সূচকবিশিষ্ট করিলে যথাক্রমে বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদ পাওয়া যায়। যথা, $a+b$ এর চতুর্থ শক্তির বিস্তৃতিতে a^4 প্রথম পদ এবং b^4 শেষ পদ হয়; $a+b$ এর পঞ্চম শক্তির বিস্তৃতিতে a^5 প্রথম পদ এবং b^5 শেষ পদ হয়; ইত্যাদি; এবং অন্যান্য পদগুলির যে কোনটিতে a এর সূচক, উহার পূর্ব্ববর্ত্তী পদটির a এর সূচক অপেক্ষা 1 (এক) কম এবং b এর সূচক, উহার পূর্ব্ববর্ত্তী পদটির b এর সূচক অপেক্ষা 1 (এক) বেশী হইয়া থাকে।

(4) বিস্তৃতির দ্বিতীয় পদের সাংখ্য-সহগ দ্বিপদরাশির শক্তির সূচকের সমান হয়; এবং যে কোন পদের সাংখ্য-সহগকে সেই পদের a এর সূচক দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলকে সেই পদের স্থান-নির্দ্দেশক সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে, উহার পরবর্ত্তী পদের সাংখ্য-সহগ পাওয়া যায়। যথা, দ্বিতীয় পদের সাংখ্য-সহগকে ঐ পদের a এর সূচক দ্বারা গুণ করিয়া 2 দ্বারা ভাগ করিলে তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগ পাওয়া যাইবে; তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগকে ঐ পদের a এর সূচক দ্বারা গুণ করিয়া 3 দ্বারা ভাগ করিলে চতুর্থ পদের সাংখ্য-সহগ পাওয়া যাইবে; ইত্যাদি।

(5) বিস্তৃতিতে, প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্ত্তী পদ দুইটির সাংখ্য-সহগদ্বয় সমান। যথা, প্রথম দিক্ হইতে গণনা করিয়া 4-তম পদের সাংখ্য-সহগ, শেষ দিক্ হইতে গণনা করিয়া 4-তম পদের সাংখ্য-সহগের সমান; তদ্রূপ, প্রথম হইতে 5-তম পদের সাংখ্য-সহগ, শেষ হইতে 5-তম পদের সাংখ্য-সহগের সমান; ইত্যাদি।

উল্লিখিত নিয়মসমূহকে সাধারণভাবে প্রতিপন্ন করা এই পুস্তকের আলোচ্য বিষয়ের বহির্ভূত। কিন্তু এইগুলি মনে রাখিলে, দ্বিপদরাশির যে কোন শক্তির বিস্তৃত রূপ (expanded form) গুণন-প্রক্রিয়া ব্যতিরেকে অতি সহজে লিখিতে পারা যায়।

পরবর্ত্তী উদাহরণগুলি দ্বারা উপরিউক্ত নিয়মসমূহের প্রয়োগ পরিষ্কাররূপে বুঝান যাইতেছে।

উদা. 1. $(a+b)^7$ এর বিস্তৃতি (expansion) নির্ণয় কর।

বিস্তৃতির মোট পদ-সংখ্যা = ৪ ;

এবং প্রথম পদ $= a^7$;

দ্বিতীয় পদ $= 7a^6b$;

তৃতীয় পদ $= \frac{7\times 6}{2}a^5b^2 = 21a^5b^2$;

চতুর্থ পদ $= \frac{21\times 5}{3}a^4b^3 = 35a^4b^3$.

[টীকা 2, নিয়ম (3) এবং (4)]

এখন, যেহেতু প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্ত্তী পদদ্বয়ের সাংখ্য-সহগগুলি সমান [টীকা 2, নিয়ম (5)], অতএব, বিস্তৃতির পঞ্চম, ষষ্ঠ, সপ্তম এবং অষ্টম পদগুলি যথাক্রমে $35a^3b^4$, $21a^2b^5$, $7ab^6$ এবং b^7 হইবে।

সুতরাং, $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

উদা. 2 $(x-y)^8$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

স্পষ্টতঃ, বিস্তৃতির মোট পদ-সংখ্যা = 9.

প্রথম পদ $= x^8$;

দ্বিতীয় পদ $= -8x^7y$;

তৃতীয় পদ $= \frac{8\times 7}{2}x^6y^2 = 28x^6y^2$;

চতুর্থ পদ $= -\frac{28\times 6}{3}x^5y^3 = -56x^5y^3$;

পঞ্চম পদ $= \frac{56\times 5}{4}x^4y^4 = 70x^4y^4$.

এখন, যেহেতু পরবর্ত্তী চারিটি পদের সাংখ্য-সহগ বিপরীতক্রমে প্রথম চারি পদের সাংখ্য-সহগের সমান, অতএব, বিস্তৃতির ষষ্ঠ, সপ্তম, অষ্টম এবং নবম পদগুলি যথাক্রমে $-56x^3y^5$, $28x^2y^6$, $-8xy^7$ এবং y^8.

সুতরাং, $(x-y)^8 = x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^5y^3 + 70x^4y^4 - 56x^3y^5 + 28x^2y^6 - 8xy^7 + y^8$.

উদা. 3. $(2x-3y)^7$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

স্পষ্টতঃ, বিস্তৃতির মোট পদ-সংখ্যা = 8.

যেহেতু এস্থলে a এর পরিবর্ত্তে $2x$ এবং b এর পরিবর্ত্তে $3y$ দেওয়া আছে, অতএব, বিস্তৃতিতে,

$$\text{প্রথম পদ} = (2x)^7 ;$$
$$\text{দ্বিতীয় পদ} = -7(2x)^6(3y) ;$$
$$\text{তৃতীয় পদ} = \frac{7 \times 6}{2}(2x)^5(3y)^2 = 21(2x)^5(3y)^2 ;$$
$$\text{চতুর্থ পদ} = -\frac{21 \times 5}{3}(2x)^4(3y)^3 = -35(2x)^4(3y)^3.$$

কাজেই, পঞ্চম, ষষ্ঠ, সপ্তম এবং অষ্টম পদগুলি যথাক্রমে $35(2x)^3(3y)^4$, $-21(2x)^2(3y)^5$, $7(2x)(3y)^6$ এবং $-(3y)^7$ হইবে।

সুতরাং,

$$\begin{aligned}(2x-3y)^7 &= (2x)^7 - 7(2x)^6(3y) + 21(2x)^5(3y)^2 - 35(2x)^4(3y)^3 \\ &\quad + 35(2x)^3(3y)^4 - 21(2x)^2(3y)^5 + 7(2x)(3y)^6 - (3y)^7 \\ &= 128x^7 - 7(64x^6)(3y) + 21(32x^5)(9y^2) - 35(16x^4)(27y^3) \\ &\quad + 35(8x^3)(81y^4) - 21(4x^2)(243y^5) + 7(2x)(729y^6) - 2187y^7 \\ &= 128x^7 - 1344x^6y + 6048x^5y^2 - 15120x^4y^3 + 22680x^3y^4 \\ &\quad - 20412x^2y^5 + 10206xy^6 - 2187y^7.\end{aligned}$$

উদা. 4. $x = \sqrt[3]{3} - 1$ হইলে, $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x - 8$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= (x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1) - 9 \\ &= (x+1)^6 - 9 = (\sqrt[3]{3} - 1 + 1)^6 - 9 = (\sqrt[3]{3})^6 - 9 = 9 - 9 = 0.\end{aligned}$$

প্রশ্নমালা 87

বিস্তৃতি নির্ণয় কর Expand) :

1. $(x+1)^5$. **2.** $(x+1)^6$. **3.** $(a+b)^8$. **4.** $(a+b)^9$.
5. $(x-y)^5$. **6.** $(m-n)^7$. **7.** $(x+2)^4$. **8.** $(x+2)^5$.
9. $(x+1)^8$. **10.** $(x+3)^4$. **11.** $(x-1)^5$. **12.** $(2-z)^6$.
13. $(2x-1)^4$. **14.** $(x-y)^9$. **15.** $(3x-2)^5$. **16.** $(1-a)^8$.
17. $(1-c)^7$. **18.** $(1-3x)^6$. **19.** $(1-2x)^7$. **20.** $(2x-a)^8$.
21. $(x-a)^{10}$. **22.** $(3x-2a)^5$.

সরল কর (Simplify) :

23. $(x+1)^5 - (x-1)^5$. **24.** $(x-1)^6 + (x+1)^6$. **25.** $(x+a)^7 - (x-a)^7$.

নিম্নলিখিত বিস্তৃতিতে সাংখ্য-সহগগুলির যোগফল নির্ণয় কর (Find the sum of the coefficients in the expansion of) :

26. $(x+a)^4$. 27. $(x+a)^5$. 28. $(x+a)^6$.
29. $(x+a)^7$. 30. $(x+a)^8$.

মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

31. $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+32$, যখন $x=-2$.

32. $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x$, যখন $x=\sqrt[3]{2}+1$.

33. $16x^4-32x^3+24x^2-8x-80$, যখন $x=2$.

34. $x^4+12x^3+54x^2+108x+81$, যখন $x=-5$.

35. $x^4+8x^3+24x^2+32x-609$, যখন $x=-7$.

172. সূত্র : $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

[$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$$=(a+b+c)\{(a^2+b^2-ab)-(ac+bc)+c^2\}$$
$$=(a+b+c)\{\overline{(a+b)^2-3ab}-c(a+b)+c^2\}$$
$$=(\overline{a+b}+c)\{\overline{(a+b)^2-c(a+b)+c^2}-3ab\}$$
$$=(\overline{a+b)^3+c^3}-3ab(\overline{a+b}+c)$$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$]

অনুসি.। বিপরীতক্রমে, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$. অতএব, আমরা সর্ব্বদা $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর আকারের যে কোন রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে পারি।

টীকা। যেহেতু $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$, অতএব, $a^3+b^3+c^3-3abc=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$.

উদা. 1. $x^2+y^2+z^2+xy+xz-yz$ কে $x-y-z$ দ্বারা গুণ কর।

x এর পরিবর্ত্তে a, $-y$ এর পরিবর্ত্তে b এবং $-z$ এর পরিবর্ত্তে c লিখিলে,

$(x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy+xz-yz)$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=x^3-y^3-z^3-3xyz.$$

উদা. 2. $m^3-n^3+1+3mn$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

m এর পরিবর্ত্তে a, $-n$ এর পরিবর্ত্তে b এবং 1 এর পরিবর্ত্তে c লিখিলে,

$$m^3-n^3+1+3mn=a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=(m-n+1)(m^2+n^2+1+mn-m+n).$$

উদা. 3. দেখাও যে, $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

$x-y$ এর পরিবর্ত্তে a, $y-z$ এর পরিবর্ত্তে b এবং $z-x$ এর পরিবর্ত্তে c লিখিলে,

$$a+b+c=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0.$$

অতএব, $\{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3\}-3(x-y)(y-z)(z-x)$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=0\times(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0;$$

$\therefore\ (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x).$

প্রশ্নমালা 88

গুণ কর (Multiply) :

1. $x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz$ কে $x+y-z$ দ্বারা।
2. $p^2+4q^2+r^2+2pq+pr-2qr$ কে $p-2q-r$ দ্বারা।
3. $4x^2+9y^2+z^2+6xy+2xz-3yz$ কে $2x-3y-z$ দ্বারা।
4. $a^2+4b^2+2ab-3a+6b+9$ কে $a-2b+3$ দ্বারা।
5. $9a^2+25b^2+15ab+12a-20b+16$ কে $3a-5b-4$ দ্বারা।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

6. $x^3-y^3-1-3xy$.
7. $x^3-y^3+6xy+8$.
8. $x^3-8y^3-27z^3-18xyz$.

মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

9. $x^3+y^3+18xy-216$ এর, যখন $x+y=6$.
10. $a^3-8b^3-24ab-64$ এর, যখন $a-2b=4$.
11. $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$ এর, যখন $3s=a+b+c$.
12. দেখাও যে, $(a-2b)^3+(2b-3c)^3+(3c-a)^3=3(a-2b)(2b-3c)(3c-a)$.
13. দেখাও যে, $(x+y-2z)^3+(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3=3(x+y-2z)(y+z-2x)(z+x-2y)$.

14. দেখাও যে $(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3$
$=3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b)$.

15. দেখাও যে, $(2p-5q+3r)^3+(2q-5r+3p)^3+(2r-5p+3q)^3$
$=3(2p-5q+3r)(2q-5r+3p)(2r-5p+3q)$.

16. $x=a^2-b^2$, $y=2ab$, $z=a^2+b^2$ হইলে, $x^6+y^6-z^6+3x^2y^2z^2$ এর মান নির্ণয় কর।

17. $x=658$, $y=668$, $z=674$; $x^3+y^3+z^3-3xyz$ এর মান নির্ণয় কর।

173. সূত্র : $\boldsymbol{(a-b)(a-c)(b-c)}$
$\boldsymbol{=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$
$\boldsymbol{=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}$.

[$(a-b)(a-c)(b-c)=\{a^2-a(b+c)+bc\}(b-c)$
$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$
$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.]

অনুসি. 1. বিপরীতক্রমে, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=(a-b)(a-c)(b-c)$.

অতএব, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ এর আকারের যে কোন রাশির উৎপাদকই অবিলম্বে জানিতে পারা যায়।

অনুসি. 2. যেহেতু $a-c=-(c-a)$,
অতএব, $(a-b)(a-c)(b-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

সুতরাং, পূর্ব্বোক্ত সূত্রটি নিম্নলিখিতরূপে লিখা যাইতে পারে :
$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

অনুসি. 3. যেহেতু $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ কে $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$ এর আকারে লিখা যাইতে পারে।

অতএব, $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

উদা. । সরল কর : $(a+2b+3c)^2(a-2b+c)+(b+2c+3a)^2(b-2c+a)+(c+2a+3b)^2(c-2a+b)+(a-2b+c)(b-2c+a)(c-2a+b)$.

$a+2b+3c$ এর পরিবর্তে x,
$b+2c+3a$ এর পরিবর্তে y,
এবং $c+2a+3b$ এর পরিবর্তে z,
লিখিলে, $y-z=a-2b+c$, $z-x=b-2c+a$, $x-y=c-2a+b$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা
$=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)+(y-z)(z-x)(x-y)$
$=-(y-z)(z-x)(x-y)+(y-z)(z-x)(x-y)=0$.

প্রশ্নমালা 89

1. দেখাও যে, $(x-2y+z)(2x-y-z)(y-2z+x)=(x-y)^2(y-2z+x)$
$+(y-z)^2(z-2x+y)+(z-x)^2(x-2y+z).$

2. দেখাও যে, $(a+b)^2(b-a)+(b+c)^2(c-b)+(c+a)^2(a-c)$
$+(b-a)(c-b)(a-c)=0.$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

3. $2(a-b+c)^2(a-c)+2(b-c+a)^2(b-a)+2(c-a+b)^2(c-b).$

4. $(x+y)^2(y-x)+(y+z)^2(z-y)+(z+x)^2(x-z).$

5. সরল কর : $2(a-b-c)^2(b-c)+2(b-c-a)^2(c-a)$
$+2(c-a-b)^2(a-b)+8(a-b)(b-c)(c-a).$

6. সরল কর : $(x-y)(y-z)(x-2y+z)+(y-z)(z-x)(y-2z+x)$
$+(z-x)(x-y)(z-2x+y)+(x-2y+z)(y-2z+x)(z-2x+y).$

174. সূত্র : $\boldsymbol{(b+c)(c+a)(a+b)}$

$$\boldsymbol{=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc}$$
$$\boldsymbol{=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc}$$
$$\boldsymbol{=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc}$$
$$\boldsymbol{=(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc.}$$

[$(b+c)(c+a)(a+b)=(b+c)\{(a+b)(a+c)\}$
$$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$$
$$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$$
$$=a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+b^2c+bc^2$$
$$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc.$$
[পদগুলিকে অন্যরূপে সাজাইয়া]

কিন্তু, $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$$
[পদগুলিকে পুনরায় সাজাইয়া]
$$=(b^2c+bc^2)+(c^2a+ca^2)+(a^2b+ab^2)$$
$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$$
$$=bc(a+b+c-a)+ca(a+b+c-b)+ab(a+b+c-c)$$
$$=bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)-bca-cab-abc$$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab)-3abc.$$

ইহা হইতেই সূত্র-নির্দ্দিষ্ট অভেদগুলি পাওয়া যায়।]

175. সূত্র : P, নিম্নলিখিত রাশিত্রয়ের যে কোনটি বুঝাইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, $(a+b+c)(bc+ca+ab)=P+3abc$,

(i) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$;

(ii) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$;

(iii) $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$.

[নিয়ম 174 হইতে, পক্ষান্তর-করণ বা প্রকৃত গুণন দ্বারা,

$$[(a+b+c)(bc+ca+ab)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$$
$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$$
$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc.]$$

উদা. 1. গুণফল নির্ণয় কর : $(2x+3y+5z)(15yz+10zx+6xy)$.

$2x$, $3y$ এবং $5z$ এর পরিবর্তে যথাক্রমে a, b এবং c লিখিয়া,

$$a+b+c=2x+3y+5z,$$
$$bc+ca+ab=15yz+10zx+6xy ;$$

$$\therefore \quad (2x+3y+5z)(15yz+10zx+6xy)$$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab)$$
$$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$$
$$=4x^2(3y+5z)+9y^2(5z+2x)+25z^2(2x+3y)+3.2x.3y.5z$$
$$=12x^2y+20x^2z+45y^2z+18y^2x+50z^2x+75z^2y+90xyz.$$

উদা. 2. দেখাও যে, $(x+3y+12z)(12yz+4zx+xy)-12xyz$
$$=(y+4z)(12z+x)(x+3y).$$

x, $3y$ এবং $12z$ এর পরিবর্তে যথাক্রমে a, b এবং c লিখিয়া,

$$a+b+c=x+3y+12z,$$
$$bc+ca+ab=36yz+12zx+3xy=3(12yz+4zx+xy),$$

এবং, $abc=36xyz$;

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\frac{1}{3}\{(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc\}$

$=\frac{1}{3}(b+c)(c+a)(a+b)$ [নিয়ম 174]

$=\frac{1}{3}(3y+12z)(12z+x)(x+3y)$ [a, b এবং c এর মান বসাইয়া]

$=(y+4z)(12z+x)(x+3y)$.

প্রশ্নমালা 90

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণফল লিখ (Write down the product of) :

1. $(x+2y)(2y+3z)(3z+x)$. 2. $(8x+y)(y+5z)(5z+8x)$.

3. $(a+2b)(2b+3c)(3c+a)$. 4. $(3x+y+10z)(10yz+30zx+3xy)$.

5. $(x+2y+z)(2x+y+z)(x+y+2z)$. 6. $(a-2b)(2b-3c)(3c+a)$.

সরল কর (Simplify) :

7. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$
$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

8. $c(b+c-a)(c+a-b)+a(c+a-b)(a+b-c)$
$+b(a+b-c)(b+c-a)+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

9. $(y+z)^2(2x+y+z)+(z+x)^2(x+2y+z)+(x+y)^2(x+y+2z)$
$-(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)+2(y+z)(z+x)(x+y)$.

10. $2a(b+c-a)^2+2b(c+a-b)^2+2c(a+b-c)^2-3abc$
$+2(a+b+c)\{(c+a-b)(a+b-c)+(a+b-c)(b+c-a)$
$+(b+c-a)(c+a-b)\}$.

11. প্রমাণ কর যে, $(x+y-z)\{(y+z-x)^2+(z+x-y)^2\}+(y+z-x)$
$\times\{(z+x-y)^2+(x+y-z)^2\}+(z+x-y)\{(x+y-z)^2+(y+z-x)^2\}$
$+2(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=8xyz$.

176. সূত্র : $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$.

[$(a+b+c)^3=\{(a+b)+c\}^3$
$=(a+b)^3+c^3+3(a+b)c\{(a+b)+c\}$, [নিয়ম 86]
$=\{a^3+b^3+3ab(a+b)\}+c^3+3(a+b)c(a+b+c)$
$=a^3+b^3+c^3+\{3ab(a+b)+3(a+b)c(a+b+c)\}$
$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)\{ab+c(a+b+c)\}$
$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)\{c^2+c(a+b)+ab\}$
$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(c+b)(c+a)$ [নিয়ম 75]
$=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$.]

অনুসি. । $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$.

উদা. 1. $8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$y+z$, $z+x$ এবং $x+y$ এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে a, b এবং c লিখিলে,

$$a+b+c=2(x+y+z).$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\{2(x+y+z)\}^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3$

$$=(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$$

$$=3(b+c)(c+a)(a+b) \qquad \text{[অনুসি.]}$$

$$=3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$$

[a, b এবং c এর মান বসাইয়া]

উদা. 2. দেখাও যে,

$$(x+y+z)^3=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz.$$

এখন, $y+z-x$, $z+x-y$ এবং $x+y-z$ এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে a, b এবং c লিখিয়া, $a+b+c=(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)=x+y+z$,

$$b+c=(z+x-y)+(x+y-z)=2x,$$

$$c+a=(x+y-z)+(y+z-x)=2y,$$

এবং $a+b=(y+z-x)+(z+x-y)=2z.$

$\therefore$ $(x+y+z)^3=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$

$$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+3.2x.2y.2z$$

$$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz.$$

প্রশ্নমালা 91

1. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে, $a^3+b^3+c^3=3a(c+a)(a+b)$
$=3b(b+c)(b+a)=3c(c+a)(c+b)=3abc.$

2. $2s=x+y+z$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(s-x)^3+(s-y)^3+(s-z)^3+3xyz=s^3.$

3. প্রমাণ কর যে, $(2x-y-z)^3+(2y-z-x)^3+(2z-x-y)^3$
$=3(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y).$

4. সরল কর : $(3x-y-z)^3+(3y-z-x)^3+(3z-x-y)^3$
$+24(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)-x^3-y^3-z^3$
$-3(y+z)(z+x)(x+y).$

5. দেখাও যে, $(2x-y-z)^3+y^3+z^3+3(y+z)(2x-y)(2x-z)$
$=(2x-y-3z)^3+y^3+27z^3+3(y+3z)(2x-y)(2x-3z).$

6. $2s = x + y + z$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$s^3 + (s-2x)^3 + (s-2y)^3 + (s-2z)^3 - 24(s-x)(s-y)(s-z) = 0.$$

7. $3s = 2(x+y+z)$ হইলে, দেখাও যে, $(s-y-z)^3 + (s-z-x)^3$

$$+ (s-x-y)^3 + 3(y+z-s)(z+x-s)(x+y-s) = 0.$$

সরল কর (Simplify) :

8. $(b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 + (a+b-c)^3 - (a+b+c)^3 + 108abc.$

9. $(x+y+z)^3 - (y+z)^3 - (z+x)^3 - (x+y)^3 + x^3 + y^3 + z^3.$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

10. $x^3 - (2x-y-z)^3 - (2y-z-x)^3 + (y-2z)^3.$

11. $64(x+y+z)^3 - (2x+y+z)^3 - (x+2y+z)^3 - (x+y+2z)^3.$

মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

12. $a^3 + b^3 + c^3$, যখন $b+c=10$, $c+a=16$ এবং $a+b=20$.

13. $x^3 + y^3 + z^3$, যখন $x=32$, $y=-25$ এবং $z=-7$.

14. $(x+y+z)^3 - (x+z-y)^3 - (y+z-x)^3 - (x+y-z)^3 - 23xyz$,
যখন $x=10$, $y=64$ এবং $z=2$.

15. $(6x-y-z)^3 + y^3 + z^3 + 3(y+z)(6x-y)(6x-z)$,
যখন $x=\frac{11}{6}$, $y=\frac{115}{118}$ এবং $z=17$.

177. সূত্রাবলীর পুনরুল্লেখ : পূর্ব্ববর্ণিত সূত্রসমূহের আবশ্যকমত প্রয়োগের সুবিধার জন্য উহাদিগকে নিম্নে সন্নিবেশিত করা হইল। কিন্তু, এই সূত্রগুলিকে ছাত্রগণের এরূপভাবে মুখস্থ করিয়া রাখা কর্ত্তব্য যে, প্রয়োগের সময় যেন উহাদিগকে পুনরায় দেখিয়া লইতে না হয়।

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

III. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$

IV. $\left.\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b).\end{aligned}\right\}$

V. $\left.\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b).\end{aligned}\right\}$

VI. $\left.\begin{aligned}a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b)\\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2).\end{aligned}\right\}$

VII. $\left.\begin{aligned}a^3 - b^3 &= (a-b)^3 + 3ab(a-b)\\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2).\end{aligned}\right\}$

VIII. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

IX. $(x-a)(x+b)=x^2+(b-a)x-ab.$

X. $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab.$

XI. $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc.$

XII. $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc.$

XIII. $$\left.\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) \\ &= \tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}. \end{aligned}\right\}$$

XIV. $$\left.\begin{aligned} (a-b)(a-c)(b-c) &= -(b-c)(c-a)(a-b) \\ &= a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) \\ &= bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) \\ &= -\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}. \end{aligned}\right\}$$

XV. $$\left.\begin{aligned} (b+c)(c+a)(a+b) &= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc \\ &= a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc \\ &= bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc \\ &= (a+b+c)(bc+ca+ab)-abc. \end{aligned}\right\}$$

XVI. $$\left.\begin{aligned} &(a+b+c)(bc+ca+ab) \\ &= (b+c)(c+a)(a+b)+abc \\ &= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc \\ &= bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc \\ &= a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc. \end{aligned}\right\}$$

XVII. $$\left.\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b) \\ &= a^3+b^3+c^3+3\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}+6abc, \end{aligned}\right\}$$
অথবা, $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b).$

নিম্নলিখিত ফলগুলির প্রতি লক্ষ্য রাখা কর্ত্তব্য। ইহাদের সত্যতা, হয় উপরিপ্রদত্ত সূত্রসমূহ হইতে, নতুবা সরলীকরণ দ্বারা, অতি সহজেই প্রতিপন্ন করা যায়।

XVIII. $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2).$

XIX. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab,$ অথবা, $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$

XX. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab.$

XXI. $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c).$

XXII. $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0.$

XXIII. $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0.$

XXIV. $a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)=0.$

XXV. $\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$

নিম্নে উপরিউক্ত কয়েকটি সূত্রাবলীর প্রয়োগের প্রক্রিয়া-পদ্ধতি দেখান যাইতেছে :

উদা. 1. প্রমাণ কর : $(x-a)(x-b)(a-b)+(x-b)(x-c)(b-c)$
$+(x-c)(x-a)(c-a)=-(b-c)(c-a)(a-b)$.

$x-a$ এর পরিবর্তে p, $x-b$ এর পরিবর্তে q এবং $x-c$ এর পরিবর্তে r বসাইলে, $q-p=a-b,\ r-q=b-c,\ p-r=c-a$.

$$\therefore\ \text{বাম পক্ষ}=pq(q-p)+qr(r-q)+rp(p-r)$$
$$=-(q-p)(r-q)(p-r)$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

[$q-p,\ r-q,\ p-r$ এর মান বসাইয়া]

উদা. 2. প্রমাণ কর : $(y+z)^2(2x+y+z)+(z+x)^2(x+2y+z)$
$+(x+y)^2(x+y+2z)+2(y+z)(z+x)(x+y)$
$=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)$.

$y+z$ এর পরিবর্তে a, $z+x$ এর পরিবর্তে b এবং $x+y$ এর পরিবর্তে c বসাইলে,

$$b+c=2x+y+z,\ c+a=x+2y+z,\ a+b=x+y+2z.$$

$$\therefore\ \text{বাম পক্ষ}=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$$
$$=(b+c)(c+a)(a+b)$$
$$=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$$

উদা. 3. প্রমাণ কর : $x^3+6(y+z)x^2+12(y+z)^2x+8(y+z)^2$
$=4(3x+2y+6z)y^2+(x+6y+2z)(x+2z)^2$. [মাদ্রাজ, 1881]

$$\text{বাম পক্ষ}=x^3+3x^2.\{2(y+z)\}+3.x.\{2(y+z)\}^2+\{2(y+z)\}^3$$
$$=[x+2(y+z)]^3=(x+2y+2z)^3=\{2y+(x+2z)\}^3$$
$$=(2y)^3+3(2y)^2(x+2z)+3(2y)(x+2z)^2+(x+2z)^3$$
$$=8y^3+12y^2(x+2z)+6y(x+2z)^2+(x+2z)^3$$
$$=4y^2\{2y+3(x+2z)\}+\{6y+(x+2z)\}(x+2z)^2$$
$$=4(3x+2y+6z)y^2+(x+6y+2z)(x+2z)^2.$$

উদা. 4. প্রমাণ কর : $x^3+y^3+z^3+24xyz$
$=(x+y+z)^3-3\{x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\}$.

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা দেখা যায় যে, ইহা নিম্নলিখিত অভেদের সমতুল্য :

$$3\{x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\}+24xyz$$
$$=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$$

এখন, $3\{x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\}+24xyz$

$$=3\{x(y^2-2yz+z^2)+y(z^2-2zx+x^2)+z(x^2-2xy+y^2)\}+24xyz$$

$$=3\{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)-2xyz-2yzx-2zxy+8xyz\}$$

$$=3\{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+2xyz\}$$

$$=3(y+z)(z+x)(x+y)=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3\ ;$$

∴ পক্ষান্তর করিয়া, $x^3+y^3+z^3+24xyz$

$$=(x+y+z)^3-3\{x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\}.$$

উদা. 5. প্রমাণ কর : $-x(b-c)(c-a)(a-b)$

$$=a(b-c)(x-b)(x-c)+b(c-a)(x-c)(x-a)+c(a+b)(x-a)(x-b).$$

ডা'নদিকের প্রথম রাশি $=a(b-c)\{x^2-x(b+c)+bc\}$

$$=x^2a(b-c)-xa(b^2-c^2)+abc(b-c).$$

ডা'নদিকের দ্বিতীয় রাশি $=b(c-a)\{x^2-x(c+a)+ca\}$

$$=x^2b(c-a)-xb(c^2-a^2)+abc(c-a).$$

ডা'নদিকের তৃতীয় রাশি $=c(a-b)\{x^2-x(a+b)+ab\}$

$$=x^2c(a-b)-xc(a^2-b^2)+abc(a-b).$$

∴ ডা'ন পক্ষ [উল্লম্বভাবে (vertically) যোগ করিয়া]

$$=x^2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}-x\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}+abc\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}$$

$$=x^2.0-x\{(b-c)(c-a)(a-b)\}+abc.0$$

[সূত্র XXIII, XIV এবং XXII, নিয়ম 177]

$$=-x(b-c)(c-a)(a-b).$$

উদা. 6. প্রমাণ কর :

$$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)-(x+yz)(y+zx)(z+xy)=(1+xyz)(1-x^2-y^2-z^2-2xyz).$$

বাম পক্ষ $=(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)-\dfrac{(xyz+x^2)}{x}.\dfrac{(xyz+y^2)}{y}.\dfrac{(xyz+z^2)}{z}$

$$=\{1-(x^2+y^2+z^2)+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2-x^2y^2z^2\}-\frac{1}{xyz}\{(xyz)^3+(xyz)^2(x^2+y^2+z^2)+(xyz)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)+x^2y^2z^2\}$$

$$=(1-x^2-y^2-z^2)+(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)-x^2y^2z^2-x^2y^2z^2$$
$$-xyz(x^2+y^2+z^2)-(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)-xyz$$
$$=(1-x^2-y^2-z^2)-xyz-xyz(x^2+y^2+z^2)-2x^2y^2z^2$$
$$=1-x^2-y^2-z^2-2xyz+xyz-xyz(x^2+y^2+z^2)-2x^2y^2z^2$$
$$=(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)+xyz(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)$$
$$=(1+xyz)(1-x^2-y^2-z^2-2xyz).$$

I. (b) সূত্রাবলী-প্রয়োগের সাহায্যে সাপেক্ষ-সূত্রের প্রতিষ্ঠা

178. নিম্নে কয়েকটি সাপেক্ষ-সূত্রের প্রতিষ্ঠাকরণ সম্বন্ধীয় কতিপয় দৃষ্টান্ত সন্নিবেশিত হইল।

179. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(1) $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$.

এখন, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab,$

$\therefore\quad 0^2=a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab).$

$\therefore$ পক্ষান্তর করিয়া, $a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab).$

(2) $a^3+b^3+c^3=3abc$.

এখন, $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$=0\times(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=0.$

$\therefore$ পক্ষান্তর করিয়া, $a^3+b^3+c^3=3abc.$ [120 নিয়মের উদা. 10 দেখ]

(3) $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2$.

এখন, $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$

$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc\times 0$

$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2.$

আবার উপরিপ্রদর্শিত (1) হইতে, $bc+ca+ab=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$

$\therefore\quad (bc+ca+ab)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2.$

কাজেই, $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2.$

(4) $a^4+b^4+c^4=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2.$

এখন, $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ [নিয়ম 128]

$=0\times(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$=0.$

কাজেই, পক্ষান্তর করিয়া,

$a^4+b^4+c^4=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2.$ [(3) হইতে]

(5) $\boldsymbol{a^5+b^5+c^5=-5abc(bc+ca+ab)}$

$\boldsymbol{=\frac{5}{2}abc(a^2+b^2+c^2)}$

$\boldsymbol{=\frac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3).}$

যেহেতু $a+b+c=0$, অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $a+b=-c.$

$\therefore\ (a+b)^5=(-c)^5$;

অথবা, $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5=-c^5.$

[নিয়ম 171]

পক্ষান্তর করিয়া, $a^5+b^5+c^5$

$=-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4$

$=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$

$=-5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$ [গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিয়া]

$=-5ab(-c)\{(a+b)^2-ab\}$ [$\because\ a+b=-c$]

$=5abc\{(a+b)(-c)-ab\}=5abc(-ac-bc-ab)$

$=-5abc(bc+ca+ab)=\dfrac{5abc}{2}(a^2+b^2+c^2)$ [(1) হইতে]

$=\frac{5}{6}(a^2+b^2+c^2).3abc$

$=\frac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3).$ [যেহেতু $a^3+b^3+c^3=3abc$]

(6) $\boldsymbol{a^7+b^7+c^7=7abc(bc+ca+ab)^2}$

$\boldsymbol{=\frac{7}{12}(a^2+b^2+c^2)^2(a^3+b^3+c^3).}$

যেহেতু $a+b+c=0$, অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $a+b=-c.$

$\therefore\ (a+b)^7=(-c)^7,$

অথবা, $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5$

$+7ab^6+b^7=-c^7.$ [নিয়ম 171, উদা. 1

পক্ষান্তর করিয়া, $a^7+b^7+c^7$

$$= -7a^6b-21a^5b^2-35a^4b^3-35a^3b^4-21a^2b^5-7ab^6$$
$$= -7ab(a^5+3a^4b+5a^3b^2+5a^2b^3+3ab^4+b^5)$$
$$= -7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4)$$

[গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিয়া]

$$= -7ab(-c)(a^2+ab+b^2)^2 = 7abc(a^2+ab+b^2)^2$$
$$= 7abc(bc+ca+ab)^2$$ [(5) এর নিয়মানুসারে]
$$= \tfrac{7}{3}(bc+ca+ab)^2.3abc$$
$$= \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2\cdot(a^3+b^3+c^3)$$ [(2) ও (3) হইতে]
$$= \tfrac{7}{12}(a^2+b^2+c^2)^2(a^3+b^3+c^3).$$

উদা. 1. প্রমাণ কর : $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$
$$= 3(y-z)(z-x)(x-y).$$

$y-z$ এর পরিবর্ত্তে a, $z-x$ এর পরিবর্ত্তে b, এবং $x-y$ এর পরিবর্ত্তে c বসাইলে,
$$a+b+c=y-z+z-x+x-y=0.$$
$$\therefore\quad a^3+b^3+c^3=3abc.$$ [(3) হইতে]

অথবা, $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(y-z)(z-x)(x-y).$

[a, b, c এর মান বসাইলে]

উদা. 2. প্রমাণ কর : $\dfrac{(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5}{5}$
$$=\frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{2}\cdot\frac{(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3}{3}.$$

$y-z$ এর পরিবর্ত্তে a, $z-x$ এর পরিবর্ত্তে b এবং $x-y$ এর পরিবর্ত্তে c বসাইয়া,

$$a+b+c=y-z+z-x+x-y=0.$$
$$\therefore\quad a^5+b^5+c^5=\tfrac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3),$$ [(5) হইতে]

অথবা, $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}.$

$\therefore$ a, b, c এর মান বসাইয়া,
$$\frac{(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5}{5}=\frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{2}$$
$$\times\frac{(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3}{3}.$$

উদা. 3. $x+y+z=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3$
$+(x+y-z)^3=3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-24xyz.$

$y+z-x$ এর পরিবর্তে a, $z+x-y$ এর পরিবর্তে b, $x+y-z$ এর পরিবর্তে c বসাইয়া, $a+b+c=(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)=x+y+z=0.$

কাজেই, $a^3+b^3+c^3=3abc.$

$\therefore$ a, b, c এর মান বসাইয়া, $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$
$=3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).$

আবার, যেহেতু $a+b+c=0$, অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$$a=-(b+c)=-\{(z+x-y)+(x+y-z)\}=-2x,$$
$$b=-(c+a)=-\{(x+y-z)+(y+z-x)\}=-2y,$$
$$c=-(a+b)=-\{(y+z-x)+(z+x-y)\}=-2z.$$
$$\therefore \quad 3abc=3(-2x)(-2y)(-2z)=-24xyz.$$

অতএব, $3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-24xyz.$

কাজেই, $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$
$=3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-24xyz.$

উদা. 4. $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$ হইলে, দেখাও যে,
$x^3+y^3+z^3-3xyz=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$

এখন, $x+y+z=a^2-bc+b^2-ca+c^2-ab$
$=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$;

$$\begin{aligned}y-z&=(b^2-ca)-(c^2-ab)\\&=b^2-c^2+ab-ca\\&=(b-c)(b+c)+a(b-c)\\&=(b-c)\{(b+c)+a\}\\&=(b-c)(a+b+c).\end{aligned}$$

তদ্রূপ, $z-x=(c-a)(a+b+c)$, এবং $x-y=(a-b)(a+b+c).$

এখন, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$\begin{aligned}&=\tfrac{1}{2}(x+y+z)\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}\\&=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\{(b-c)^2(a+b+c)^2\\&\qquad+(c-a)^2(a+b+c)^2+(a-b)^2(a+b+c)^2\}\end{aligned}$$

$$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$\times\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}(a+b+c)^2$$
$$=(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2$$
$$=\{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\}^2$$
$$=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

উদা. 5. $s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$s(s-2b)(s-2c)+s(s-2c)(s-2a)+s(s-2a)(s-2b)$$
$$=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+8abc.$$

বাম পক্ষের দুই পদের সমষ্টি $=s(s-2c)\{(s-2b)+(s-2a)\}$

$$=s(s-2c)\{2s-2(a+b)\}$$
$$=s(s-2c)\times 2c\ ;$$

এবং তৃতীয় পদ $=(\overline{s-2c}+2c)(s-2a)(s-2b)$

$$=(s-2c)(s-2a)(s-2b)+2c(s-2a)(s-2b).$$

কাজেই, বাম পক্ষ $=s(s-2c)2c+\{(s-2c)(s-2a)(s-2b)+2c(s-2a)(s-2b)\}$

$$=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+2c\{s(s-2c)+(s-2a)(s-2b)\}.$$

কিন্তু, $s(s-2c)+(s-2a)(s-2b)=(s^2-2cs)+\{s^2-2s(a+b)+4ab\}$

$$=2s^2-2s(a+b+c)+4ab$$
$$=2s^2-2s.s+4ab$$
$$=4ab.$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+8abc.$

উদা. 6. $s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(s-a)(s-b)(s-c)=(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc.$$

বাম পক্ষ $=s^3-(a+b+c)s^2+(bc+ca+ab)s-abc$

$$=s^3-s.s^2+(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc$$
$$=(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc.$$

উদা. 7. $a+b+c+d=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(a+b)(a+c)(a+d)=(b+a)(b+d)(b+c)$$
$$=(c+d)(c+a)(c+b)$$
$$=(d+c)(d+b)(d+a).$$

যেহেতু $a+b+c+d=0$,

অতএব,
$$\left.\begin{aligned} a+b&=-(c+d),\\ a+c&=-(b+d),\\ a+d&=-(b+c);\end{aligned}\right\}$$ [পক্ষান্তর করিয়া]

$$\therefore\ (a+b)(a+c)(a+d)=(a+b)\{-(b+d)\}\{-(b+c)\}$$
$$=(a+b)(b+d)(b+c)$$
$$=(b+a)(b+d)(b+c).$$

এইরূপে, $(a+b)(a+c)(a+d)=\{-(c+d)\}(a+c)\{-(b+c)\}$
$$=(c+d)(a+c)(b+c)$$
$$=(c+d)(c+a)(c+b);$$

এবং, $(a+b)(a+c)(a+d)=-(c+d)\{-(b+d)\}(a+d)$
$$=(c+d)(b+d)(a+d)$$
$$=(d+c)(d+b)(d+a).$$

উদা. 8. প্রমাণ কর : $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz$
$$=(2x+y-z)^3+(y+z)^3-(x+y-z)^3-6x(x-2z)(x+y).$$

$2x+y-z$ এর পরিবর্তে a, $y+z$ এর পরিবর্তে b এবং $-(x+y-z)$ এর পরিবর্তে c বসাইলে,

$$a+b+c=x+y+z,$$
$$b+c=2z-x,$$
$$c+a=x,$$
$$a+b=2(x+y).$$

$\therefore$ ডা'ন পক্ষ (right side)

$$=(2x+y-z)^3+(y+z)^3+\{-(x+y-z)\}^3+3.x(2z-x).2(x+y)$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(c+a)(b+c)(a+b)$$
$$=(a+b+c)^3$$
$$=(x+y+z)^3$$ [a, b, c এর মান বসাইয়া]
$$=\{(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)\}^3$$
[কারণ, $(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)=x+y+z$]
$$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+3\{(z+x-y)$$
$$+(x+y-z)\}\{(x+y-z)+(y+z-x)\}\{(y+z-x)+(z+x-y)\}$$
[সূত্র XVII, নিয়ম 171]
$$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+3.2x.2y.2z$$
$$=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz.$$

প্রশ্নমালা 92

প্রমাণ কর (Prove that) :

1. $a^2x+b^2y+c^2z=(x+y+z)(a^2+b^2+c^2)$,
যদি $x^2-yz=a^2$, $y^2-zx=b^2$ এবং $z^2-xy=c^2$ হয়।

2. $ax+by+cz=(a+b+c)(x+y+z)$,
যদি $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$ এবং $z=c^2-ab$ হয়।

3. $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$
$+(b-c)(c-a)(a-b)=0.$

4. $27(a+b+c)^3-(a+2b)^3-(b+2c)^3-(c+2a)^3$
$=3(a+3b+2c)(b+3c+2a)(c+3a+2b).$

5. $2(s-a)(s-b)(s-c)+a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a)$
$+c(s-a)(s-b)=abc$, যদি $2s=a+b+c$ হয়।

6. $s(s-a)(s-b)+s(s-a)(s-c)+s(s+a)(s-c)+c(s+a)(s+b)$
$=(s+a)(s+b)(s+c)$, যদি $s=a+b+c$ হয়।

7. $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$
$=\frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3-3abc)$, যদি $2s=a+b+c$ হয়।

8. $(3x+2y+5z)^3-(3x+2y-5z)^3-30z\{(3x+2y)^2-25z^2\}$
$=(20x-y+8z)^3+(y+2z-20x)^3+30z(20x-y+8z)(y+2z-20x).$

9. $(x+y+2z)(x+2y+z)(2x+y+z)-(y+z)(z+x)(x+y)$
$=2(x+y+z)^3+2xyz.$

10. $(a+b+c)(x+y+z)+(a+b-c)(x+y-z)+(b+c-a)(y+z-x)$
$+(c+a-b)(z+x-y)=4(ax+by+cz).$

11. $(y-z)(1+xy)(1+xz)+(z-x)(1+yz)(1+yx)$
$+(x-y)(1+zx)(1+yz)=(y-z)(z-x)(x-y).$

12. $(x-1)(x^2+x+4)(y-z)+(y-1)(y^2+y+4)(z-x)$
$+(z-1)(z^2+z+4)(x-y)=-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z).$

13. $x^3+y^3+z^3+w^3+3(y+z)(z+x)(x+y)=0$,
যদি $x+y+z+w=0$ হয়।

14. $\frac{(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5}{5}\cdot\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{2}$
$=\frac{(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7}{7}.$

15. $(x+y)(x+z)(x^2-yz)=(x+y+z)(x-z)(x^2+y^2)$,
যদি $x=a^3+a^2$, $y=a^2+a$ এবং $z=a+1$ হয়। [মাদ্রাজ, 1909]

16. $(y+z-2x)(z+x-2y)+(z+x-2y)(x+y-2z)+(x+y-2z)$
$\times(y+z-2x)=3\{(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)(y-z)\}$.

17. $(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4=2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$.

18. $(b-c)(b+c-2a)^3+(c-a)(c+a-2b)^3+(a-b)(a+b-2c)^3=0$.

19. $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3=3xyz(y-z)(z-x)(x-y)$.

20. $a^6(b^2-c^2)^3+b^6(c^2-a^2)^3+c^6(a^2-b^2)^3$
$=3a^2b^2c^2(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b)$.

21. $(b+c)(b-c)^3+(c+a)(c-a)^3+(a+b)(a-b)^3$
$=2(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

22. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3=(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$.

23. $4(a^2+ab+b^2)^3-(a-b)^2(a+2b)^2(2a+b)^2=27a^2b^2(a+b)^2$.

24. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=16s(s-a)(s-b)(s-c)$,
যদি $2s=a+b+c$ হয়।

25. $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3$, যদি $2s=a+b+c$ হয়।

26. $\dfrac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{3}\cdot\dfrac{(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7}{7}$
$=\left\{\dfrac{(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5}{5}\right\}^2$.

27. $(ax+by+cz)^2+(bx+cy+az)^2+(cx+ay+bz)^2-\{(bx+cy+az)$
$\times(cx+ay+bz)+(cx+ay+bz)(ax+by+cz)+(ax+by+cz)(bx+cy+az)\}$
$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$.

28. $(ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3+(cx+ay+bz)^3$
$-3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)$
$=(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

$a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

29. $ca-b^2=ab-c^2=bc-a^2=bc+ca+ab=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

30. $b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2=a^2+ab+b^2=-(bc+ca+ab)$.

31. $a(c+a)(a+b)=b(a+b)(b+c)=c(a+c)(b+c)=abc$.

32. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2=3abc$.

33. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0$.

34. $X = ax + by + cz$, $Y = bx + cy + az$ এবং $Z = cx + ay + bz$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $X^3 + Y^3 + Z^3 = 3XYZ$.

35. $(2a+b+c)^3 + (a+2b+c)^3 + (a+b+2c)^3$
$$= 3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c).$$

36. প্রমাণ কর যে, $(3x+y+z)^3 + (x+3y+z)^3 + (x+y+3z)^3$
$$- 3(3x+y+z)(x+3y+z)(x+y+3z) = 20(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

37. $a+b+c=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$(a+bc)(b+c) = (b+ca)(c+a) = (c+ab)(a+b) = (1-a)(1-b)(1-c).$$

প্রমাণ কর যে (Prove that) :

38. $(x+y)^2(y+z-x)(z+x-y) + (x-y)^2(x+y+z)(x+y-z)$
$$= 4xyz^2 + (y^2-z^2)(y^4+y^2z^2+z^4) + (z^2-x^2)(z^4+z^2x^2+x^4)$$
$$+ (x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4).$$

39. $2x(y+z-x) + (z+x-y)(x+y-z)$
$$= 2y(z+x-y) + (x+y-z)(y+z-x)$$
$$= 2z(x+y-z) + (y+z-x)(z+x-y)$$
$$= (y+z-x)(z+x-y) + (z+x-y)(x+y-z)$$
$$+ (x+y-z)(y+z-x).$$

40. $x^3+y^3+z^3 = a^3 - 3ab + 3c$,
যদি $x+y+z=a$, $yz+zx+xy=b$ এবং $xyz=c$ হয়।

41. $yz(y+z) + zx(z+x) + xy(x+y) + 3xyz = \frac{1}{2}(p^3 - pq^2)$,
যদি $x+y+z=p$ এবং $x^2+y^2+z^2=q^2$ হয়।

42. $x^7+y^7+z^7 = 7qr^3$,
যদি $x+y=-z$, $xyz=q$ এবং $yz+zx+xy=r$ হয়।

43. $x^4+y^4+z^4 = \frac{1}{2}q^4$,
যদি $x^2+y^2+z^2=q^2$, $x+y=13$ এবং $z=-13$ হয়।

44. $(x+y+z)(yz+zx+xy) - (y+z)(z+x)(x+y) = 120$,
যদি $yz=45$, $zx=64$ এবং $xy=5$ হয়।

বিবিধ প্রশ্নমালা III

I

1. দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশির গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ. সা. গু.) এবং লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.)-এর সংজ্ঞা লিখ। $36x^2a^4c^5$, $24xy^2a^3b^4$ এবং $240y^3a^6b^2c$ এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

2. নিম্নলিখিত রাশিসমূহকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$$x^2-6x+9 \text{ এবং } 4x^2-11x-3.$$

3. $ab-ac-b^2+bc$ এবং $b^2-12ac-4a^2-9c^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

4. $x^3+y^3+3xy-1$ কে সরল উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং দেখাও যে ইহার এবং $2(x^2+xy-x)+3y(x+y)-(7+3y)+7x+7y$ এর গ. সা. গু. $x+y-1$.

5. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{2bc+(b^2+c^2-a^2)}{2bc-(b^2+c^2-a^2)}=\dfrac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}$.

6. সরল কর : $\dfrac{x^6}{x^2-1}-\dfrac{x^4}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+1}$.

7. সমাধান কর : $ax+1=by+1=ay+bx$.

8. $x+y+z=xyz$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

9. $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}\right)$ হইলে, $\dfrac{qr}{(a-q)(a-r)}+\dfrac{rp}{(a-r)(a-p)}$ $+\dfrac{pq}{(a-p)(a-q)}$ এর মান নির্ণয় কর।

10. কোন চৌবাচ্চার সহিত দুইটি নল সংলগ্ন আছে ; উহাদের একটি দ্বারা a ঘণ্টায়, এবং অপরটি দ্বারা b ঘণ্টায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করা যাইতে পারে। দুইটি নল একত্রযোগে চৌবাচ্চাটিকে কত ঘণ্টায় পূর্ণ করিবে ? যদি চৌবাচ্চার সহিত আরও একটি নল সংলগ্ন থাকিত এবং এই তৃতীয় নলটি দ্বারা পূর্ণ চৌবাচ্চাকে c ঘণ্টায় শূন্য করিতে পারা যাইত, তাহা হইলে তিনটি নলই একসঙ্গে খুলিয়া রাখিলে, কত ঘণ্টায় পূর্ণ চৌবাচ্চাটিকে শূন্য করা যাইবে ?

[Two pipes are attached to a cistern, of which one can fill it in a hours while the other can do it in b hours ; in what time, will the two together fill it ? And if a third pipe can empty it in c hours, what time would be required to empty the cistern if all the three pipes were kept open simultaneously.]

II

1. $7x^2-26x+15$ এবং $5x(x-1)+3(3x-11)-24$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

2. $x^3+bx^2+ax+ab$ এবং $x^2-(a-b)x-ab$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

3. নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে সরল কর :

(i) $\dfrac{(3x^4y^2-3x^2y^4)^2}{(2x^3y-2xy^3)^2}$; (ii) $\dfrac{3(x^2-x-30)(x^2-9x+14)}{(x^2-13x+42)(x^2+3x-10)}$.

4. সরল কর : $\dfrac{1}{bc(b-a)(c-a)}+\dfrac{1}{ca(c-b)(a-b)}+\dfrac{1}{ab(a-c)(b-c)}$.

5. দেখাও যে, $(x+y-2z)^3+(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3$
$=3(x+y-2z)(y+z-2x)(z+x-2y)$.

6. $x=a^2+b^2$ এবং $y=a^2-b^2$ হইলে, $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}$ এর মান নির্ণয় কর।

7. সরল কর : $\dfrac{(2x-9)^2-(x-6)^2}{3(x^2-10x+25)}+\dfrac{2(x-3)^2}{3(x^2-8x+15)}$.

8. দেখাও যে,
$\dfrac{x^4}{3}-\dfrac{11x^3}{12}+\dfrac{41x^2}{8}-\dfrac{23x}{4}+6$ এর একটি উৎপাদক $\dfrac{2x^2}{3}-\dfrac{5x}{6}+1$ হইবে।

9. $\frac{5}{7}(2x-11)-\frac{3}{4}(x-5)=\frac{x}{3}-(10-x)$ হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

10. সমাধান কর : $ax+by=c^2$ এবং $\dfrac{a+x}{b}-\dfrac{b+y}{a}=0$.

III

1. $a^2x^3+a^5-2abx^3+b^2x^3+a^3b^2-2a^4b$ এবং $2a^2x^4-5a^4x^2+3a^6-2b^2x^4+5a^2b^2x^2-3a^4b^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

2. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ এবং $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

3. x^2-9, $(x+3)^2$ এবং x^2+x-6 এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1910]

4. দুইটি বীজগণিতীয় রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় করিবার নিয়ম বর্ণনা কর, এবং যথাযথরূপে উহা প্রতিপন্ন কর।

$x^2+(a+b)x+ab$, x^2-b^2 এবং $x^2+(a-b)x-ab$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

5. সরল কর : $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x+3}{x^2+x-6}-\frac{x-5}{x^2-3x-10}\right)-\frac{1}{x^2+4}$.

6. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(c+a)(a+b)+(c-a)(a+b)(b+c).$$

7. $\left(a+\frac{2}{a}\right)^5$ কে 'a'এর অধঃক্রমিক শক্তিতে বিস্তার কর।

8. সরল কর : $\frac{x^3(y+z)}{(z-x)(y-x)}+\frac{y^3(z+x)}{(x-y)(z-y)}+\frac{z^3(x+y)}{(y-z)(x-z)}$.

9. সমাধান কর : $ax+y=x+by=\frac{1}{2}(x+y)+1$.

10. কোন মূলধনের এক অংশ শতকরা 4 পা. হিসাবে ও বাকী অংশ শতকরা 7 পা. হিসাবে সুদে খাটাইলে মোট 196 পা. সুদ আদায় হয়; কিন্তু সুদের হার যথাক্রমে 5 পা. ও 6 পা. হইলে, মোট 212 পা. সুদ আদায় হইত। মূলধনের প্রতি অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

[An income of £196 is derived from two sums invested, one at 4 per cent., the other at 7 per cent., per annum; if the interest on the former had been 5 per cent., and on the latter 6 per cent., the income derived would have been £212. Find the sums invested.]

IV

1. দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশির গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. এর সংজ্ঞা লিখ।

A এবং B, এই দুইটি বীজগণিতীয় রাশির, H এবং L যথাক্রমে গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. হইলে, দেখাও যে, $H\times L=A\times B$.

2. x^2-y^2, $x^2-2xy+y^2$ এবং x^3-y^3 এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর; এবং দেখাও যে, উহাদের ল. সা. গু. কে x^2+xy+y^2 দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল $(x-y)(x^2-y^2)$ হইবে।

3. $\frac{x+5}{x^2+3x-10}$ হইতে $\frac{x+6}{x^2+5x-6}$ এর ন্যূনতা নির্ণয় কর।

4. সরল কর : $\frac{1}{m^2+m+1}+\frac{2m}{m^4+m^2+1}$.

5. দেখাও যে, $(x+y)^3-(y+z)^3=3(x-z)\{(x+y)(y+z)+\frac{1}{3}(x-z)^2\}$.

6. $a=x+y-z,\ b=y+z-x,\ c=z+x-y$, হইলে, দেখাও যে,
$$a^3+b^3+c^3-3abc=4(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

7. $x+y=7$ এবং $xy=10$ হইলে, x^5+y^5 এর মান নির্ণয় কর।

8. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার এককস্থানে 5 আছে, এবং দশকস্থানের অঙ্কটি অন্য দুইটির সমষ্টির অর্দ্ধ। আবার, সংখ্যাটির সহিত 108 যোগ করিলে এই যোগলব্ধ সংখ্যার এককস্থানীয় অঙ্কটি পূর্ব্বপ্রদত্ত সংখ্যার শতকস্থানীয়, দশকস্থানীয় অঙ্কটি পূর্ব্বপ্রদত্ত সংখ্যার এককস্থানীয় এবং শতকস্থানীয় অঙ্কটি দশকস্থানীয় অঙ্কের সমান হয়। প্রদত্ত সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[A number of three digits has 5 in the unit's place and the digit in the middle is half the sum of the other two ; if 108 be added to the number, the hundred's figure will take the place of the unit's and the unit's, the place of ten's. Find the number.]

9. কোন একটি ভগ্নাংশের হর ও লবের সহিত 3 যোগ করিলে, ভগ্নাংশটি $\frac{2}{3}$ এ পরিণত হয় ; কিন্তু হর ও লব হইতে 5 বিয়োগ করিলে, ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ এ পরিণত হয় ; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

[If 3 be added to the numerator and denominator of a certain fraction, it becomes $\frac{2}{3}$; if 5 be subtracted from the numerator and denominator, it becomes $\frac{1}{2}$; find the fraction.]

10. সমাধান কর : $5(x^2-3x+11)+4(x^2+2x+4)=3(3x^2-3x+1)$.

V

1. $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$ এবং $x^4-(a+b)^2x^2+2ab(a+b)x-a^2b^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

2. $35x^2-11x-6$ এবং $40x^2-29x+3$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

3. সরল আকারে পরিবর্ত্তন কর :
$$\left\{\frac{2x}{x+y}-\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{2y}{x-y}\right\}\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\div\left\{\frac{3}{x-y}-\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right\}.$$

4. সরল কর : $\dfrac{a^2+bc+ca+ab}{a^2+2bc+2ca+ab}\times\dfrac{a^3+8c^3}{a^4+a^2c^2+6ac^3+4c^4}$.

5. দেখাও যে, $\dfrac{x+2}{1+x+x^2}-\dfrac{x-2}{1-x+x^2}-\dfrac{2x^2-4}{1-x^2+x^4}=\dfrac{4x^4+8}{x^8+x^4+1}$.

6. $a=\frac{2cx}{x+c}$ হইলে, $\frac{(a-x)^2+(a-c)^2}{x^2+c^2}+\frac{4cx}{(x+c)^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

7. $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{q}{p}+\frac{s}{r}$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{p^3}{q^3}+\frac{r^3}{s^3}=\frac{q^3}{p^3}+\frac{s^3}{r^3}$.

8. A এবং B রেলগাড়ীতে 120 মাইল ভ্রমণ করিল। A দেড়গুণ ভাড়া দিয়া একখানি রিটার্ণ টিকিট ক্রয় করিল। ফিরিয়া আসিয়া তাহারা দেখিল যে, A, B অপেক্ষা প্রতি 100 মাইলে 4 আ. 2 পাই কম ভাড়াতে ভ্রমণ করিয়াছে। দেখাও যে, মাইল প্রতি ভাড়া 2 পাই।

[A and B travel together 120 miles by rail. A takes a return-ticket for which he has to pay one fare and a half. Coming back they find that A has travelled cheaper than B by 4 annas 2 pies for every 100 miles. Show that the fare per mile is 2 pies.]

9. $x=5$ হইলে, $ax+b$, এই রাশিটির মান 13 এবং $x=13$ হইলে, উক্ত রাশিটির মান 29 হয়। $x=\cdot5$ হইলে, দেখাও যে, ঐ রাশিটির মান 4 হইবে।

[The expression $ax+b$ is equal to 13, when x is 5, and is equal to 29, when x is 13. Show that the value of the expression is 4 when x is $\cdot5$.]

10. একটি সংখ্যার বর্গ হইতে 4 এর ন্যূনতা ঐ সংখ্যার সহিত 2 যোগ করিয়া উক্ত যোগফলের বর্গ হইতে 28 এর ন্যূনতার সমান হইলে, সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[The defect of 4 from the square of a number is the same as the defect of 28 from the square of another, which is greater by 2 than the previous one. Find the number.]

VI

1. $3x^3-18x^2+33x-18$, x^2-5x+6 এবং x^2-3x+2 এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

2. $ax^2-(a^2+ab)x+a^2b$, $bx^2-(b^2+bc)x+b^2c$ এবং $cx^2-(c^2+ac)x+c^2a$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

3. a এবং b, এই দুইটি রাশির ল. সা. গু. x, এবং গ. সা. গু. y ; $x+y=ma+\frac{b}{m}$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+y^3=m^3a^3+\frac{b^3}{m^3}$.

4. সরল কর : $\frac{z(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2}+\frac{x(y^3-z^3)}{y^2+yz+z^2}+\frac{y(z^3-x^3)}{z^2+zx+x^2}$.

5. $x=\frac{a}{a+b}$ এবং $y=\frac{b}{a+b}$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; (ii) $\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}=\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$.

6. $x+y+z=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3=0.$$

7. দেখাও যে, $(p-q)(x-p)(x-q)+(q-r)(x-q)(x-r)$
$+(r-p)(x-r)(x-p)=(p-q)(q-r)(p-r)$.

8. সমাধান কর :

$$\tfrac{1}{3}(7x-5)+\tfrac{1}{39}(34x+10)-\frac{(3x-2)(5x-3)}{4}=\frac{(4-x)(2+15x)}{4}-18.$$

9. কোন স্ত্রীলোক পেনি প্রতি তিনটি হিসাবে কতকগুলি আপেল, এবং পেনি প্রতি চারিটি হিসাবে ঐ সমান-সংখ্যক আপেল ক্রয় করিয়া প্রতি দুই পেনিতে সাতটি হিসাবে সমস্ত আপেল বিক্রয় করিয়া দেখিতে পাইল যে, তাহার তিন পেন্স্ লোকসান হইয়াছে। সে কত মূল্যে আপেলগুলি বিক্রয় করিয়াছিল ?

[A woman bought apples at three for a penny and as many more at four for a penny ; and she sold them at seven for 2*d*. She lost, however, 3*d*. by the business. How much did she sell them for ?]

10. সমাধান কর : $(2x+3)(x-5)+(x+5)(3x+1)=34+5(x+4)(x+5)$.

VII

1. $x^3-7x^2+5x-35$, x^4+8x^2+15 এবং $x^3(x^2+8)-7(x^4+15)+15x-56x^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

2. $ab-ac+bc-b^2$, $bc-ab+ac-c^2$ এবং $ac-bc+ab-a^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

3. x এবং y, এই দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. যথাক্রমে 3 এবং 105 ; $x+y=36$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{35}$.

4. সরল কর : $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-1)}$.

5. $x=\dfrac{a+b}{a-b}$ এবং $y=\dfrac{a-b}{a+b}$ হইলে, $\dfrac{x+y}{x-y}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. প্রমাণ কর যে, $2\{(y+z-2x)^4+(z+x-2y)^4+(x+y-2z)^4\}$
$$=\{(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2\}^2.$$

7. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,
$$16s(s-a)(s-b)(s-c)=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4.$$

8. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা, উহার অন্তর্গত অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির চারিগুণ হইলে, দেখাও যে, অঙ্ক দুইটিকে বিপরীতক্রমে লিখিয়া যে সংখ্যাটি পাওয়া যায়, সেইটি ঐ অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাতগুণ হইবে।

[Show that if a number, formed of two digits, is four times the sum of the digits, the number formed by interchanging the digits is seven times their sum.]

9. সমাধান কর :
$$\left.\begin{array}{l}3x+20=4y-10\\4(x-1)-3(y-3)=0\end{array}\right\}$$
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1895]

10. কোন এক সংখ্যার বর্গ 7 অপেক্ষা যত ছোট, ঐ সংখ্যার সহিত 2 এর সমষ্টির বর্গ 19 অপেক্ষা তত ছোট ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[The excess of 7 over the square of a number is the same as the excess of 19, over the square of another number greater by 2, than the previous one. Find the number.]

ষড়্বিংশ অধ্যায়

ভাগশেষসম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা (Remainder Theorem); বিভাজ্যতা (Divisibility) ও গুণনীয়কসম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা (Factor Theorem)

180. ভাগবিষয়ক আবশ্যকীয় প্রতিজ্ঞা (Important Theorem in Division) :

প্রতিজ্ঞা 1. px^2+qx+r কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে, x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি (অর্থাৎ যে ভাগশেষটিতে x থাকিবে না, সেইটি) pa^2+qa+r হইবে।

এখন,
$$\begin{array}{r|l} x-a & px^2+qx+r \;\big(\, px+(ap+q) \\ & \underline{px^2-apx\qquad} \\ & (ap+q)x+r \\ & \underline{(ap+q)x-a(ap+q)} \\ & a(ap+q)+r \end{array}$$

$\therefore$ x-বর্জ্জিত ভাগশেষ $=a(ap+q)+r=pa^2+qa+r.$

টীকা। লক্ষ্য করিবে যে, উপরিউক্ত ভাগশেষ এবং প্রদত্ত ভাজ্য উভয় একই আকারের ; এবং ভাজ্যে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলে ভাগশেষ পাওয়া যায়।

প্রতিজ্ঞা 2. px^3+qx^2+rx+s কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে, যে ভাগশেষটিতে x থাকিবে না, সেইটি pa^3+qa^2+ra+s হইবে।

এখন,
$$\begin{array}{r|l} x-a & px^3+qx^2+rx+s \;\big(\, px^2+(ap+q)x+(pa^2+qa+r) \\ & \underline{px^3-apx^2\qquad\qquad} \\ & (ap+q)x^2+rx+s \\ & \underline{(ap+q)x^2-a(ap+q)x} \\ & (pa^2+qa+r)x+s \\ & \underline{(pa^2+qa+r)x-a(pa^2+qa+r)} \\ & a(pa^2+qa+r)+s \end{array}$$

$\therefore$ x-বর্জ্জিত ভাগশেষ $=pa^3+qa^2+ra+s.$

টীকা। এক্ষেত্রেও দেখা যায় যে, ভাজ্যে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলেই x-বর্জ্জিত ভাগশেষ পাওয়া যায়।

উদা. 1. x^3-5x^2+6x+9 কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করিয়া x-বর্জ্জিত ভাগশেষ নির্ণয় কর।

প্রতিজ্ঞা 2 অনুসারে, নির্ণেয় ভাগশেষ $=2^3-5.2^2+6.2+9$
$=8-20+12+9=9.$

উদা. 2. x^3-216 কে $x-6$ দ্বারা ভাগ করিয়া x-বর্জ্জিত ভাগশেষ নির্ণয় কর।

নির্ণেয় ভাগশেষ $=6^3-216=216-216=0.$

টীকা। ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা উপরিউক্ত ফলগুলি প্রত্যক্ষ করা কর্ত্তব্য।

181. মূলদ (Rational) ও অখণ্ড বা পূর্ণ রাশিমালা (Integral Expressions) :

$p, q, r, \ldots\ldots l, m$ প্রত্যেকেই ধ্রুবক (constant) এবং n একটি অখণ্ড ধনরাশি (positive integer) হইলে, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m$ রাশিমালাকে x এর **মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালা** (rational and integral expression) বলে। যথা, $x^2-3x+13$, x^3+px+r, প্রভৃতি রাশিমালাসমূহের প্রত্যেকেই x এর মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালা।

এক্ষণে, উপরিউক্ত মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালার সাহায্যে ভাগশেষসম্বন্ধীয় সাধারণ প্রতিজ্ঞাটি (General Remainder Theorem) প্রতিপন্ন করা যাইতেছে।

182. ভাগশেষসম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা (Remainder Theorem) :

x এর কোন মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালাকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে, প্রদত্ত রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলেই x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি (the remainder independent of x) পাওয়া যায়।

ধর, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে Q দ্বারা, এবং x-বর্জ্জিত ভাগশেষটিকে R দ্বারা সূচিত করা হইল। তাহা হইলে,

যেহেতু সকল ক্ষেত্রেই, ভাজ্য $\equiv$ (ভাজক) $\times$ (ভাগফল) + ভাগশেষ,

অতএব, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots+lx+m\equiv(x-a).Q+R$, একটি অভেদ।

এখন, যেহেতু ভাগশেষ, R এর ভিতর x নাই, অতএব, x এর পরিবর্ত্তে যে কোন মানই দেওয়া যাক না কেন, R এর কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। কাজেই, উপরিউক্ত অভেদটিতে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলে,

$pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots\cdots + la + m = (a-a).Q' + R,$

[$x = a$ হইলে Q এর মান Q' দ্বারা বুঝান যাইতেছে]

$= 0 \times Q' + R = R.$

$\therefore$ x-বর্জ্জিত ভাগশেষ, অর্থাৎ $R = pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots + la + m.$

কাজেই দেখা যায় যে, প্রদত্ত রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলেই নির্ণেয় x-বর্জ্জিত ভাগশেষ পাওয়া যায়।

অতএব, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

অনুসি.। কোন মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালাকে $x + a$ দ্বারা ভাগ করিলে, x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি, প্রদত্ত রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে '$-a$' বসাইলেই পাওয়া যায়।

[যেহেতু $x + a = x - (-a)$, কাজেই, এই সিদ্ধান্তের সত্যতা ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা হইতে সহজেই প্রমাণিত হইতে পারে।]

উদা. 1. $x^2 - 5x + 9$ কে $x + 2$ দ্বারা ভাগ করিয়া, x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি নির্ণয় কর।

উপরিউক্ত অনুসিদ্ধান্ত হইতে,

নির্ণেয় ভাগশেষ $= (-2)^2 - 5.(-2) + 9 = 4 + 10 + 9 = 23.$

উদা. 2. $x^2 + px + q$ কে $x + a$ দ্বারা ভাগ করিয়া, x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি নির্ণয় কর।

উপরিউক্ত অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে,

নির্ণেয় ভাগশেষ $= (-a)^2 + p(-a) + q = a^2 - pa + q.$

টীকা। ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা এই ফলগুলি প্রত্যক্ষ করা উচিত।

উদা. 3. $x = 15$ হইলে, $x^6 - 19x^5 + 69x^4 - 151x^3 + 229x^2 + 166x + 26$ এর মান কত ?

ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা অনুসারে,

নির্ণেয় মান = প্রদত্ত রাশিমালাকে $x - 15$ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগশেষ ;

এখন, প্রদত্ত রাশিমালা

$$= x^6 - 15x^5 - (4x^5 - 60x^4) + (9x^4 - 135x^3) - (16x^3 - 240x^2) - (11x^2 - 165x) + (x - 15) + 41$$

$$= x^5(x-15) - 4x^4(x-15) + 9x^3(x-15) - 16x^2(x-15) - 11x(x-15) + (x-15) + 41.$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাকে $x-15$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ 41 হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=41$.

183. বিভাজ্যতা (Divisibility) ও গুণনীয়কসম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা (Factor Theorem) : যদি x-যুক্ত কোন মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালাতে x এর পরিবর্তে a বসাইলে রাশিমালার মান (শূন্য) হয়, তবে ঐ রাশিমালা $x-a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য ; এবং $x-a$ উহার এক গুণনীয়ক।

ধর, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m$ প্রদত্ত রাশিমালা।

ইহাকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে,

ভাগশেষ $=$ ঐ রাশিমালাতে x এর পরিবর্তে a বসাইয়া লব্ধ মান

[ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা]

$=pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots\cdots+la+m.$

অতএব, যদি এই ভাগশেষ, অর্থাৎ $pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m=0$ হয়, তবে প্রদত্ত রাশিমালা $x-a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

আবার, যেহেতু ভাজ্য $=$ ভাজক $\times$ ভাগফল $+$ ভাগশেষ,

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা

$=(x-a)\times Q+(pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m)$ [$Q\equiv$ ভাগফল]

$=(x-a).Q$, যদি $pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m=0$ হয় ;

কাজেই, $pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m=0$ হইলে, প্রদত্ত রাশিমালার, অর্থাৎ $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots+lx+m$ এর, এক গুণনীয়ক $x-a$ হইবে।

অনুসি.। $p(-a)^n+q(-a)^{n-1}+r(-a)^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+l(-a)+m=0$ হইলে, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots+lx+m$ এর, এক গুণনীয়ক $x+a$ হইবে।

[যেহেতু $x+a=x-(-a)$, কাজেই মূল প্রতিজ্ঞা হইতে অনুসিদ্ধান্তের সত্যতা সহজেই অনুমেয়।]

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $3x^3-2x^2+x-18$ রাশিমালা $x-2$ দ্বারা বিভাজ্য এবং $x-2$ প্রদত্ত রাশিমালার এক গুণনীয়ক হইবে।

$x=2$ বসাইয়া রাশিমালার মান $=3.2^3-2.2^2+2-18=24-8+2-18=0.$ অতএব, উপরিউক্ত প্রতিজ্ঞা অনুসারে দেখা যায় যে, $3x^3-2x^2+x-18$ রাশিমালা $x-2$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য এবং $x-2$ প্রদত্ত রাশিমালার এক গুণনীয়ক।

উদা. 2. দেখাও যে, $3x^3-2x^2y-13xy^2+10y^3$ রাশিমালা $(x-2y)$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

প্রদত্ত রাশিমালাতে $x=2y$ বসাইলে,

$$\text{উহার মান}=3(2y)^3-2.(2y)^2.y-13.(2y).y^2+10y^3$$
$$=24y^3-8y^3-26y^3+10y^3=0.$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা $x-2y$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য, এবং $x-2y$ উহার এক গুণনীয়ক।

উদা. 3. কোন্ সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে, $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m$ রাশিমালা $x-1$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ?

প্রদত্ত রাশিমালাতে $x=1$ বসাইলে,

$$\text{উহার মান}=a.1^n+b.1^{n-1}+c.1^{n-2}+\cdots+l.1+m$$
$$=a+b+c+\cdots+l+m$$

[কারণ, $1^n=1\times1\times1\times\cdots\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত $=1$;
তদ্রূপ, $1^{n-1}=1^{n-2}=\cdots=1.$]

$\therefore\ a+b+c+\cdots+l+m=0$ হইলে,

অর্থাৎ, যদি প্রদত্ত রাশিমালার সহগগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টির মান 0 হয়, তাহা হইলে প্রদত্ত রাশিমালা $x-1$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে।

উদা. 4. দেখাও যে, x^3+4x^2+5x+6 এর গুণনীয়ক $x+3$ হইবে।

$$x+3=x-(-3).$$

$x=-3$ হইলে, প্রদত্ত রাশিমালার মান $=(-3)^3+4.(-3)^2+5.(-3)+6$
$$=-27+36-15+6=0.$$

কাজেই, উপরিউক্ত প্রতিজ্ঞা অনুসারে, প্রদত্ত রাশিমালা $x+3$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য এবং $x+3$ উহার এক গুণনীয়ক হইবে।

উদা. 5. p এর মান কত হইলে, x^3+3x^2+4x+p এর এক গুণনীয়ক $x+6$ হইবে ?

$$x+6=x-(-6).$$

$x=-6$ হইলে, প্রদত্ত রাশিমালার মান $=(-6)^3+3.(-6)^2+4.(-6)+p$
$$=-216+108-24+p$$
$$=p-132.$$

উপরিউক্ত প্রতিজ্ঞা অনুসারে দেখা যায় যে, $p-132=0$ হইলে, প্রদত্ত রাশিমালার এক গুণনীয়ক $x+6$ হইবে।

$\therefore$ p এর নির্ণেয় মান $=132$.

উদা. 6. কোন্ সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে, x^2+3x+p এবং x^2+4x+q এর এক গুণনীয়ক সাধারণ থাকিবে ?

ধর, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের এক গুণনীয়ক সাধারণ আছে, এবং উহা $x-a$.

এখন $x=a$ হইলে, x^2+3x+p এর মান $=a^2+3a+p=0$; ... (1)

[কারণ, $x-a$ এই রাশিমালার এক গুণনীয়ক]

আবার, $x=a$ হইলে, x^2+4x+q এর মান $=a^2+4a+q=0$; ... (2)

[কারণ, $x-a$ এই রাশিমালার এক গুণনীয়ক]

অতএব, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$$(a^2+4a+q)-(a^2+3a+p)=0 \;;$$

অথবা, $a+q-p=0$;

অথবা, $a=p-q$. [পক্ষান্তর করিয়া]

a এর এই লব্ধ মান (1) তে বসাইলে,

$$(p-q)^2+3(p-q)+p=0 \;;$$

অথবা, $p^2-2pq+q^2+3p-3q+p=0$;

$\therefore$ নির্ণেয় সর্ত্ত এই যে, $p^2-2pq+q^2+4p-3q=0$ হইবে।

184. বিভাজ্যতাবিষয়ক কতিপয় আবশ্যকীয় প্রতিজ্ঞা (Some Important Theorems on Divisibility) :

নবম অধ্যায়ে, a^n+b^n এবং a^n-b^n এর $a+b$ ও $a-b$ দ্বারা বিভাজ্যতা-সম্পর্কীয় কয়েকটি বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রসম্বন্ধে উল্লেখ করা হইয়াছে। এক্ষণে, সাধারণভাবে ঐ সম্পর্কে আলোচনা করা যাইতেছে।

প্রতিজ্ঞা 1. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশিই হউক না কেন, a^n-b^n সকল সময়েই $a-b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

ধর, a^n-b^n কে $a-b$ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল Q এবং a-বর্জ্জিত ভাগশেষ R পাওয়া গেল। তাহা হইলে,

যেহেতু ভাজ্য $\equiv$ (ভাজক) $\times$ (ভাগফল) $+$ (ভাগশেষ),

অতএব, $a^n-b^n\equiv Q\times(a-b)+R$, একটি অভেদ।

এখন, R এর মধ্যে a অক্ষরটি না থাকায়, a এর যে কোন মানই দেওয়া যাক না কেন, R এর মানের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না।

মনে কর, উপরিউক্ত অভেদটিতে a এর পরিবর্ত্তে b বসান হইল।

তাহা হইলে, $b^n - b^n = Q' \times (b-b) + R$, [$a=b$ হইলে, Q এর মান Q' দ্বারা বুঝান যাইতেছে]

বা, $\quad 0 = Q' \times 0 + R = 0 + R$;

$\therefore \quad R = 0.$

স্থতরাং, ভাগশেষ 0 হওয়ায়, $a^n - b^n$ রাশিটি $a-b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। প্রকৃত ভাগ করিয়া দেখা যাইবে যে,

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots\cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

উদা.। $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$, $a^5 - b^5$ প্রভৃতির প্রত্যেকেই $a-b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

প্রতিজ্ঞা 2. n একটি **যুগ্ম** ধনরাশি হইলে, $a^n - b^n$ রাশিমালা $a+b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ; কিন্তু n **অযুগ্ম** হইলে, ঐরূপ হইবে না।

ধর, $a^n - b^n$ কে $a+b$ দ্বারা ভাগ করিয়া, ভাগফল Q দ্বারা এবং a-বর্জ্জিত ভাগশেষ R দ্বারা স্থচিত করা হইল। তাহা হইলে অবশ্যই,

$$a^n - b^n \equiv Q \times (a+b) + R, \text{ একটি অভেদ।}$$

এখন, R এর ভিতর a না থাকায়, a এর যে কোন মানই দেওয়া যাক না কেন, R এর মানের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। মনে কর, উপরিউক্ত অভেদে a এর পরিবর্ত্তে $-b$ বসান হইল। তাহা হইলে,

$(-b)^n - b^n = Q' \times (-b+b) + R$, [$a = -b$ হইলে, Q এর মান Q' দ্বারা বুঝান যাইতেছে]

$= Q' \times 0 + R = R$;

এখন, n যুগ্ম হইলে, $\quad (-b)^n - b^n = b^n - b^n = 0$;

এবং n অযুগ্ম হইলে, $\quad (-b)^n - b^n = -b^n - b^n = -2b^n$;

$\therefore$ n যুগ্ম হইলে, ভাগশেষ, অর্থাৎ $R = 0$;

এবং n অযুগ্ম হইলে, R অর্থাৎ ভাগশেষ $= -2b^n$; কাজেই শূন্য নয়।

স্থতরাং, n যুগ্ম হইলে, $a^n - b^n$ রাশিটি $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য, কিন্তু n অযুগ্ম হইলে, তদ্রূপ হইবে না।

n যুগ্ম হইলে, প্রকৃত ভাগ করিয়া দেখা যায় যে,

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots\cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

উদা.। $a^2 - b^2$, $a^4 - b^4$, $a^6 - b^6$ প্রভৃতির প্রত্যেকেই $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য ; কিন্তু $a^3 - b^3$, $a^5 - b^5$, $a^7 - b^7$ প্রভৃতির কোনটিই $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

প্রতিজ্ঞা 3. n একটি **অযুগ্ম** অখণ্ড ধনরাশি হইলে, $a^n + b^n$ রাশিমালা $a+b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ; কিন্তু n যুগ্ম হইলে, ঐরূপ হইবে না।

ধর, $a^n + b^n$ কে $a+b$ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল Q দ্বারা এবং a-বর্জ্জিত ভাগশেষ R দ্বারা সূচিত করা হইল। তাহা হইলে অবশ্যই

$$a^n + b^n = (a+b) \times Q + R,$$ একটি অভেদ।

যেহেতু R এর ভিতর a নাই, অতএব উপরিউক্ত অভেদে a এর পরিবর্ত্তে যে কোন মানই বসান হউক না কেন, R এর মানের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। কাজেই, a এর পরিবর্ত্তে $-b$ বসাইয়া,

$$(-b)^n + b^n = Q' \times (-b+b) + R = Q' \times 0 + R = R.$$ [a এর পরিবর্ত্তে $-b$ বসাইয়া Q এর মান Q' দ্বারা সূচিত করা হইতেছে]

এখন, n অযুগ্ম অখণ্ড ধনরাশি হইলে, $(-b)^n + b^n = -b^n + b^n = 0$;

কিন্তু n যুগ্ম হইলে, $(-b)^n + b^n = b^n + b^n = 2b^n$ (শূন্য নয়)।

কাজেই, n অযুগ্ম হইলে, R এর মান শূন্য হইবে ; n যুগ্ম হইলে, R শূন্য হইবে না।

সুতরাং, n অযুগ্ম হইলে, $a^n + b^n$ রাশিমালা $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে ; কিন্তু n যুগ্ম হইলে, ঐরূপ হইবে না।

বস্তুতঃ, n অযুগ্ম হইলে, প্রকৃত ভাগ দ্বারা,

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

উদা.। $a^3 + b^3$, $a^5 + b^5$, $a^7 + b^7$ প্রভৃতির প্রত্যেকেই $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য ; কিন্তু $a^2 + b^2$, $a^4 + b^4$, $a^6 + b^6, \ldots$, প্রভৃতির কোনটিই $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

প্রতিজ্ঞা 4. n **যুগ্মই** হউক, বা **অযুগ্মই** হউক, $a^n + b^n$ কোন সময়ই $a-b$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে না।

ধর, $a^n + b^n$ কে $a-b$ দ্বারা ভাগ করিয়া, ভাগফল Q দ্বারা এবং a-বর্জ্জিত ভাগশেষ R দ্বারা সূচিত করা হইল। তাহা হইলে,

$$a^n + b^n = Q \times (a-b) + R,$$ একটি অভেদ।

যেহেতু R এর ভিতর a নাই, অতএব a এর যে কোন মানই দেওয়া যাক না কেন, R এর মানের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। কাজেই, উপরিউক্ত অভেদে $a=b$ বসাইলে, $b^n+b^n=Q'\times(b-b)+R=Q'\times 0+R=R$; [a এর পরিবর্ত্তে b বসাইয়া Q এর মান Q' দ্বারা সূচিত করা হইতেছে]

অথবা, $R=2b^n$.

যেহেতু n এর কোন মানের জন্যই R এর মান শূন্য হয় না, কাজেই, a^n+b^n কোন সময়ই $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

উদা. । a^2+b^2, a^3+b^3, a^4+b^4 প্রভৃতির কোনটিই $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

উদা. 1. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, $3^{4n}-4^{3n}$ রাশিমালা 17 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

এখন, $3^{4n}-4^{3n}=(3^4)^n-(4^3)^n=(81)^n-(64)^n$.

কাজেই প্রথম প্রতিজ্ঞা অনুসারে, প্রদত্ত রাশিটি $81-64$ অর্থাৎ 17 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

উদা. 2. n একটি যুগ্ম অখণ্ড ধনরাশি হইলে, $2^{6n}-6^{2n}$ রাশিটির শেষের অঙ্ক দুইটির প্রত্যেকে 0 হইবে।

প্রদত্ত রাশি $=(2^6)^n-(6^2)^n=(64)^n-(36)^n$.

এখন, যেহেতু n একটি যুগ্ম অখণ্ড ধনরাশি, অতএব, দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞা অনুসারে, প্রদত্ত রাশি, $64+36$ অর্থাৎ 100 দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

যেহেতু প্রদত্ত রাশিটির এক উৎপাদক 100 হইবে, অতএব, উহার শেষ অঙ্ক দুইটি 0 হইবে।

উদা. 3. m অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)^{2m+1}+(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)^{2m+1}$ এর একটি উৎপাদক $2x$ হইবে।

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\{(x+a)^3\}^{2m+1}+\{(x-a)^3\}^{2m+1}$$
$$=(x+a)^{3(2m+1)}+(x-a)^{3(2m+1)}.$$

যেহেতু $3(2m+1)$ একটি অযুগ্ম অখণ্ড ধনরাশি, অতএব, প্রদত্ত রাশি, $(x+a)+(x-a)$, অর্থাৎ $2x$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। সুতরাং, $2x$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক।

উদা. 4. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে,

$(b-c)^{2n+1}+(c-a)^{2n+1}+(a-b)^{2n+1}$ রাশিমালা

$(b-c)(c-a)(a-b)$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে।

প্রদত্ত রাশিমালা a, b, c অক্ষরবিশিষ্ট একটি মূলদ (rational) ও পূর্ণ রাশিমালা (integral expression) ; ইহাতে b এর পরিবর্তে c বসাইলে,

$$\begin{aligned}\text{রাশিমালার মান} &= (c-c)^{2n+1}+(c-a)^{2n+1}+(a-c)^{2n+1}\\ &= (0)^{2n+1} \quad +(c-a)^{2n+1}+\{-(c-a)\}^{2n+1}\\ &= 0 \qquad\quad +(c-a)^{2n+1}-(c-a)^{2n+1}.\end{aligned}$$

যেহেতু, $\{-(c-a)\}^{2n+1}$

$=\{-1\times(c-a)\}^{2n+1}$

$=\{-1\times(c-a)\}\times\{-1\times(c-a)\}\times\cdots\cdots$ এরূপ $(2n+1)$ উৎপাদক পর্য্যন্ত

$=\{(-1)\times(-1)\times(-1)\times\cdots\cdots$ এরূপ $(2n+1)$ উৎপাদক পর্য্যন্ত $\}$

$\times\{(c-a)\times(c-a)\times(c-a)\times\cdots\cdots$ এরূপ $(2n+1)$ উৎপাদক পর্য্যন্ত $\}$

$=-1\times(c-a)^{2n+1}=-(c-a)^{2n+1}$;

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=0$.

কাজেই, 183 নিয়ম অনুসারে, প্রদত্ত রাশিমালা $b-c$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। এইরূপে, c এর পরিবর্তে a বসাইয়া দেখান যাইবে যে, প্রদত্ত রাশিমালা $c-a$ দ্বারা বিভাজ্য ; এবং a এর পরিবর্তে b বসাইয়া দেখান যাইবে যে, প্রদত্ত রাশিমালা $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য।

কাজেই, প্রদত্ত রাশিমালা $(b-c)(c-a)(a-b)$ এই গুণফল দ্বারাও সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

উদা. 5. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(ab)^n-(bc)^n+(cd)^n-(da)^n$ রাশিমালা $ab-bc+cd-da$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। [মাদ্রাজ, 1873]

স্পষ্টতঃ, $ab-bc+cd-da=b(a-c)+d(c-a)=(c-a)(d-b)$.

এখন, প্রদত্ত রাশিমালাতে c এর পরিবর্তে a বসাইলে,

$$\begin{aligned}\text{উহার মান} &= (ab)^n-(ba)^n+(ad)^n-(da)^n\\ &= (ab)^n-(ab)^n+(ad)^n-(ad)^n=0.\end{aligned}$$

কাজেই, নিয়ম 183 অনুসারে, প্রদত্ত রাশিমালা $c-a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। তদ্রূপ, d এর পরিবর্তে b বসাইয়া দেখান যাইতে পারে যে, প্রদত্ত রাশিমালা $d-b$

দ্বারাও বিভাজ্য। সুতরাং, প্রদত্ত রাশিমালা $c-a$ এবং $d-b$ এর গুণফল, অর্থাৎ $(c-a)\times(d-b)$, অর্থাৎ $ab-bc+cd-da$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

উদা. 6. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $x^{n+1}-x^n-x+1$ রাশিমালা $(x-1)^2$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^{n+1}-x^n-x+1=x^n(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^n-1)$; কাজেই, $x-1$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি গুণনীয়ক।

এখন যেহেতু 184 নিয়মের প্রথম প্রতিজ্ঞা অনুসারে, x^n-1 রাশিটিও $x-1$ দ্বারা বিভাজ্য, কাজেই প্রদত্ত রাশিমালা $(x-1)\times(x-1)$, অর্থাৎ $(x-1)^2$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

উদা. 7. নিম্নলিখিত ধারাবাহিক গুণফলটি (continued product) নির্ণয় কর :

$$(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8).$$

ধর, নির্ণেয় ধারাবাহিক গুণফল A দ্বারা সূচিত হইতেছে।

তাহা হইলে, $A=(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8)$.

উভয় পক্ষকে $x-a$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$\begin{aligned}(x-a).A &= \{(x-a)(x+a)\}(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8)\\ &= \{(x^2-a^2)(x^2+a^2)\}(x^4+a^4)(x^8+a^8)\\ &= \{(x^4-a^4)(x^4+a^4)\}(x^8+a^8)\\ &= (x^8-a^8)(x^8+a^8)=x^{16}-a^{16}.\end{aligned}$$

$$\therefore\ A=\frac{x^{16}-a^{16}}{x-a}=x^{15}+x^{14}a+x^{13}a^2+x^{12}a^3+\cdots\cdots+xa^{14}+a^{15}.$$

উদা. 8. $x+a$ রাশিটি x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ রাশিমালাদ্বয়ের গ. সা. গু. হইলে, দেখাও যে, $a=\frac{q-q'}{p-p'}$.

যেহেতু x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ এর গ. সা. গু. $x+a$, অতএব, উভয় রাশিমালাই $x+a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে।

অতএব, 'বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা (Divisibility Theorem)' অনুসারে,

$(-a)^2+p(-a)+q=0$, অর্থাৎ, $a^2-pa+q=0$;

এবং, $(-a)^2+p'(-a)+q'=0$, অর্থাৎ, $a^2-p'a+q'=0$;

অতএব, বিয়োগ করিয়া, $(a^2-p'a+q')-(a^2-pa+q)=0$;

অথবা, $a(p-p')+q'-q=0$;

পক্ষান্তর করিয়া, $a(p-p')=q-q'$; $\therefore\ a=\frac{q-q'}{p-p'}$.

প্রশ্নমালা 93

প্রকৃত ভাগ না করিয়া ভাগশেষ নির্ণয় কর (Find the remainder without actual division) :

1. $(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)\div(x-3)$.

2. $(3x^9+5x^7+11)\div(x+1)$. 3. $(3x^3+7x^2+11x+2)\div(3x-1)$.

4. $(4x^3+5x^2+9x+7)\div(2x+3)$.

5. $(ax^3+bx^2+cx+d)\div(ax+b)$.

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিতে দেখাও যে, প্রথমোক্ত রাশিটি শেষোক্ত রাশিটি দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য (In the following examples, show that the first expression is divisible by the second) :

6. $6x^3+13x^2+17x+6$; $2x+1$.

7. $apx^3+(2p+aq)x^2+(2q+ar)x+2r$; $ax+2$.

8. $6x^4+13x^3y+18x^2y^2+23xy^3+10y^4$; $3x+2y$.

9. $a^{57}+b^{57}$; $a+b$. 10. $64x^6-729y^6$; $2x+3y$.

11. $x^{2n}-y^{2n}$; $x+y$ [n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি]।

12. $x^{12}y^3-x^3y^{12}$; $x^2y^2(x-y)$.

13. $(3a+2b)^{2n+1}+b^{2n+1}$; $a+b$ [n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি]।

14. $x^{2n+1}-ax^{2n}-xa^{2n}+a^{2n+1}$; $(x-a)^2$.

15. $64+32x+2x^5+x^6$; x^2+4x+4.

16. কোন্ সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে, $x^7+9x^4-7x^3+11ax+5a^2$ এর এক গুণনীয়ক $x+1$ হইবে ?

17. a এর মান কত হইলে, $3x^5+9x^4-7x^3-5x^2-4ax+3a^2$ এর এক গুণনীয়ক $x-1$ হইবে ?

18. m এর মান কত হইলে, a^n+x^n এবং a^n-x^n [n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি] উভয়েই a^m-x^m এর গুণনীয়ক হইবে ? [মান্দ্রাজ, 1875]

19. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে,

$$(x^2+7x+6)^n-(2+x)^{2n}$$ রাশিমালা $3x+2$ দ্বারা বিভাজ্য।

20. দেখাও যে, $3x^3+x^2-11x+7$ কে $x-1$ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফল $x-1$ দ্বারা বিভাজ্য।

দেখাও যে নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহ $(a-b)(b-c)(c-a)$ দ্বারা বিভাজ্য :

21. $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$.

22. $a^3b^3(a-b)+b^3c^3(b-c)+c^3a^3(c-a)$.

23. $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$.

24. $(a-b)^9+(b-c)^9+(c-a)^9$.

25. $a^7b^7(a-b)^{69}+b^7c^7(b-c)^{69}+c^7a^7(c-a)^{69}$.

26. 'বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা (Divisibility Theorem)' সাহায্যে দেখাও যে, $b+c$, $c+a$ এবং $a+b$ এর প্রত্যেকেই $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ এর গুণনীয়ক।

27. দেখাও যে, $x-y$, $a-b$, $b-c$ এবং $c-a$ এর প্রত্যেকেই $(ax+by)\times(bx+cy)(cx+ay)-(ay+bx)(by+cx)(cy+ax)$ এর গুণনীয়ক। [মাদ্রাজ, 1874]

28. দেখাও যে, $a-b$, $b-c$ এবং $c-a$ এর প্রত্যেকেই $a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$ এর গুণনীয়ক। [পাঞ্জাব, 1916]

29. 'বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা' সাহায্যে $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

30. দেখাও যে, $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$ রাশিমালা $(b+c)(c+a)(a+b)(a-b)(b-c)(c-a)$ দ্বারা বিভাজ্য।

31. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(41)^n-1$ এর সর্ব্বদক্ষিণের অঙ্কটি শূন্য হইবে।

32. m যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $7^{2m}-1$ রাশিটি 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 এবং 48 সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য।

33. দেখাও যে, $17^8+13^7-5^8+2^7$ রাশিমালা 3 দ্বারা বিভাজ্য।

34. দেখাও যে, x^3-x-6 এবং $x^3-11x+14$ রাশিমালা দুইটির, $x-m$ এর আকারের এক সাধারণ গুণনীয়ক আছে।

35. m যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(81)^m.(121)^m-1$ রাশিটি 100 দ্বারা বিভাজ্য।

36. নিম্নলিখিত ধারাবাহিক পূরণফল নির্ণয় কর :

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}).$$

37. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে,

$$13^n=12(13^{n-1}+13^{n-2}+\cdots\cdots+1)+1.$$

38. ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর : $11\times101\times10001$.

39. দেখাও যে, $x^n - nx + n - 1$ রাশিমালা $(x-1)^2$ দ্বারা বিভাজ্য।

40. m যে কোন অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $a^m(a-1)+b^m(b-1)$ রাশিমালা $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

নিম্নলিখিত ভাগফলগুলি লিখ (Write down the quotients of) :

41. $(x^5+y^5)\div(x+y)$.

42. $(x^6-y^6)\div(x+y)$.

43. $(x^7-y^7)\div(x-y)$.

44. $(x^{16}-y^{16})\div(x^2+y^2)$.

45. $(x^{16}-y^{16})\div(x-y)$.

46. $ax^3+5x+2p$ এবং $ax^3+3x+p+6$ রাশি দুইটির গ. সা. গু. $x+3$ হইলে, p এবং a এর মান নির্ণয় কর।

47. bx^2-px+5 এবং $bx^2-2x-2p$ রাশি দুইটির গ. সা. গু. $x-5$ হইলে, দেখাও যে, $p=5$ এবং $b=\frac{4}{5}$.

48. qx^2+2x+p এবং qx^2+x+r রাশি দুইটির গ. সা. গু. $x-a$ হইলে, দেখাও যে, $a=r-p$ এবং $q(r-p)^2+2r-p=0$.

49. $x=3$ হইলে, $x^9-3x^8+5x^7-15x^6+13x^5-39x^4+7x^3-21x^2+17x-51$ রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে 3 না বসাইয়া, অন্য উপায়ে উহার মান নির্ণয় কর।

50. $x=1{\cdot}5$ হইলে, $32x^5-48x^4+40x^3-60x^2+26x-38$ রাশিমালার মান কত?

সপ্তবিংশ অধ্যায়

সহজ অনুপাত ও সমানুপাত (Easy Ratio and Proportion)

সহজ অনুপাত

185. সংজ্ঞা : দুইটি সমজাতীয় রাশির একটি, অপরটির কত গুণ বা কত অংশ, ইহা যে অখণ্ড (integral) বা খণ্ড (fractional) সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা হয়, সেই **শুদ্ধ** অর্থাৎ **অনবচ্ছিন্ন** (abstract) **সংখ্যাটিকে** প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির **অনুপাত** (Ratio) বলে। যথা,

যেহেতু 2 ঘণ্টা ও 40 মিনিট উভয়ই সময়জ্ঞাপক রাশি, এবং প্রথমটি, দ্বিতীয়টি দ্বারা সূচিত সময়ের **তিনগুণ** সময় নির্দ্দেশ করে, অতএব, 2 ঘণ্টা ও 40 মিনিটের অনুপাত = 3.

আবার, যেহেতু 9 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য 3 ফুট দৈর্ঘ্যের এক-চতুর্থাংশ, অতএব, 9 ইঞ্চি ও 3 ফুটের অনুপাত = $\frac{1}{4}$.

পুনরায়, যেহেতু 18 শি. পরিমিত অর্থের এক-তৃতীয়াংশের চারিগুণ লইলে 1 পা. 4 শি. পরিমিত অর্থ পাওয়া যায়, অতএব, 1 পা. 4 শি. ও 18 শি. এর অনুপাত $= \frac{4}{3}$; ইত্যাদি।

অতএব, দেখা যায় যে, দুইটি সমজাতীয় বদ্ধ অর্থাৎ অবচ্ছিন্ন (concrete) রাশির উভয়কেই একই এককে পরিবর্ত্তিত করিলে, রাশিদ্বয়ের অনুপাত এরূপ একটি ভগ্নাংশ হয়, যাহার লব ও হর যথাক্রমে (ঐ এককের তুলনায়) প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির পরিমাণ নির্দ্দেশ করে। এবং দুইটি শুদ্ধ অর্থাৎ অনবচ্ছিন্ন সংখ্যার অনুপাত, স্পষ্টতঃ, এরূপ একটি ভগ্নাংশ, যাহার লব ও হর যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশি দ্বারাই সূচিত হইয়া থাকে।

কোন সংখ্যা a, এবং অপর এক সংখ্যা b, ইহাদের অনুপাতকে $a : b$, এইরূপে প্রকাশ করা হয় ; কাজেই $a : b$ এবং $\frac{a}{b}$ উভয়ই একার্থবোধক। a ও b এর অনুপাতে, অর্থাৎ, $a : b$ তে, a কে (অর্থাৎ, প্রথম পদকে) **পূর্ব্বরাশি** (antecedent) এবং b কে (অর্থাৎ, দ্বিতীয় পদকে) **উত্তররাশি** (consequent) বলা হইয়া থাকে।

কোন অনুপাতের পূর্ব্বরাশি, উত্তররাশি অপেক্ষা বড়, বা সমান, বা ছোট হইলে, ঐ অনুপাতকে যথাক্রমে **গুরু অনুপাত** (ratio of greater inequality), **সাম্যানুপাত** (ratio of equality), বা **লঘু অনুপাত** (ratio of less inequality) বলা হয়।

টীকা। যেহেতু কোন অনুপাত একটি ভগ্নাংশ ভিন্ন আর কিছুই নহে, সুতরাং, ভগ্নাংশের ধর্ম্ম অনুসারে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, অনুপাতের পদ দুইটিকে যে কোন একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে, অনুপাতের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না। যথা, $3:4$, $6:8$, $15:20$, $3n:4n$ প্রভৃতি অনুপাতগুলি পরস্পর সমান।

অতএব, দুইটি অনুপাতের কোন্‌টি বড়, বা কোন্‌টি ছোট, তাহা নিরূপণ করাও কষ্টকর নহে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, $2:3$, $4:5$ এবং $7:10$ অনুপাত তিনটি যথাক্রমে $20:30$; $24:30$ এবং $21:30$ অনুপাত তিনটির সমান বলিয়া, স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে যে, মধ্যম অনুপাতটিই সর্ব্বাপেক্ষা বড়, এবং প্রথমটি সর্ব্বাপেক্ষা ছোট।

186. অনুপাতের পদ দুইটির প্রত্যেকের সহিত একই ধনরাশি যোগ করিলে, লঘু অনুপাত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত, এবং গুরু অনুপাত হ্রাসপ্রাপ্ত হয়।

ধর, প্রদত্ত অনুপাতটি $\frac{a}{b}$ দ্বারা সূচিত হইতেছে; এবং উহার পদদ্বয়ের সহিত x যোগ করিয়া $\frac{a+x}{b+x}$ এই নূতন অনুপাতটি পাওয়া গেল।

তাহা হইলে, $\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b}=\frac{x(b-a)}{b(b+x)}$;

অতএব, দেখা যায় যে, b অপেক্ষা a ছোট হইলে, অন্তরফল ধনাত্মক, এবং বড় হইলে, অন্তরফল ঋণাত্মক হইবে।

সুতরাং, যদি $a<b$ হয়, তবে $\frac{a+x}{b+x}>\frac{a}{b}$ হইবে;

এবং যদি $a>b$ হয়, তবে $\frac{a+x}{b+x}<\frac{a}{b}$ হইবে।

কাজেই, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

টীকা। এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, অনুপাতের পদদ্বয়ের প্রত্যেকটি অপেক্ষা ছোট যে কোন একই ধনরাশি, উক্ত পদদ্বয়ের প্রত্যেকটি হইতে বিয়োগ করিলে, লঘু অনুপাত হ্রাসপ্রাপ্ত এবং গুরু অনুপাত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়।

187. অনুপাতসমূহের সংযোগ বা সম্মিলন (Composition): একাধিক অনুপাতের পূর্ব্বপদগুলির ধারাবাহিক গুণফলকে নূতন পূর্ব্বপদ এবং উত্তরপদগুলির ধারাবাহিক গুণফলকে নূতন উত্তরপদরূপে লইয়া যে নূতন অনুপাত

পাওয়া যায়, তাহাকে প্রদত্ত অনুপাতসমূহের **সংযুক্ত** বা **সম্মিলিত,** বা **মিশ্র অনুপাত** (compound ratio) বলে। যথা,

$3 : 4$, $8 : 9$ এবং $2x : 3y$ অনুপাত তিনটির 'সংযুক্ত অনুপাত'

$3 \times 8 \times 2x : 4 \times 9 \times 3y$, অর্থাৎ, $4x : 9y$ হইবে।

$a : b$ অনুপাতটিকে ইহারই (অর্থাৎ, $a : b$ এরই) সহিত সংযুক্ত করিয়া লব্ধ $a^2 : b^2$ অনুপাতটিকে $a : b$ এর **দ্বিগুণানুপাত** (duplicate ratio) বলে। এইরূপ, $a^3 : b^3$ কে $a : b$ এর **ত্রিগুণানুপাত** (triplicate ratio), $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$ কে $a : b$ এর **দ্বিভাজিত অনুপাত** (sub-duplicate ratio), $a^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{3}}$ কে $a : b$ এর **ত্রিভাজিত অনুপাত** (sub-triplicate ratio), ইত্যাদিরূপ বলা হয়।

188. অনুপাতের আসন্ন মান (Approximate values of Ratios) : a এর তুলনায় x এর মান অত্যন্ত ছোট হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, $(a+x)^2 : a^2$ এর আসন্ন মান (approximate value) $a+2x : a$ এর সমান হইবে।

এখন, $\dfrac{(a+x)^2}{a^2} = \dfrac{a^2+2ax+x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{2x}{a} + \dfrac{x^2}{a^2}$;

অতএব, ইহা $= 1 + \dfrac{2x}{a}$ (আসন্ন মান লইয়া); কারণ, $\dfrac{x^2}{a^2}$ $\left(\text{যাহা} = \dfrac{x}{a} \times \dfrac{x}{a}\right)$, $\dfrac{2x}{a}$ এর সহিত তুলনায় অত্যন্ত ছোট এবং কাজেই, 1 এর সহিত তুলনায় আরও ছোট, অতএব, উপেক্ষণীয়।

স্থতরাং, আসন্ন মান লইলে, $\dfrac{(a+x)^2}{a^2} = 1 + \dfrac{2x}{a} = \dfrac{a+2x}{a}$. ... (1)

টীকা। a এর তুলনায় x অত্যন্ত ছোট হইলে, উপরিউক্তরূপে দেখান যাইতে পারে যে, $(a+x)^3 : a^3 = a+3x : a$; $(a+x)^4 : a^4 = a+4x : a$; ইত্যাদি।

189. অমেয় রাশি (Incommensurable quantities) : দুইটি রাশির অনুপাত যদি দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতের আকারে প্রকাশ করা না যায়, তবে উক্ত রাশি দুইটিকে **অমেয় রাশি** (incommensurable quantities) বলে। যথা, $\sqrt{3}$ এবং 2, এই রাশি দুইটি অমেয়; কারণ, এরূপ দুইটি অখণ্ড সংখ্যা কোন সময়েই পাওয়া যায় না, যাহাদের অনুপাত ঠিক $\sqrt{3} : 2$ এর সমান।

দুইটি অমেয় রাশির অনুপাত, কোন সময়েই দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতের আকারে প্রকাশ করিতে না পারিলেও, এরূপ দুইটি অখণ্ড সংখ্যা সকল সময়েই নির্ণয়

করা সম্ভব, যাহাদের অনুপাত অপেক্ষা প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের অনুপাতের পার্থক্য ইচ্ছানুরূপ ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর করা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1{\cdot}73205......}{2}={\cdot}86602...... ;$$

এবং কাজেই, $\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{86602}{100000}$ এবং $<\frac{86603}{100000}$;

সুতরাং, দেখা যায় যে, $\sqrt{3} : 2$ অপেক্ষা $86602 : 100000$, এবং $86603 : 100000$ এর পার্থক্য, $\frac{1}{100000}$ অপেক্ষা ছোট। স্পষ্টতঃ $\sqrt{3} : 2$ এর উপরিউক্ত মান অপেক্ষা আরও ঘনিষ্ঠতর আসন্ন মান নির্ণয় করা যাইতে পারে।

টীকা। কোন সংখ্যাকে যদি দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতের আকারে প্রকাশ করা না যায়, তবে ঐ সংখ্যাটিকেও সচরাচর **অমেয় সংখ্যা** (incommensurable number) বলা হয়।

উদাহরণমালা

উদা. 1. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $2 : 3$ এর সমান; এবং সংখ্যাদ্বয়ের প্রত্যেকটির সহিত 9 যোগ করিলে, নূতন অনুপাতটি $3 : 4$ এর সমান হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[Two numbers are in the ratio of 2 to 3, and if 9 be added to each, they are in the ratio of 3 to 4. Find the numbers.]

যেহেতু সংখ্যাদ্বয়ের অনুপাত $2 : 3$ এর সমান, সুতরাং উহাদিগকে $2x$ ও $3x$ দ্বারা সূচিত করা যাইতে পারে। কাজেই, প্রশ্নের দ্বিতীয় সর্তানুসারে,

$$\frac{2x+9}{3x+9}=\frac{3}{4}.$$

অতএব, $8x+36=9x+27$; $\therefore\ x=9.$

সুতরাং, সংখ্যা দুইটি যথাক্রমে 18 ও 27 হইবে।

উদা. 2. $10x+3y : 5x+2y=9 : 5$ হইলে, $x : y$ এর মান নির্ণয় কর।

এখন, $$\frac{9}{5}=\frac{10x+3y}{5x+2y}=\frac{10\cdot\frac{x}{y}+3}{5\cdot\frac{x}{y}+2}.$$

অতএব, $45 \cdot \frac{x}{y} + 18 = 50 \cdot \frac{x}{y} + 15$;

$\therefore \quad 5 \cdot \frac{x}{y} = 3$; $\qquad \therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{3}{5}$.

উদা. 3. x এবং y উভয়ই ধনাত্মক হইলে, নিম্নলিখিত অনুপাতদ্বয়ের কোন্‌টি বড় ?

$$x^3 + y^3 : x^2 + y^2, \text{ অথবা, } x^2 + y^2 : x + y ?$$

এখন, $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{xy^3 + x^3y - 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)(x + y)} = \frac{xy(x - y)^2}{(x^2 + y^2)(x + y)}$;

এখন, x, y অপেক্ষা বড়ই হউক আর ছোটই হউক, $(x - y)^2$ সকল সময়েই ধনাত্মক হইবে ; অতএব, উপরিলব্ধ অন্তরফলটিও ধনাত্মক হইবে।

সুতরাং, $x^3 + y^3 : x^2 + y^2 > x^2 + y^2 : x + y$.

উদা. 4. দুইটি সৈন্যদলে, যথাক্রমে 11000 ও 7000 সৈন্য আছে ; যুদ্ধ করিবার পূর্ব্বে প্রত্যেক দলেই আরও 1000 সৈন্য আসিয়া যোগ দিল। কোন্ দলের সৈন্যসংখ্যা অনুপাত হিসাবে অধিক বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইল ? [কলিঃ প্রবেশিকা, 1879]

[Two armies number 11000 and 7000 respectively ; before they fight, each is reinforced by 1000 men ; in favour of which army is the increase ?]

প্রথম দলের বৃদ্ধিপ্রাপ্ত সংখ্যা : পূর্ব্বসংখ্যা = 12000 : 11000 = 12 : 11 ;

দ্বিতীয় দলের বৃদ্ধিপ্রাপ্ত সংখ্যা : পূর্ব্বসংখ্যা = 8000 : 7000 = 8 : 7.

এখন, যেহেতু 12 : 11 = 84 : 77 এবং 8 : 7 = 88 : 77,

অতএব, $8 : 7 > 12 : 11$.

সুতরাং, পূর্ব্বসংখ্যার সহিত তুলনায় দ্বিতীয় দলের সৈন্যসংখ্যাই অধিক বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইল।

প্রশ্নমালা 94

নিম্নলিখিত অনুপাতদ্বয়ের কোন্‌টি বৃহত্তর (Which is the greater) ?

1. 4 : 5 অথবা 7 : 8 ?
2. 7 : 10 অথবা 11 : 14 ?
3. 9 : 5 অথবা 13 : 8 ?
4. 22 : 27 অথবা 32 : 45 ?
5. 28 : 39 অথবা 49 : 65 ?

নিম্নলিখিত অনুপাতগুলির 'সংযুক্ত অনুপাত' নির্ণয় কর (Find the ratio compounded of):

6. $a : b$, $b : c$ এবং $c : d$.

7. $3 : 5$, $7 : 9$ এবং $15 : 28$.

8. $a+x : a-x$, $a^2+x^2 : (a+x)^2$ এবং $(a^2-x^2)^2 : a^4-x^4$.

9. $16 : 5$, $5 : 4$ এর ত্রিগুণানুপাত এবং $9 : 4$ এর দ্বিভাজিত অনুপাত।

10. $25 : 18$, $81 : 49$ এর দ্বিভাজিত অনুপাত, $2 : 3$ এর ত্রিগুণানুপাত এবং $7 : 5$ এর দ্বিগুণানুপাত।

11. $2x+5y : 3x+5y = 9 : 10$ হইলে, $x : y$ এর মান নির্ণয় কর।

12. $x : y = 3 : 4$ হইলে, $5x+9y : 16x+5y$ এর মান নির্ণয় কর।

13. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $7 : 8$ এবং উহাদের যোগফল 135; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[Find the two numbers which are in the ratio of 7 : 8 and their sum is 135.]

14. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $5 : 3$ এবং অন্তরফল 34; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[Find the two numbers which are in the ratio of 5 : 3 and whose difference is 34.]

15. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $4 : 5$, এবং উহাদের প্রত্যেকটির সহিত 7 যোগ করিলে, সমষ্টিদ্বয়ের অনুপাত $5 : 6$ হয়; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[Two numbers are in the ratio of 4 : 5; and if 7 be added to each, the sums are in the ratio of 5 : 6. Find the numbers.]

16. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $7 : 9$, এবং উহাদের প্রত্যেকটি হইতে 10 বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট দুইটির অনুপাত $8 : 11$ হয়; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[Two numbers are in the ratio of 7 : 9, and if 10 be subtracted from each, the remainders are in the ratio of 8 : 11. Find the numbers.]

17. x এর মান কত হইলে, $23+x : 19+x$, 2 এর সমান হইবে?

[For what value of x will the ratio $23+x : 19+x$ be equal to 2 ?]

18. $25 : 37$ অনুপাতের উভয় পদের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে, উহা $5 : 6$ এ পরিণত হইবে?

[What number is to be added to each term of the ratio 25 : 37, so that it may be equal to 5 : 6 ?]

19. $29 : 38$ অনুপাতের উভয় পদের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে, উহা $4 : 7$ এ পরিণত হইবে?

[What number is to be added to each term of the ratio 29 : 38, so that it may be equal to 4 : 7 ?]

20. $a : b$ অনুপাতটির উভয় পদের সহিত কোন্ রাশি যোগ করিলে, উহা $c : d$ এ পরিণত হইবে ?

[What number is to be added to each term of the ratio $a : b$, so that it may be equal to $c : d$?]

21. $a > x$ হইলে, দেখাও যে, $a^2 - x^2 : a^2 + x^2 > a - x : a + x$.

22. দেখাও যে, $a^2 + b^2 : a + b < a^2 - b^2 : a - b$.

নিম্নলিখিত অনুপাতের আসন্ন মান নির্ণয় কর (Find approximately the values of) :

23. $(226)^3 : (225)^3$. 24. $\sqrt{(3546)} : \sqrt{(3542)}$.

25. তিনটি ছাত্র A, B, C, প্রতিমাসে যথাক্রমে 15 টাকা, 20 টাকা এবং 25 টাকা করিয়া বৃত্তি পায় ; এবং উহা হইতে তাহারা প্রতিমাসে যথাক্রমে $8\frac{3}{4}$ টাকা, $11\frac{1}{4}$ টাকা এবং $15\frac{5}{8}$ টাকা ব্যয় করে। উহাদের মধ্যে কোন্‌টি সর্ব্বাপেক্ষা মিতব্যয়ী ?

[A, B, C are three school boys getting monthly stipends of Rs. 15, Rs. 20 and Rs. 25 respectively ; out of these amounts, they respectively spend Rs. $8\frac{3}{4}$, Rs. $11\frac{1}{4}$ and Rs. $15\frac{5}{8}$ per month. Which of them is the most frugal ?]

সমানুপাত

190. যদি চারিটি রাশি এরূপভাবে পরস্পর-সম্বদ্ধ হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের অনুপাতের সমান, তাহা হইলে উক্ত রাশি চারিটিকে **সমানুপাতী** (proportionals) বলে। যথা, $a : b = c : d$ হইলে, a, b, c, d রাশি চারিটিকে সমানুপাতী বলা হয়। এই সম্বন্ধকে, অনেক সময়, '$a : b :: c : d$', এইরূপে লিখা হয়, এবং 'a ও b এর অনুপাত যাহা c ও d এর অনুপাতও তাহা' এইরূপে পড়া হইয়া থাকে।

উপরিউক্ত সমানুপাতে, a ও d কে (অর্থাৎ, প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে) দুই **অন্ত্য রাশি** (extremes) এবং b ও c কে (অর্থাৎ, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে) দুই **মধ্য রাশি** (means) বলে। চতুর্থ রাশিকে (অর্থাৎ, d কে) a, b, c এর **চতুর্থ-সমানুপাতী** (fourth proportional)-ও বলা হইয়া থাকে।

তিন বা ততোধিক রাশি যদি এরূপভাবে পরস্পর-সম্বদ্ধ হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের অনুপাত, দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের অনুপাত প্রভৃতি অনুপাতগুলি পরস্পর সমান, তাহা হইলে ঐ রাশিসমূহকে **ক্রমিক** বা **ধারাবাহিক সমানুপাতী** (in continued proportion) বলে। যথা, a, b, c, d রাশি চারিটি

যদি এরূপ হয় যে, $a:b=b:c=c:d$, তাহা হইলে উহারা ক্রমিক বা ধারাবাহিক সমানুপাতী হইবে।

তিনটি রাশি, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হইলে (অর্থাৎ, $a:b=b:c$ হইলে), b কে a ও c এর **মধ্য-সমানুপাতী** (mean proportional), এবং c কে a ও b এর **তৃতীয়-সমানুপাতী** (third proportional) বলে।

191. $a:b::c:d$ হইলে, $ad=bc$ হইবে।

যেহেতু $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, অতএব, উভয় পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করিলে, $ad=bc$ হয়।

স্থতরাং, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, উহাদের অন্ত্য রাশিদ্বয়ের গুণফল, মধ্য রাশিদ্বয়ের গুণফলের সমান।

[বিপরীতক্রমে, $ad=bc$ হইলে, $a:b::c:d$ হইবে ; কারণ, প্রদত্ত সমতার উভয় পক্ষকে bd দ্বারা ভাগ করিলেই $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়।]

অনুসি.। $a:b::b:c$ হইলে, $ac=b^2$ হইবে ; অর্থাৎ, তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, অন্ত্য রাশিদ্বয়ের গুণফল, মধ্য রাশির বর্গের সমান হইবে।

টীকা। উপরিউক্ত ফলগুলি হইতে সহজেই দেখা যায় যে, চারিটি সমানুপাতীর যে কোন তিনটি দেওয়া থাকিলে, অবশিষ্টটি, অথবা, তিনটি ক্রমিক সমানুপাতীর যে কোন দুইটি দেওয়া থাকিলে, অবশিষ্টটি অবিলম্বে নির্ণয় করা যায়।

প্রশ্নমালা 95

নিম্নলিখিত প্রত্যেক ক্ষেত্রে তৃতীয়-সমানুপাতীটি নির্ণয় কর (Find a third proportional to) :

1. 9, 6. **2.** 8, 12. **3.** 6, 15. **4.** 16, 24.

নিম্নলিখিত প্রত্যেক ক্ষেত্রে চতুর্থ-সমানুপাতীটি নির্ণয় কর (Find a fourth proportional to) :

5. 6, 8, 15. **6.** 14, 24, 35. **7.** ·0014, 1·4, ·02.

নিম্নলিখিত রাশিদ্বয়ের মধ্য-সমানুপাতীটি নির্ণয় কর (Find a mean proportional between) :

8. 4, 9. **9.** 7, 28. **10.** 6, 54.

192. $a : b :: b : c$ হইলে, $a : c :: a^2 : b^2$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$;

$\therefore \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$; অথবা, $\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2}$.

অর্থাৎ, তিনটি ক্রমিক সমানুপাতীর প্রথম ও তৃতীয়ের অনুপাত, প্রথম ও দ্বিতীয়ের দ্বিগুণিত (duplicate) অনুপাতের সমান।

টীকা। তদ্রূপ, $a : b = b : c = c : d$ হইলে, সহজেই দেখান যাইতে পারে যে, $a : d = a^3 : b^3$ [ইহার প্রমাণের ভার ছাত্রদের উপর রহিল]।

193. $a : b :: c : d$ হইলে, $b : a :: d : c$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;

$\therefore 1 \div \frac{a}{b} = 1 \div \frac{c}{d}$; অতএব, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, উহাদিগকে **ব্যস্তভাবে** (taken inversely) লইলেও, উহারা সমানুপাতী হইবে।

এই প্রক্রিয়াকে **ব্যস্ত-প্রক্রিয়া** (Invertendo) বলে।

194. $a : b :: c : d$ হইলে, $a : c :: b : d$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\therefore \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{c}$; অথবা, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, উহাদিগকে **একান্তরভাবে** (alternately) লইলেও, উহারা সমানুপাতী হইবে।

এই প্রক্রিয়াকে **একান্তরকরণ-প্রক্রিয়া** (Alternando) বলে।

195. $a : b :: c : d$ হইলে, $a + b : b :: c + d : d$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\therefore \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$; অথবা, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের সমষ্টির সহিত দ্বিতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের সমষ্টির সহিত চতুর্থের অনুপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে **যৌগিক-প্রক্রিয়া** (Componendo) বলে।

196. $a:b::c:d$ হইলে, $a-b:b::c-d:d$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

$\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$; অথবা, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের বিয়োগফলের সহিত দ্বিতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের বিয়োগফলের সহিত চতুর্থের অনুপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে **ভাগ-প্রক্রিয়া** (Dividendo) বলে।

অনুসি.। $a:b::c:d$ হইলে, $a:a-b::c:c-d$.

কারণ, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;

সুতরাং, ব্যস্তভাবে লইলে (taken inversely), $\frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d}$.

অতএব, $\frac{b}{a-b}\times\frac{a}{b}=\frac{d}{c-d}\times\frac{c}{d}$; অথবা, $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথমের সহিত প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরফলের অনুপাত, তৃতীয়ের সহিত তৃতীয় ও চতুর্থের অন্তরফলের অনুপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে **রূপান্তর-প্রক্রিয়া** (Convertendo) বলে।

197. $a:b::c:d$ হইলে, $a+b:a-b::c+d:c-d$ হইবে।

নিয়ম 195 হইতে, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. ... ... (1)

নিয়ম 196 হইতে, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$. ... ... (2)

কাজেই, (1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের সমষ্টি এবং অন্তরফলের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের সমষ্টি এবং অন্তরফলের অনুপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে অনেক সময় **'যোগ ও ভাগ'-প্রক্রিয়া** (Componendo and Dividendo) বলে।

টীকা। এই নিয়মে প্রমাণিত ফলটি কতিপয় বিশেষ শ্রেণীর সমীকরণ সমাধানের পক্ষে অত্যন্ত উপযোগী। ইহার দৃষ্টান্ত দেওয়া যাইতেছে।

উদা. 1. সমাধান কর : $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b.$

'যোগ ও ভাগ'-প্রক্রিয়া দ্বারা, $\dfrac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}}=\dfrac{b+1}{b-1}.$

অতএব, $\dfrac{a+x}{a-x}=\left(\dfrac{b+1}{b-1}\right)^2=\dfrac{b^2+2b+1}{b^2-2b+1}.$

আবার, 'যোগ ও ভাগ'-প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{2a}{2x}=\frac{2(b^2+1)}{4b}; \qquad \text{অথবা,} \qquad \frac{a}{x}=\frac{b^2+1}{2b};$$

$$\therefore\ x(b^2+1)=2ab; \qquad \therefore\ x=\frac{2ab}{b^2+1}.$$

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{1-ax}{1+ax}\cdot\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}=1.$

এখন, $\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}=\dfrac{1+ax}{1-ax}$; $\therefore\ \dfrac{1+bx}{1-bx}=\dfrac{1+2ax+a^2x^2}{1-2ax+a^2x^2}.$

সুতরাং, 'যোগ ও ভাগ'-প্রক্রিয়া দ্বারা, $\dfrac{1}{bx}=\dfrac{1+a^2x^2}{2ax};$

$$\therefore\ b(1+a^2x^2)=2a, \quad \text{অথবা,} \quad a^2x^2=\frac{2a}{b}-1;$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{2a}{b}-1}.$$

উদা. 3. $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ হইলে, $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}$ এর মান নির্ণয় কর।

[এলাহাবাদ, 1892]

প্রদত্ত সর্তানুসারে, $\dfrac{x}{2a}=\dfrac{2b}{a+b}$, এবং $\dfrac{x}{2b}=\dfrac{2a}{a+b}.$

অতএব, 'যোগ ও ভাগ'-প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{x+2a}{x-2a}=\frac{a+3b}{b-a}, \quad \text{এবং} \quad \frac{x+2b}{x-2b}=\frac{3a+b}{a-b}.$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= \frac{-(a+3b)}{a-b} + \frac{3a+b}{a-b}$

$$= \frac{2(a-b)}{a-b} = 2.$$

টীকা। অনুরূপে সমাধানের জন্য 149 নিয়মের উদা. 2 দেখ।

উদা. 4. $(a+b+c+d)(a-b-c+d) = (a-b+c-d)(a+b-c-d)$ হইলে, দেখাও যে, $a : b :: c : d$.

প্রদত্ত সম্বন্ধানুসারে, $\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d} = \frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$.

অতএব, 'যোগ ও ভাগ'-প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d};$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$ [একান্তরকরণ-প্রক্রিয়া দ্বারা]

এখন, দ্বিতীয়বার 'যোগ ও ভাগ'-প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

উদা. 5. $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$ হইলে,

দেখাও যে, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$ হইবে।

প্রদত্ত সম্বন্ধ হইতে, 'যোগ ও ভাগ'-প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}};$$

$$\therefore \quad \frac{m+1}{m-1} = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1}.$$

অতএব, 'যোগ ও ভাগ'-প্রক্রিয়া দ্বিতীয়বার প্রয়োগ দ্বারা,

$$\frac{m}{1} = \frac{x^3+3x}{3x^2+1};$$

$$\therefore \quad m(3x^2+1) = x^3+3x.$$

সুতরাং, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0.$

প্রশ্নমালা 96

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{x-y}=5\\ 2x+3y=36\end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{3x-5y}{3x+5y}=\dfrac{1}{4}\\ 4x-9y=19\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{5x-7y}{5x+7y}=\dfrac{1}{7}\\ 3x-5y=18\end{array}\right\}$

4. $16\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^3=\dfrac{a+x}{a-x}.$
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1886]

5. $\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{3}.$

6. $\dfrac{\sqrt{36x+1}+\sqrt{36x}}{\sqrt{36x+1}-\sqrt{36x}}=9.$

7. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5}-\sqrt{5-x}}=5.$

8. $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-\{a-(a^2-ax)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+\{a-(a^2-ax)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}}=b.$

প্রমাণ কর যে (Prove that), $a:b::c:d$,

9. $(a+3b+2c+6d)(a-3b-2c+6d)$
$=(a-3b+2c-6d)(a+3b-2c-6d)$ হইলে।

10. $(2a+b+4c+2d)(2a-b-4c+2d)$
$=(2a-b+4c-2d)(2a+b-4c-2d)$ হইলে।

11. $x=\dfrac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হইলে, দেখাও যে, $3bx^2-4ax+3b=0.$

12. $x=\dfrac{2\sqrt{24}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ হইলে, $\dfrac{x+\sqrt{8}}{x-\sqrt{8}}+\dfrac{x+\sqrt{12}}{x-\sqrt{12}}$ এর মান নির্ণয় কর।

198. **একটি অত্যাবশ্যকীয় প্রতিজ্ঞা :** p, q, r, n যে কোন সংখ্যাই নির্দ্দেশ করুক না কেন, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহাদের প্রত্যেকে $=\left(\dfrac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ এর সমান।

মনে কর, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ এর প্রত্যেকে k এর সমান ; তাহা হইলে স্পষ্টতঃ, $a=bk$, $c=dk$ এবং $e=fk$ হইবে।

অতএব, $pa^n=p(bk)^n=pb^nk^n,$
$qc^n=q(dk)^n=qd^nk^n,$
এবং $re^n=r(fk)^n=rf^nk^n,$; $\therefore\ pa^n+qc^n+re^n=(pb^n+qd^n+rf^n).k^n$;

কাজেই, $k^n=\dfrac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}$.

সুতরাং, $k=\left(\dfrac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}$; অতএব, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

অনুসি.। p, q, r, n এর প্রত্যেককেই 1 বলিয়া ধরিলে, দেখা যায় যে,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}.$$

এইরূপে, p, q, r, n এর বিশেষ বিশেষ মানের জন্য অনুরূপ ফলসমূহ নির্ণয় করা যায়।

টীকা। উপরিউক্ত তিনটি সমান অনুপাতের বেলায় প্রতিপন্ন প্রতিজ্ঞাটিকে যে কোন সংখ্যক সমান অনুপাতের বেলায়ও, অনুরূপ যুক্তিসাহায্যে প্রমাণ করা যাইতে পারে। ছাত্রগণের পক্ষে, এইজাতীয় প্রশ্ন সমাধান করিবার সময়, উপরিলব্ধ ফলের প্রয়োগ না করিয়া, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই উপরিপ্রদর্শিত প্রণালী অনুসারে, ফলগুলি নির্ণয় করা উচিত। এই উদ্দেশ্যে নিম্নে কতকগুলি প্রশ্ন সন্নিবেশিত হইল।

প্রশ্নমালা 97

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, ইহাদের প্রত্যেকটি অনুপাত নিম্নলিখিত রাশিগুলির সমান (Prove that each of these ratios is equal to) :

1. $\dfrac{a-c+e}{b-d+f}$. 2. $\dfrac{a+3c-5e}{b+3d-5f}$. 3. $\dfrac{5a-7c-13e}{5b-7d-13f}$.

4. $\dfrac{ka+lc+me}{kb+ld+mf}$. 5. $\left(\dfrac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. 6. $\left(\dfrac{a^3-2c^3+3e^3}{b^3-2d^3+3f^3}\right)^{\frac{1}{3}}$.
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1875]

7. $\dfrac{\sqrt[3]{a^3+c^3+e^3}}{\sqrt[3]{b^3+d^3+f^3}}$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1882]

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, ইহাদের প্রত্যেকটি নিম্নলিখিত রাশিগুলির সমান (Prove that each of the ratios is equal to) :

8. $\left(\frac{a^{-1}+c^{-1}+e^{-1}+g^{-1}}{b^{-1}+d^{-1}+f^{-1}+h^{-1}}\right)^{-1}$. 9. $\sqrt[4]{\frac{a^4-2c^4+3e^4-4g^4}{b^4-2d^4+3f^4-4h^4}}$.

10. $\sqrt{\left(\frac{3a^{-2}-7c^{-2}-8e^{-2}+15g^{-2}}{3b^{-2}-7d^{-2}-8f^{-2}+15h^{-2}}\right)^{-1}}$.

199. বিবিধ উদাহরণমালা :

উদা. 1. $x:y::m^2:n^2$ এবং $m:n::\sqrt{p^2+x^2}:\sqrt{p^2-y^2}$ হইলে, দেখাও যে, $p^2:xy::x+y:x-y$.

এখন, $\frac{x}{y}=\frac{m^2}{n^2}=\frac{p^2+x^2}{p^2-y^2}$;

$\therefore$ $x(p^2-y^2)=y(p^2+x^2)$. [নিয়ম 191]

অতএব, $p^2(x-y)=xy(x+y)$;

$\therefore$ $\frac{p^2}{xy}=\frac{x+y}{x-y}$;

অর্থাৎ, $p^2:xy::x+y:x-y$.

উদা. 2. $a:b::c:d$ হইলে, দেখাও যে,

$ma+nc:mb+nd::(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}:(b^2+d^2)^{\frac{1}{2}}$. [কলিঃ, 1880]

যেহেতু $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\therefore$ $\frac{ma}{mb}=\frac{nc}{nd}$.

অতএব, প্রত্যেকটি $=\frac{ma+nc}{mb+nd}$. [নিয়ম 198]

আবার, যেহেতু $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

$\therefore$ $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$.

অতএব, প্রত্যেকটি $=\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$. [নিয়ম 198]

সুতরাং, $\dfrac{ma+nc}{mb+nd}=\dfrac{ma}{mb}=\dfrac{a}{b}$, ... (1)

এবং $\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$. ... ... (2)

অতএব, (1) এবং (2) হইতে,

$$\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2+d^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

উদা. 3. $\dfrac{x}{(b-c)(b+c-2a)}=\dfrac{y}{(c-a)(c+a-2b)}=\dfrac{z}{(a-b)(a+b-2c)}$ হইলে, $x+y+z$ এর মান নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889]

ধর, প্রদত্ত প্রত্যেকটি অনুপাত $=k$.

অতএব,
$$x=k(b-c)(b+c-2a)=k\{(b^2-c^2)-2a(b-c)\},$$
$$y=k(c-a)(c+a-2b)=k\{(c^2-a^2)-2b(c-a)\},$$
$$z=k(a-b)(a+b-2c)=k\{(a^2-b^2)-2c(a-b)\}.$$

সুতরাং,
$$x+y+z=k[\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}-2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}]$$
$$=0.$$

উদা. 4. $\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{bz-cy}{a}$ হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

ধর, প্রদত্ত প্রত্যেকটি অনুপাত $=k$.

অতএব,
$$(ay-bx)c=kc^2,$$
$$(cx-az)b=kb^2,$$
$$(bz-cy)a=ka^2.$$

সুতরাং, যোগ করিয়া, $k(a^2+b^2+c^2)=0$; $\therefore\ k=0$.

অতএব, $ay-bx=0$; $\therefore\ ay=bx$; $\therefore\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$. ... (1)

আবার, $cx-az=0$; $\therefore\ cx=az$; $\therefore\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}$. ... (2)

সুতরাং, (1) এবং (2) হইতে, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

উদা. 5. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ হইলে,

দেখাও যে, $(a-d)^2 = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2$.

প্রদত্ত সম্বন্ধানুসারে,

(i) $b^2 = ac$; (ii) $c^2 = bd$; (iii) $bc = ad$. [নিয়ম 191]

এখন, $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2$

$= (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ac) + (d^2 + b^2 - 2bd)$

$= 2(b^2 - ac) + 2(c^2 - bd) + a^2 + d^2 - 2bc$

$= a^2 + d^2 - 2bc$ [(i) এবং (ii) হইতে]

$= a^2 + d^2 - 2ad$ [(iii) হইতে]

$= (a-d)^2$.

উদা. 6. $a : b :: c : d$ হইলে,

দেখাও যে, $4(a+b)(c+d) = bd\left\{\frac{a+b}{b} + \frac{c+d}{d}\right\}^2$. [কলিঃ, 1874]

যেহেতু $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. [যৌগিক-ক্রিয়া]

অতএব, স্পষ্টতঃ, $\frac{a+b}{b} + \frac{c+d}{d} = \frac{2(a+b)}{b} = \frac{2(c+d)}{d}$.

সুতরাং, $\left\{\frac{a+b}{b} + \frac{c+d}{d}\right\}^2 = \frac{2(a+b)}{b} \times \frac{2(c+d)}{d}$

$= \frac{4(a+b)(c+d)}{bd}$.

$\therefore bd\left\{\frac{a+b}{b} + \frac{c+d}{d}\right\}^2 = 4(a+b)(c+d)$.

উদা. 7. $a : b :: p : q$ হইলে,

দেখাও যে, $a^2 + b^2 : \frac{a^3}{a+b} :: p^2 + q^2 : \frac{p^3}{p+q}$.

প্রদত্ত সম্বন্ধ হইতে,

$\frac{b}{a} = \frac{q}{p}$; এবং $\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{q^2}{p^2}$.

সুতরাং, (i) $\frac{a+b}{a} = \frac{p+q}{p}$. এবং (ii) $\frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{p^2+q^2}{p^2}$.

(i) এবং (ii) দ্বারা সূচিত অনুপাত দুইটিকে 'সংযুক্ত' করিয়া,

$$\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{a^3}=\frac{(p^2+q^2)(p+q)}{p^3},$$

অথবা, $$\frac{a^2+b^2}{\left(\frac{a^3}{a+b}\right)}=\frac{p^2+q^2}{\left(\frac{p^3}{p+q}\right)}.$$

অর্থাৎ, $a^2+b^2:\frac{a^3}{a+b}::p^2+q^2:\frac{p^3}{p+q}$.

উদা. ৪. $m:n::p:q$ হইলে,

প্রমাণ কর যে, $\frac{(m-n)(m-p)}{m}=(m+q)-(n+p)$. [কলিঃ, 1859]

এখন, $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$; $\therefore\ \frac{m-n}{n}=\frac{p-q}{q}$;

আবার, $\frac{m}{p}=\frac{n}{q}$; $\therefore\ \frac{m-p}{p}=\frac{n-q}{q}$.

সুতরাং, $\frac{(m-n)(m-p)}{np}=\frac{(p-q)(n-q)}{q^2}$,

অথবা, $\frac{(m-n)(m-p)}{mq}=\frac{(p-q)(n-q)}{q^2}$. [$\because\ np=mq$]

$$\therefore\ \frac{(m-n)(m-p)}{m}=\frac{pn-q(n+p)+q^2}{q}$$

$$=\frac{mq+q^2-q(n+p)}{q}\qquad [\because\ pn=mq]$$

$$=(m+q)-(n+p).$$

উদা. 9. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হইলে,

দেখাও যে, $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1887]

ধর, প্রদত্ত প্রত্যেকটি অনুপাত $=k$.

$$\left.\begin{aligned}k^2b^2&=a^2\\k^2c^2&=b^2\\k^2d^2&=c^2\end{aligned}\right\}.\qquad \therefore\ k^2(b^2+c^2+d^2)=a^2+b^2+c^2;$$

$$\therefore\ k^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+c^2+d^2};\quad\cdots\quad(1)$$

আবার, $\left.\begin{aligned} kb=a\ ;\ \therefore\ kb^2=ab \\ kc=b\ ;\ \therefore\ kc^2=bc \\ kd=c\ ;\ \therefore\ kd^2=cd \end{aligned}\right\}$ $\quad \therefore\ k(b^2+c^2+d^2)=ab+bc+cd\ ;$

$$\therefore\ k=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}. \quad \cdots \quad (2)$$

অতএব, (1) এবং (2) হইতে k^2 এর মান বসাইয়া,

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+c^2+d^2}=\frac{(ab+bc+cd)^2}{(b^2+c^2+d^2)^2}.$$

$$\therefore\ (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2.$$

উদা. 10. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ হইলে,

দেখাও যে, $\sqrt{(a+c+e)(b+d+f)}=(ab)^{\frac{1}{2}}+(cd)^{\frac{1}{2}}+(ef)^{\frac{1}{2}}$.

ধর, প্রদত্ত প্রত্যেকটি অনুপাত $=k$.

অতএব, $\left.\begin{aligned} a=bk \\ c=dk \\ e=fk \end{aligned}\right\}$ $\quad \therefore\ a+c+e=k(b+d+f)$,

$$\therefore\ (a+c+e)(b+d+f)=k(b+d+f)^2\ ;$$

$$\therefore\ \sqrt{(a+c+e)(b+d+f)}=(b+d+f)\sqrt{k}. \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, $\left.\begin{aligned} ab=b^2k\ ;\quad \therefore\ (ab)^{\frac{1}{2}}=b\sqrt{k} \\ cd=d^2k\ ;\quad \therefore\ (cd)^{\frac{1}{2}}=d\sqrt{k} \\ ef=f^2k\ ;\quad \therefore\ (ef)^{\frac{1}{2}}=f\sqrt{k} \end{aligned}\right\}$

$$\therefore\ (ab)^{\frac{1}{2}}+(cd)^{\frac{1}{2}}+(ef)^{\frac{1}{2}}=(b+d+f)\sqrt{k}. \quad \cdots \quad (2)$$

সুতরাং, (1) এবং (2) হইতে,

$$\sqrt{(a+c+e)(b+d+f)}=(ab)^{\frac{1}{2}}+(cd)^{\frac{1}{2}}+(ef)^{\frac{1}{2}}.$$

প্রশ্নমালা 98

a, b, c, d এর মধ্যে, a বৃহত্তম এবং $a:b::c:d$ হইলে, দেখাও যে (Show that) :

1. b এবং c প্রত্যেকটি $> d$.
2. $a-b > c-d$.
3. $a+d > b+c$.

$a : b :: c : d$ হইলে, দেখাও যে (Show that) :

4. $ma+nb : b :: mc+nd : d.$

5. $ma+nb : mc+nd :: pa-qb : pc-qd.$

6. $a : b :: a+c : b+d.$

7. $a^2 : b^2 :: a^2+c^2 : b^2+d^2.$

8. $a^2+c^2 : b^2+d^2 :: ac : bd.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1877]

9. $(a-c)^2 : (b-d)^2 = a^2 : b^2.$

10. $(a+c)^3 : (b+d)^3 = a(a-c)^2 : b(b-d)^2.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1888]

11. $a^2+b^2 : a^2-b^2 = ac+bd : ac-bd.$

12. $a(a+c) : c^2 :: b(b+d) : d^2.$

13. $c : d = \sqrt{a^2+c^2} : \sqrt{b^2+d^2}.$

14. $a+b : c+d = \sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{c^2+d^2}.$

15. $a+b : c+d :: \sqrt{3a^2+5b^2} : \sqrt{3c^2+5d^2}.$

16. $a^2+ab+b^2 : a^2-ab+b^2 :: c^2+cd+d^2 : c^2-cd+d^2.$

17. $a^2+ac+c^2 : a^2-ac+c^2 :: b^2+bd+d^2 : b^2-bd+d^2.$

$a : b = c : d = e : f$ হইলে, দেখাও যে (Show that) :

18. $\dfrac{ma+nb}{mc+nd} = \dfrac{b^2c}{d^2a}.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1876]

19. $ac : bd :: 2a^2+3c^2+5e^2 : 2b^2+3d^2+5f^2.$

20. $a^2+c^2+e^2 : b^2+d^2+f^2 :: ce : df.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1876]

21. $pa+qc+re : pb+qd+rf :: \sqrt[3]{ace} : \sqrt[3]{bdf}.$

22. $a^2 : b^2 :: ac+ce+ae : bd+df+bf.$

23. $a^3+c^3+e^3 : b^3+d^3+f^3 :: ace : bdf.$

24. $\sqrt{a^3c^3+c^3e^3+a^3e^3} : \sqrt{b^3d^3+d^3f^3+b^3}$ [illegible] $ce : bdf.$

25. a, b, c, d, e রাশিগুলি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে,

দেখাও যে, $a : e :: a^4 : b^4.$

26. $\dfrac{x}{b+c-a} = \dfrac{y}{c+a-b} = \dfrac{z}{a+b-c}$ হইলে,

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$ এর মান নির্ণয় কর। [কলিঃ, 1878]

27. $a : b :: c : d$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$a^2+c^2 : b^2+d^2 :: \sqrt{a^4+c^4} : \sqrt{b^4+d^4}.$$

28. $a : b = c : d = e : f$ হইলে, দেখাও যে,

$$27(a+b)(c+d)(e+f) = bdf\left(\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}+\frac{e+f}{f}\right)^3.$$

29. $a : b :: c : d$ হইলে, দেখাও যে, $ad+bc : 2bd :: a^2+c^2 : ab+cd.$

30. $a : b :: c : d$ হইলে, দেখাও যে,

$$a^2+b^2 : ab+ad-bc :: c^2+d^2 : cd-ad+bc.$$

$a : b :: b : c$ হইলে, দেখাও যে (Show that) :

31. $a^2+ab+b^2 : b^2+bc+c^2 = a : c.$

32. $a-2b+c = \dfrac{(a-b)^2}{a} = \dfrac{(b-c)^2}{c}.$

33. $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3.$

$a : b = b : c = c : d$ হইলে, দেখাও যে (Show that) :

34. $(b+c)(b+d) = (c+a)(c+d).$

35. $(a+d)(b+c)-(a+c)(b+d) = (b-c)^2.$

36. $\left(\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{a-c}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{d-b}{c}+\dfrac{d-c}{b}\right)^2 = (a-d)^2\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}\right).$

37. $a : b = \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d} : \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}.$

38. $a : d :: a^3+b^3+c^3 : b^3+c^3+d^3.$

39. $a : b :: c : d$ হইলে, দেখাও যে,

$$a^2+ab : c^2+cd :: b^2-2ab : d^2-2cd.$$

40. $a : b = c : d = e : f$ হইলে, দেখাও যে,

$$(a^2+b^2)(ce+df)^2 = (c^2+d^2)(ae+bf)^2 = (e^2+f^2)(ac+bd)^2.$$

অষ্টাবিংশ অধ্যায়

সূচক-নিয়মাবলী (Laws of Indices)

200. পূর্ব্বে [19 ও 49 নিয়মে] **সূচক** কাহাকে বলে, তাহা শিখিয়াছ; এবং উক্ত সূচকসমূহ অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে, উহাদের ব্যবহারের নিয়মাবলীর সহিতও পরিচিত হইয়াছ।

কিন্তু সূচকসমূহ অখণ্ড ধনসংখ্যা ভিন্ন অন্য যে কোন সংখ্যা হইলে, উহাদের অর্থ কি, কিরূপেই বা উহাদিগকে ব্যবহার করা হয়, এবং কি প্রকারে উহাদের নিয়মাবলী প্রতিপন্ন করা হয়, তাহা এই ক্ষুদ্র পুস্তকে বিশদভাবে আলোচনা করা যায় না। জিজ্ঞাসু ছাত্রগণ উচ্চতর বীজগণিতে ইহার আলোচনা দেখিতে পাইবে।

বর্ত্তমানে উহাদের সংজ্ঞা এবং উহাদের নিয়মাবলী ধরিয়া লইয়া, উহাদের ব্যবহার শিখান হইবে। মনে রাখিবে যে, পরবর্ত্তী নিয়মগুলিতে **সূচকের মূল-তথ্য (Theory of Indices)** আলোচিত হইবে না; ঐ তথ্য-জাত নিয়মাবলীর ব্যবহারই শুধু প্রদত্ত হইবে।

201. নিয়ম 19 ও 49 এ দেখিয়াছ যে, m ও n যে কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা এবং 'a' (শূন্য ভিন্ন) যে কোন রাশি হইলে,

$a^m = a.a.a.a.......m$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত;

অর্থাৎ, m-সংখ্যক 'a' এর ধারাবাহিক গুণফল বুঝায়।

তদ্রূপ,

$a^n = a.a.a.......n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত;

$= n$-সংখ্যক 'a' এর ধারাবাহিক গুণফল।

এই সংজ্ঞা হইতে স্পষ্টতঃ

(i) $a^m \times a^n = (a.a.a.a......m$-সংখ্যক উৎপাদক)

$\times (a.a.a.......n$-সংখ্যক উৎপাদক)

$= a.a.a.a.a.a.a.......(m+n)$-সংখ্যক উৎপাদক

$= a^{m+n}$.

(ii) তদ্রূপ, $p, q, r, s,...$ প্রভৃতির প্রত্যেকটি একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে, এবং 'a' (শূন্য ভিন্ন) যে কোন রাশি হইলে,

$$a^p \times a^q \times a^r = a^{p+q}.a^r = a^{p+q+r}.$$

এইপ্রকার, $a^p \times a^q \times a^r \times a^s \times \cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$= a^{p+q+r+s+\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত}} \cdots\cdots (A)$

উপরিউক্ত ক্ষেত্রে, p, q, r, s প্রভৃতি যে কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা বুঝাইলেই, A-সূত্রটি বজায় থাকিবে। সুতরাং, $p = q = r = s = \cdots$ প্রত্যেকে 'm' এর সমান হইলেও, A-সূত্রটির সমতা রক্ষিত হইবে।

অতএব, $a^m \times a^m \times a^m \times \cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$= a^{m+m+m+\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত}}$।

অর্থাৎ, $(a^m)^n = a^{mn}$.

(iii) আবার, $a^m = a^{m-n+n}$ [m ও n উভয়ই অখণ্ড ধনসংখ্যা এবং $m > n$]

$= a^{m-n}.a^n$.

$\therefore \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$. [উভয় পক্ষকে a^n দ্বারা ভাগ করিয়া]

(iv) 'a' ও 'b' উভয়ই (শূন্য ভিন্ন) যে কোন দুই রাশি বুঝাইলে এবং m যে কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা সূচিত করিলে,

$(ab)^m = (ab).(ab).(ab)\ldots\ldots m$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$= (a.a.a\ldots\ldots m$-সংখ্যক উৎপাদক)

$\times (b.b.b\ldots\ldots m$-সংখ্যক উৎপাদক)

$= a^m.\ b^m = a^m b^m$.

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}\cdots\cdots m$-সংখ্যক উৎপাদক

$$= \frac{a.a.a\ldots m\text{-সংখ্যক উৎপাদক}}{b.b.b\ldots m\text{-সংখ্যক উৎপাদক}} = \frac{a^m}{b^m}.$$

মন্তব্য। $a = 0$ হইলে, a^m অর্থহীন হইয়া পড়ে। সেইজন্য উপরিউক্ত নিয়মগুলিতে a, b প্রভৃতির মান শূন্য ভিন্ন যে কোন সংখ্যা ধরা হইয়াছে।

202. নিয়ম 201 এ উল্লিখিত সূচকগুলিকে অখণ্ড ধনসংখ্যা বলিয়া ধরা হইয়াছে। ঐ সূচকগুলি **অখণ্ড ধনসংখ্যা ভিন্ন,** অন্য যে কোন সংখ্যা সূচিত করিলে, কোন সংখ্যার উপরিউক্তরূপ "শক্তি" ও "সূচক"-এর সংজ্ঞা অর্থহীন হইয়া পড়ে।

উদাহরণস্বরূপ, $m=-3$ হইলে, $a^m = a^{-3} = a.a.a.a\ldots(-3)$-সংখ্যক উৎপাদক ;

অর্থাৎ, $=$ '-3'-সংখ্যক 'a' এর ধারাবাহিক গুণফল, যাহা **সম্পূর্ণ অর্থহীন**।

আবার, $m=\frac{3}{4}$ হইলে, $a^m = a^{\frac{3}{4}} = a.a.a\ldots\frac{3}{4}$-সংখ্যক উৎপাদক ;

অর্থাৎ, $=$ '$\frac{3}{4}$'-সংখ্যক 'a' এর ধারাবাহিক গুণফল, যাহা **সম্পূর্ণ অর্থহীন**।

তদ্রূপ, $m=-\frac{5}{6}$ হইলেও, a^m অর্থহীন।

$m=0$ হইলে, $a^m = a^0 = a.a.\ldots.0$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত, যাহা **সম্পূর্ণ অর্থহীন**।

সুতরাং, দেখা যায় যে, সূচক যদি অখণ্ড ধনসংখ্যা ভিন্ন অন্য কোন মানবিশিষ্ট হয়, তবে পূর্ব্বপ্রদত্ত সংজ্ঞা অনুসারে, তৎসংশ্লিষ্ট "শক্তি"র কোন অর্থই হয় না। অতএব, এই সকল ক্ষেত্রে, আমাদিগকে নূতন সংজ্ঞার প্রবর্ত্তন করিতে হইবে।

সংজ্ঞা : m, অখণ্ড ধনসংখ্যা ভিন্ন অন্য কোন মানবিশিষ্ট হইলে, a^m এর সংজ্ঞা নিম্নে প্রদত্ত হইল।

(i) $m=\frac{p}{q}$ হইলে, $\left[\, p\right.$ ও q উভয়ই অখণ্ড ধনসংখ্যা এবং $\frac{p}{q}$ একটি ভগ্নাংশ $\left.\right]$;

a^m, অর্থাৎ, $a^{\frac{p}{q}}$ কে এরূপ একটি সংখ্যা বলা হয়, যাহার মান **q-তম শক্তির মান** a^p হইবে।

অর্থাৎ, $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p.$

ইহা হইতেই যেহেতু, 'q' একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা, $a^{\frac{p}{q}} = a^p$ এর q-তম মূল।

সুতরাং, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. [p ও q উভয়ই অখণ্ড ধনসংখ্যা]

টীকা। $p=1$ হইলে, $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} = a$-এর q-তম মূল।

$p=1$ এবং $q=2$ হইলে, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a} = a$ এর বর্গমূল ;

$p=1$ এবং $q=3$ হইলে, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} = a$ এর ঘনমূল ; ইত্যাদি।

(ii) $m=-n$ হইলে, [n যে কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা] এবং $a \neq 0$ হইলে,

a^m, অর্থাৎ, $a^{-n} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\ldots\ldots n$-সংখ্যক উৎপাদকের ধারাবাহিক গুণফল বুঝায়।

অতএব, $a^{-n}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}$ ......n-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$$=\frac{1.1.1\text{......}n\text{-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত}}{a.a.a\text{.......}n\text{-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত}}$$

$$=\frac{1}{a^n}.$$

$n=1$ হইলে, $a^{-1}=\frac{1}{a}$.

কাজেই, $a^{-n}=a^{-1}.\,a^{-1}.\,a^{-1}$.......$n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$$=(a^{-1})^n.$$

(iii) $m=-\frac{p}{q}$ এবং a যে কোন ধনরাশি হইলে, [p ও q উভয়ই অখণ্ড ধনসংখ্যা এবং $\frac{p}{q}$ একটি ভগ্নাংশ]

a^m, অর্থাৎ, $a^{-\frac{p}{q}}$ এর মান $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$ দ্বারা ব্যক্ত করা হয়।

অর্থাৎ, $a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}=\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$.

টীকা। a যে কোন ঋণরাশি বুঝাইলে, $a^{\frac{p}{q}}$ বা $a^{-\frac{p}{q}}$ এর সংজ্ঞা কি তাহা এখানে দেওয়া হইল না ; কারণ, এই ক্ষেত্রে এক নূতনজাতীয় সংখ্যার কল্পনা করিতে হয়, যাহার আলোচনা এই পুস্তকের বিষয়বস্তুর বহির্ভূত।

202A. নিয়ম 201 ও 202 এ উল্লিখিত সংজ্ঞাসমূহ হইতে দেখা যায় যে, আমরা নিম্নলিখিত ক্ষেত্র কয়টির বেলায় **a^m এর সংজ্ঞা** বর্ণনা করিয়াছি। যথা,

(i) $m=$ একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা [$\neq 0$ (শূন্য ভিন্ন)], এবং 'a' (শূন্য ভিন্ন) যে কোন ধন বা ঋণসংখ্যা।

(ii) $m=$ একটি ধনভগ্নাংশ এবং a (শূন্য ভিন্ন) যে কোন ধনসংখ্যা।

(iii) m = একটি অখণ্ড ঋণসংখ্যা এবং a (শূন্য ভিন্ন) কোন ধন বা ঋণসংখ্যা।

(iv) m = একটি ঋণভগ্নাংশ এবং 'a' (শূন্য ভিন্ন) যে কোন ধনসংখ্যা।

উপরিউক্ত সংজ্ঞাগুলি হইতে সাধারণভাবে নিম্নলিখিত **সূচক নিয়মটি** প্রতিপন্ন করিতে পারা যায়। তবে নব শিক্ষার্থিগণের পক্ষে উহা কষ্টসাধ্য হইবে বলিয়া উচ্চতর বীজগণিতে উহা আলোচিত হইবে। বর্ত্তমানে **ঐ নিয়মটিই** শুধু সন্নিবেশিত করা হইল।

সূচক নিয়ম : m ও n (শূন্য ভিন্ন) যে কোন সংখ্যাই হউক না কেন, $a\ (\neq 0)$ যে কোন সংখ্যা হইলে $a^m . a^n = a^{m+n}$.

অনুসি.। $a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^m . a^{-n} = a^{m-n}$.......[$m > n$]

এই নিয়মটির সাহায্যে এবং উপরিউক্তরূপ সংজ্ঞাগুলি হইতে অন্যান্য সূচক নিয়মগুলি প্রতিপন্ন করা যায়। সেইগুলি পরে দেওয়া হইল।

টীকা। পূর্ব্বে দেখান হইয়াছে যে অখণ্ড ধনসংখ্যক মানবিশিষ্ট সূচকের সংজ্ঞানুসারে a^0 এর কোন অর্থবোধক মান পাওয়া যায় না।

কাজেই, $a^0 = 1$, **এইটিকে ইহার সংজ্ঞারূপে ধরা হইয়া থাকে।**

উদা. 1. $8^{\frac{5}{3}}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$8^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32.$$

উদা. 2. $4^{-\frac{5}{2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$4^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{(\sqrt[2]{4})^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

উদা. 3. গুণ কর :

$$\sqrt{a^5},\ a^{\frac{3}{4}},\ \sqrt[4]{a^{-5}} \text{ এবং } \frac{1}{a^{-3}}.$$

$$\text{নির্ণেয় গুণফল} = a^{\frac{5}{2}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{-\frac{5}{4}} \times a^3$$

$$= a^{\frac{5}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}+3}$$

$$= a^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+3} = a^{2+3} = a^5.$$

প্রশ্নমালা 99

ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক সূচকবিশিষ্ট আকার বর্জন করিয়া নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে প্রকাশ কর (Express the following avoiding fractional or negative indices) :

1. $a^{\frac{5}{7}}$.
2. $x^{-\frac{3}{2}}$.
3. $\dfrac{3}{x^{-\frac{4}{5}}}$.
4. $x^{-\frac{2}{5}} \times 3a^{-\frac{1}{2}}$.
5. $8m^{-2} \times m^{-\frac{2}{3}}$.
6. $x^{-\frac{4}{5}} \div 3a^{-\frac{5}{4}}$.
7. $x^{-\frac{2}{3}} \div 2x^{-\frac{1}{2}}$.
8. $\sqrt[5]{x^2} \div \sqrt[5]{x^{-a}}$.
9. $\sqrt[2m]{a^{-5}} \times \sqrt[m]{a^8}$.
10. $\sqrt[4a]{x^6} \div \sqrt[2a]{x^{-5}}$.

মূল-চিহ্ন, অথবা ঋণাত্মক সূচকবিশিষ্ট আকার বর্জন করিয়া নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে প্রকাশ কর (Express the following avoiding radical signs and negative indices) :

11. $(\sqrt[3]{x})^7$.
12. $(\sqrt[4]{a})^{-6}$.
13. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^{-2}}}$.
14. $\dfrac{1}{(\sqrt[5]{a})^{-2}}$.
15. $\sqrt[3]{x^4} \div (\sqrt[6]{x})^{-1}$.
16. $\sqrt[4]{a^{-3}} \div (\sqrt[8]{a})^{-12}$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

17. $4^{-\frac{3}{2}}$.
18. $8^{\frac{2}{3}}$.
19. $9^{\frac{3}{2}}$.
20. $16^{\frac{5}{4}}$.
21. $81^{-\frac{3}{4}}$.
22. $\dfrac{1}{6^{-2}}$.
23. $(125)^{-\frac{2}{3}}$.
24. $(\frac{1}{27})^{-\frac{4}{3}}$.
25. $(\frac{1}{216})^{-\frac{2}{3}}$.
26. সরল কর : $\dfrac{x^{m+2n}x^{3m-8n}}{x^{5m-6n}}$.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1874]

203. প্রমাণ করিতে হইবে যে, m এবং n এর যে কোন মানের জন্যই, $(a^m)^n = a^{mn}$ হইবে।

(i) ধর, n একটি অখণ্ড ধনরাশি। তাহা হইলে m যে কোন রাশিই হউক না কেন, সকল ক্ষেত্রেই

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots\cdots n\text{-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}$$
$$= a^{m+m+m+\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}}$$
$$= a^{mn}.$$

(ii) ধর, n একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ, যাহা $\frac{p}{q}$ এর সমান ; এবং p ও q এর প্রত্যেকটি অখণ্ড ধনরাশি। তাহা হইলে,

$$(a^m)^n = (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p}$$ [নিয়ম 202, (i)]

$$= \sqrt[q]{a^{mp}}$$ [(i) হইতে]

$$= a^{\frac{mp}{q}}$$ [নিয়ম 202, (i)]

$$= a^{mn}.$$

(iii) ধর, n একটি ঋণাত্মক রাশি, যাহা $-p$ এর সমান ; এবং p একটি ধনাত্মক রাশি। তাহা হইলে,

$$(a^m)^n = (a^m)^{-p} = \frac{1}{(a^m)^p}$$ [নিয়ম 202, (iii)]

$$= \frac{1}{a^{mp}}$$ [(i) এবং (ii) হইতে]

$$= a^{-mp}$$ [নিয়ম 202, (iii)]

$$= a^{m(-p)} = a^{mn}.$$

সুতরাং, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

204. n যে কোন রাশিই হউক না কেন, প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a^nb^n = (ab)^n$.

(i) ধর, n একটি অখণ্ড ধনরাশি। তাহা হইলে,

$a^nb^n = (a.a.a..........n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত)

$\times (b.b.b............n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত)

$= (ab.ab.ab..........n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত)

$= (ab)^n$.

(ii) ধর, n একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ, যাহা $\frac{p}{q}$ এর সমান ; এবং p এবং q প্রত্যেকে একটি অখণ্ড ধনরাশি। তাহা হইলে a^nb^n এর পরিবর্ত্তে x বসাইয়া,

$$x = a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}; \quad \therefore \; x^q = \left(a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}\right)^q$$

$$= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q \times \left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q$$ [(i) হইতে]

$$= a^p \times b^p$$ [নিয়ম 201, অনুসি. 2]

$$= (ab)^p ;$$ [(i) হইতে]

$$\therefore \; x = (ab)^{\frac{p}{q}};$$ সুতরাং, $a^nb^n = (ab)^n$.

(iii) ধর, n একটি ঋণাত্মক রাশি, যাহা $-p$ এর সমান, এবং p একটি ধনাত্মক রাশি। তাহা হইলে,

$$a^nb^n = a^{-p}b^{-p}$$

$$= \frac{1}{a^pb^p} \qquad [\text{ নিয়ম 202, (iii) }]$$

$$= \frac{1}{(ab)^p} \qquad [\text{ (i) এবং (ii) হইতে }]$$

$$= (ab)^{-p} \qquad [\text{ নিয়ম 202, (iii) }]$$

$$= (ab)^n.$$

অতএব, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

অনুসি. 1. $\frac{a^n}{b^n} = a^nb^{-n} = a^n\left(b^{-1}\right)^n = \left(ab^{-1}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$

অনুসি. 2. $a^nb^nc^n = (ab)^nc^n = (abc)^n$;

সাধারণভাবে, $a^nb^nc^nd^n\cdots\cdots = (abcd\cdots\cdots)^n.$

205. পূর্ববর্তী নিয়ম দুইটিতে প্রতিপন্ন প্রতিজ্ঞা-দ্বয়ের প্রয়োগ :

উদা. 1. সরল কর : $\left(a^8b^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

$$\left(a^8b^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(a^8\right)^{-\frac{3}{4}} \times \left(b^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$= a^{8\times(-\frac{3}{4})} \times b^{\frac{5}{3}\times(-\frac{3}{4})} = a^{-6}b^{-\frac{5}{4}}.$$

উদা. 2. সরল কর : $\sqrt{a^{-2}b} \times \sqrt[3]{ab^{-3}}$.

$$\sqrt{a^{-2}b} = (a^{-2}b)^{\frac{1}{2}} = (a^{-2})^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = a^{-1}b^{\frac{1}{2}}\ ;$$

এবং $\sqrt[3]{ab^{-3}} = (ab^{-3})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \times (b^{-3})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}b^{-1}$.

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $= a^{-1}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}b^{-1} = a^{-1+\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{2}-1} = a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}.$

উদা. 3. সরল কর : $\sqrt{a^3b^{-\frac{2}{3}}c^{-\frac{7}{6}}} + \sqrt[3]{a^4b^{-1}c^{\frac{5}{4}}}$.

$$\sqrt{a^3b^{-\frac{2}{3}}c^{-\frac{7}{6}}} = \left(a^3b^{-\frac{2}{3}}c^{-\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^3\right)^{\frac{1}{2}}\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^{-\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{7}{12}}\ ;$$

এবং $\sqrt[3]{a^4b^{-1}c^{\frac{5}{4}}} = \left(a^4b^{-1}c^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^4\right)^{\frac{1}{3}}\left(b^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\left(c^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{12}}.$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $= a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{7}{12}} \div a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{12}}$

$$= a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{7}{12}} \times a^{-\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{5}{12}} = a^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}c^{-\frac{7}{12}-\frac{5}{12}}$$

$$= a^{\frac{1}{6}}b^{0}c^{-1} = a^{\frac{1}{6}}c^{-1}.$$

প্রশ্নমালা 100

সরল কর (Simplify) :

1. $\left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^{8}$. 2. $\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{3}{4}}$. 3. $\left(a^{-\frac{1}{2}}b^{-3}\right)^{-2}$. 4. $\left(a^{6}b^{\frac{5}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}}$.

5. $\left(\sqrt[3]{a^{4}b^{3}}\right)^{6}$. 6. $\left(\sqrt[6]{x^{9}y^{-3}}\right)^{-3}$. 7. $\sqrt[3]{x^{2}.\sqrt[4]{x^{-3}}}$.

8. $\sqrt{a^{-3}b^{4}} \times \sqrt[4]{a^{2}b^{-8}}$. 9. $\sqrt[4]{x^{-2}\sqrt{y^{5}}} \times \sqrt{x.\sqrt[4]{y^{3}}}$.

10. $(8x^{3}+27a^{-3})^{\frac{2}{3}}$. 11. $(64x^{3}+27a^{-3})^{-\frac{2}{3}}$.

12. $\sqrt[3]{a^{6}b^{-2}c^{-4}} \times \sqrt[4]{a^{-6}b^{4}c^{8}}$. 13. $\sqrt{a^{-\frac{2}{3}}b^{4}c^{-\frac{1}{3}}} \div \sqrt[3]{a^{2}b^{4}c^{-1}}$.

14. $\sqrt{ab^{-2}c^{3}} \div \left(\sqrt[3]{a^{3}b^{2}c^{-3}}\right)^{-1}$. 15. $\left(\dfrac{a^{-1}b^{2}}{a^{2}b^{-4}}\right)^{7} \div \left(\dfrac{a^{3}b^{-5}}{a^{-2}b^{3}}\right)^{-5}$.

206. বিবিধ উদাহরণমালা :

উদা. 1. $a+b+c+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য ও ভাজকের প্রত্যেককে a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া প্রক্রিয়া আরম্ভ করা যাক :

$$\begin{array}{l|l|l}
a^{\frac{1}{3}}+\left(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right) & a+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+(b+c) & a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\left(2b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}\right) \\
 & \underline{a+a^{\frac{2}{3}}\left(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right)} & \quad +\left(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right) \\
 & \quad a^{\frac{2}{3}}\left(2b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}\right)+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+(b+c) & \\
 & \quad \underline{a^{\frac{2}{3}}\left(2b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}\right)+a^{\frac{1}{3}}\left(2b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{2}{3}}\right)} & \\
 & \qquad a^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)+(b+c) & \\
 & \qquad \underline{a^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)+(b+c)} &
\end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $= a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}$.

টীকা। গুণনে কিংবা ভাগে, এতৎসংশ্লিষ্ট রাশিগুলির প্রত্যেককে উহাদের অন্তর্গত যে কোন **একই** অক্ষরের ঊর্দ্ধক্রমিক বা অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া প্রক্রিয়া আরম্ভ করার পদ্ধতি উপেক্ষার বিষয় নহে। এইপ্রকারে সাজান, প্রত্যেক ক্ষেত্রে অপরিহার্য্য না হইলেও, এইরূপ করিলে প্রক্রিয়াটি পরিচ্ছন্নভাবে সম্পন্ন করা যায়।

উদা. 2. $x+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}$ কে $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}$ দ্বারা ভাগ কর।

$x^{\frac{1}{3}}$ এর পরিবর্ত্তে a, $y^{\frac{1}{6}}$ এর পরিবর্ত্তে b এবং $z^{\frac{1}{9}}$ এর পরিবর্ত্তে c বসাইয়া,

$$\begin{aligned}
&x+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}\\
&=a^3+b^3+c^3-3abc\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\
&=\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}\right)\left\{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(y^{\frac{1}{6}}\right)^2+\left(z^{\frac{1}{9}}\right)^2-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{3}}\right\}\\
&=\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{9}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{3}}\right).
\end{aligned}$$

সুতরাং, নির্ণেয় ভাগফল $=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{9}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{3}}$

$$=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}\right)+\left(y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}+z^{\frac{2}{9}}\right).$$

উদা. 3. $x^{2^n}+a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}$ কে $x^{2^{n-1}}-a^{2^{n-2}}x^{2^{n-2}}+a^{2^{n-1}}$ দ্বারা ভাগ কর।

ধর, $m=x^{2^{n-2}}$ এবং $n=a^{2^{n-2}}$.

অতএব, $m^2=\left(x^{2^{n-2}}\right)^2=x^{2\times 2^{n-2}}=x^{2^{n-1}}$,

এবং $m^4=\left(m^2\right)^2=\left(x^{2^{n-1}}\right)^2=x^{2\times 2^{n-1}}=x^{2^n}$.

এইরূপ, $n^2=a^{2^{n-1}}$ এবং $n^4=a^{2^n}$.

সুতরাং,
$$\begin{aligned}
&\frac{x^{2^n}+a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}}{x^{2^{n-1}}-a^{2^{n-2}}x^{2^{n-2}}+a^{2^{n-1}}}\\
&=\frac{m^4+m^2n^2+n^4}{m^2-mn+n^2}=\frac{(m^2+n^2)^2-m^2n^2}{m^2-mn+n^2}\\
&=\frac{(m^2+n^2+mn)(m^2+n^2-mn)}{m^2-mn+n^2}\\
&=m^2+mn+n^2\\
&=x^{2^{n-1}}+x^{2^{n-2}}a^{2^{n-2}}+a^{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

উদা. 4. $a^2 + 2b^2 + (a+2b)\sqrt{ab}$ এবং $a^2 - b^2 + (a-b)\sqrt{ab}$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$\text{প্রথম রাশি} = a^2 + a\sqrt{ab} + 2b\sqrt{ab} + 2b^2 = a^2 + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + 2b^2$$
$$= a^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) + 2b^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}} + 2b^{\frac{3}{2}}\right).$$

$$\text{দ্বিতীয় রাশি} = a^2 + a\sqrt{ab} - b\sqrt{ab} - b^2 = a^2 + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} - b^2$$
$$= a^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) - b^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right).$$

সুতরাং, যেহেতু $a^{\frac{3}{2}} + 2b^{\frac{3}{2}}$ এবং $a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}$ এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই,

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $= a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$

উদা. 5. সরল কর : $\dfrac{x + (xy^2)^{\frac{1}{3}} - (x^2y)^{\frac{1}{3}}}{x+y}.$

$$\text{প্রদত্ত লব} = x + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right);$$

$$\text{এবং প্রদত্ত হর} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}}\right) + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$$
$$= \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right).$$

$$\text{অতএব, প্রদত্ত রাশি} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}.$$

উদা. 6. দেখাও যে,

$$\frac{1}{1 + x^{m-n} + x^{m-p}} + \frac{1}{1 + x^{n-m} + x^{n-p}} + \frac{1}{1 + x^{p-m} + x^{p-n}} = 1.$$

$$\text{প্রথম পদ} = \frac{x^{-m}}{x^{-m}(1 + x^{m-n} + x^{m-p})} = \frac{x^{-m}}{x^{-m} + x^{-n} + x^{-p}};$$

$$\text{দ্বিতীয় পদ} = \frac{x^{-n}}{x^{-n}(1 + x^{n-m} + x^{n-p})} = \frac{x^{-n}}{x^{-n} + x^{-m} + x^{-p}};$$

$$\text{এবং তৃতীয় পদ} = \frac{x^{-p}}{x^{-p}(1 + x^{p-m} + x^{p-n})} = \frac{x^{-p}}{x^{-p} + x^{-m} + x^{-n}}.$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$= \frac{x^{-m}}{x^{-m} + x^{-n} + x^{-p}} + \frac{x^{-n}}{x^{-n} + x^{-m} + x^{-p}} + \frac{x^{-p}}{x^{-p} + x^{-m} + x^{-n}}$$
$$= \frac{x^{-m} + x^{-n} + x^{-p}}{x^{-m} + x^{-n} + x^{-p}} = 1.$$

উদা. 7. $a^b = b^a$ হইলে, দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$; অধিকন্তু, $a = 2b$ হইলে, দেখাও যে, $b = 2$.

যেহেতু $a^b = b^a$, $\therefore a = b^{\frac{a}{b}}$ [উভয় পক্ষের b-তম মূল নির্ণয় করিয়া]

অতএব, $$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{a} = a^{\frac{a}{b}-1}.$$

আবার, যেহেতু $a^b = b^a$,

অতএব, $a = 2b$ হইলে, $(2b)^b = (b)^{2b} = (b^2)^b$; $\therefore 2b = b^2$; $\therefore b = 2$.

উদা. 8. $x = \left(a + \sqrt{a^2+b^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(a - \sqrt{a^2+b^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $x^3 + 3bx - 2a = 0$.

$a + \sqrt{a^2+b^3}$ এর পরিবর্তে m এবং $a - \sqrt{a^2+b^3}$ এর পরিবর্তে n বসাইলে,

$$x^3 = \left(m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(m^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(n^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3m^{\frac{1}{3}}.n^{\frac{1}{3}}\left(m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}\right)$$
$$= m + n + 3(mn)^{\frac{1}{3}}.\left(m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}\right) = m + n + 3(mn)^{\frac{1}{3}}.x.$$

কিন্তু, $m + n = 2a$, এবং $(mn)^{\frac{1}{3}} = \{a^2 - (a^2+b^3)\}^{\frac{1}{3}} = (-b^3)^{\frac{1}{3}} = -b$;

$\therefore \quad x^3 = 2a - 3bx. \quad \therefore \; x^3 + 3bx - 2a = 0.$

প্রশ্নমালা 101

গুণ কর (Multiply) :

1. $x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{6}} + 1$ কে $x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + 1$ দ্বারা।
2. $a^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{2}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{3}} - 3b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।
3. $1 + ab^{-1} + a^2b^{-2}$ কে $1 - ab^{-1} + a^2b^{-2}$ দ্বারা।
4. $x + 2y^{\frac{1}{2}} + 3z^{\frac{1}{3}}$ কে $x - 2y^{\frac{1}{2}} + 3z^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।
5. $x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1}$ কে $x^{-1} - x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1}$ দ্বারা।
6. $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1 - a^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{3}} + 1 + a^{-\frac{1}{3}}$ দ্বারা।
7. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ কে $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

8. $a^m + 3b^n - 2c^p$ কে $a^m - 3b^n + 2c^p$ দ্বারা।

9. $a^{\frac{5}{2}} + 8ab + 4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}} + 2a^2b^{\frac{1}{3}} + 32b^{\frac{5}{3}} + 16a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

10. $a^{\frac{5}{8}} + a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{3}{8}} + x^{-\frac{5}{8}} + a^{\frac{3}{8}}x^{-\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{8}}x^{-\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{8}}$ কে
$a^{\frac{3}{8}} + a^{\frac{1}{8}}x^{-\frac{1}{4}} - x^{-\frac{3}{8}} - a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{8}}$ দ্বারা।

ভাগ কর (Divide) :

11. $x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 6x - x^2$ কে $x^{\frac{3}{2}} + 2 - 4x^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা।

12. $8 + 12x^{-1} + 2x^{-2} + 2x^{-4}$ কে $x^{-2} - 2x^{-1} + 4$ দ্বারা।

13. $xy^{-1} + 2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + 3 + 2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + x^{-1}y$ কে $x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1}$ দ্বারা।

14. $a^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{3}{2}}b + ab^{\frac{3}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}b^2 + b^{\frac{5}{2}}$ কে $a^{\frac{3}{2}} - ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b + b^{\frac{3}{2}}$ দ্বারা।

15. $8x^{-n} - 8x^n + 5x^{3n} - 3x^{-3n}$ কে $5x^n - 3x^{-n}$ দ্বারা।

16. $8x^{\frac{3}{2}} + y^{-\frac{3}{2}} - z + 6x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}$ কে $2x^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা।

17. দেখাও যে, $x^3 + a^3 + x^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{3}{8}}a^{\frac{3}{8}}$ দ্বারা বিভাজ্য।

18. গুণ কর : $x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}}$ কে $x^{2^{n-1}} - a^{2^{n-1}}$ দ্বারা।

19. ভাগ কর : $x^{2^n} - y^{2^n}$ কে $x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}$ দ্বারা। [কলিঃ, 1879]

20. সরল কর : $\left\{\left(a^m\right)^{m-\frac{1}{m}}\right\}^{\frac{1}{m+1}}$.

21. ভাগ কর : $2x^{-\frac{1}{4}} + 3x^{\frac{3}{4}} - 7x^{\frac{1}{4}} + x - 2x^{\frac{1}{2}}$ কে $x^{\frac{1}{4}} - 2x^{-\frac{1}{4}}$ দ্বারা।

22. $x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

23. ভাগ কর : $x^{\frac{3n}{2}} - a^{\frac{3n}{2}}$ কে $x^{\frac{n}{2}} - a^{\frac{n}{2}}$ দ্বারা।

24. $x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{6}}$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

25. ভাগ কর : $ax^{-1} + a^{-1}x + 2$ কে $a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} - 1$ দ্বারা।

সরল কর (Simplify) :

26. $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a-b}\right)^{-1}$;   27. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} + 3y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - 3y^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 9y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 9y^{\frac{2}{3}}}$.

সরল কর (Simplify) :

28. $$\frac{a^{\frac{3}{2}} - ax^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}x - x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} - a^2x^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{3}{2}}x - 3ax^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}}x^2 - x^{\frac{5}{2}}}.$$

29. $$\frac{a^2 + b^2 - a^{-2} - b^{-2}}{a^2b^2 - a^{-2}b^{-2}} + \frac{(a - a^{-1})(b - b^{-1})}{ab + a^{-1}b^{-1}}.$$

30. $$\frac{x - y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}} \div \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}.$$

31. $(a+b+c)(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}) - a^{-1}b^{-1}c^{-1}(b+c)(c+a)(a+b).$

32. $$\frac{a^{-1}(ab^{-1}-1)^2}{b^{-2}(1+a^{-1}b)} \times \frac{b^2(a^{-2}+b^{-2})}{a(ab^{-1}-a^{-1}b)} \div \frac{1-a^{-1}b}{ab^{-1}+1}.$$

33. $$\frac{x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}}{x - a}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}} + a^{\frac{1}{3}}\right) \div \frac{x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}}{x + a}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} - a^{\frac{1}{3}}\right).$$

34. $\dfrac{x^{3n}}{x^n - 1} - \dfrac{x^{2n}}{x^n + 1} - \dfrac{1}{x^n - 1} + \dfrac{1}{x^n + 1}$, যখন $x = \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$.

35. দেখাও যে, $\dfrac{x^{2^n} - y^{2^n}}{x - y} = (x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\left(x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}\right).$

36. প্রকৃত ভাগ না করিয়া নিম্নলিখিত রাশিটিকে সরল কর :

$$\left(\frac{x^{-8}}{256} - \frac{y^{-12}}{625}\right) \div \left(\tfrac{1}{4}x^{-2} + \tfrac{1}{5}y^{-3}\right).$$

37. সরল কর : $\dfrac{\left(p + \frac{1}{q}\right)^m \left(p - \frac{1}{q}\right)^m}{\left(q + \frac{1}{p}\right)^m \left(q - \frac{1}{p}\right)^m}.$ [বোম্বাই প্রবেশিকা, 1889]

38. সরল কর : $\dfrac{\left(p^2 - \frac{1}{q^2}\right)^p \left(p - \frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2 - \frac{1}{p^2}\right)^q \left(q + \frac{1}{p}\right)^{p-q}}.$ [বোম্বাই প্রবেশিকা, 1891]

39. সরল কর : $\left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l^2+lm+m^2} \times \left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m^2+mn+n^2} \times \left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n^2+nl+l^2}.$

[কলিঃ, 1904]

40. $x = a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 + 3x = a - \dfrac{1}{a}$ হইবে।

207. সূচকান্বিত সমীকরণ (Exponential Equations) : যে সমীকরণে এক বা একাধিক চল-রাশি সূচকরূপে বর্তমান থাকে, তাহাকে সূচকান্বিত সমীকরণ (Exponential equation) বলে।

যথা, $3^x = 27$, $81^x = 9^{x+4}$ প্রভৃতি সমীকরণগুলি সূচকান্বিত সমীকরণ; তদ্রূপ, $3^{x+y} = 9$ এবং $8^x . 16^y = 128$ সমীকরণদ্বয় এইজাতীয় সহ-সমীকরণ।

সূচকান্বিত সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধ দুইটির উপর নির্ভর করিতে হয় :

***a* এর মান (শূন্য ভিন্ন) যে কোন সংখ্যাই হউক না কেন, "$a^x = a^m$ হইলে, $x = m$ হইবে।"**

অতএব, কোন সূচকান্বিত সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে,

(i) সমীকরণের উভয় পক্ষকে কোন একই সংখ্যার শক্তিরূপে প্রকাশ করিতে হয়;

(ii) এবং তৎপর, উভয় পক্ষের সূচকগুলির সমতা নিষ্পন্ন করিতে হয়।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী ব্যাখ্যা করা যাইতেছে।

উদা. 1. সমাধান কর : $3.27^x = 9^{x+4}$.

বাম পক্ষ $= 3.27^x = 3.(3^3)^x = 3.3^{3x} = 3^{3x+1}$;

এবং ডা'ন পক্ষ $= 9^{x+4} = (3^2)^{x+4} = 3^{2(x+4)} = 3^{2x+8}$.

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নলিখিত সমীকরণে পরিণত হইল :—

$$3^{3x+1} = 3^{2x+8}.$$

$$\therefore\ 3x + 1 = 2x + 8 ; \qquad \therefore\ x = 7.$$

উদা. 2. সমাধান কর : $a^{-x}(a^x + b^{-x}) = \dfrac{a^2b^2 + 1}{a^2b^2}$.

সমীকরণটির উভয় পক্ষকে সরল করিয়া,

$$a^{-x}.a^x + a^{-x}.b^{-x} = 1 + \frac{1}{a^2b^2} ;$$

অথবা, $$1 + (ab)^{-x} = 1 + \frac{1}{a^2b^2} = 1 + a^{-2}b^{-2} = 1 + (ab)^{-2}.$$

সুতরাং, $$(ab)^{-x} = (ab)^{-2} ; \qquad \therefore\ x = 2.$$

উদা. 3. সমাধান কর : $a^x.a^{y+1} = a^7 \quad \cdots (1)$
এবং $a^{2y}.a^{3x+5} = a^{20} \quad \cdots (2)$ [কলিকাতা, 1879]

প্রথম সমীকরণ হইতে, $a^{x+(y+1)} = a^7$.

$$\therefore\ x + y + 1 = 7. \quad \cdots (3)$$

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে, $a^{2y+(3x+5)} = a^{20}$.

$$\therefore \quad 2y + 3x + 5 = 20. \qquad \cdots \quad (4)$$

এখন, (3) এবং (4) হইতে, $x + y - 6 = 0 \qquad \cdots \quad (5)$

$$3x + 2y - 15 = 0. \qquad \cdots \quad (6)$$

(5) হইতে, $y = 6 - x$; (6) তে y এর এই মান বসাইয়া,

$3x + 2(6 - x) - 15 = 0$; অথবা, $3x + 12 - 2x - 15 = 0$;

অথবা, $x - 3 = 0$; $\therefore x = 3$;

সুতরাং, $y = 6 - x = 6 - 3 = 3$; $\therefore x = 3$ এবং $y = 3$.

প্রশ্নমালা 102

সমাধান কর (Solve) :

1. $2^{x+7} = 4^{x+2}$.
2. $(\sqrt{3})^{x+5} = (\sqrt[3]{3})^{2x+5}$.
3. $(\sqrt[5]{4})^{4x+7} = (\sqrt[11]{64})^{2x+7}$.
4. $(\sqrt[3]{25})^{2x+1} = (\sqrt[5]{125})^{x+1}$.
5. $2^{x-4} = 4a^{x-6}, \, (a \neq 0)$.
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{cx-d} = \left(\frac{b}{a}\right)^{ax-b}$.
7. $2^{3x-5}.a^{x-2} = 2^{x-3}.2a^{1-x}$.
8. $\frac{3^{3x-4}.a^{2x-5}}{3^{x+1}} = a^{2x-5}$.
9. $a^{x-2}(a^{2x+2} + a^{1-x}) = a^{-3}(a^9 + a^2)$.
10. $2^{x+1} - 2^x - 8 = 0$.
11. $3^{x+5} = 3^{x+3} + \frac{8}{3}$.
12. $4^{x+2} = 2^{2x+1} + 14$.
13. $x^y = y^x$ এবং $x = 2y$.
14. $2^{x+1}.3^{y+2} = \frac{1}{6}$ এবং $2^{2x+1}.3^{3y+5} = \frac{1}{648}$.
15. $a^{x+1}.a^{y+2} = a^8$ এবং $a^{x+1}.a^{2(y+1)} = a^{11}$.
16. $a^{x-3}.a^{y+2} = a^2.a^x$ এবং $a^x.a^y = a^4$.
17. $a^{2x+1}.a^{3y+1} = a^3 = a^{x+1}.a^{y+1}$.
18. $2^{x+y} = 2^{2x-y} = \sqrt{8}$.
19. $2^x.3^y = 18$ এবং $2^{2x}.3^y = 36$.
20. $x^{2x+1} = 2y^x$ এবং $x^{y-4} = 1$.
21. $x^{y+na} = y^{x+nb}$ এবং $x^a = y^b$.
22. $a^{m^n} = (a^m)$ হইলে, m ও n এর সম্বন্ধ নির্ণয় কর। [পাটনা, 1918]

23. $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = a$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $xyz = 1$.

24. $a^x = m$, $a^y = n$ এবং $a^2 = (m^y n^x)^z$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $xyz = 1$.
[পাটনা প্রবেশিকা, 1919, '21]

25. $x = 3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $3x^3 - 9x - 10 = 0$.

26. $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $3a^3 + 9a = 8$.

27. $xy^{p-1} = a$, $xy^{q-1} = b$, $xy^{r-1} = c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$a^{q-r} . b^{r-p} . c^{p-q} = 1$. [পাটনা প্রবেশিকা, 1920]

উনত্রিংশ অধ্যায়

মূলাকর্ষণ-প্রক্রিয়া (Evolution) :
বর্গমূল (Square Root)-নির্ণয়

208. মূলাকর্ষণ (Evolution) : কোন সংখ্যার মূল নির্ণয় করার প্রণালীকে **'মূলাকর্ষণ'-প্রক্রিয়া** বলে।

অতএব, ইহা, **'শক্তি-উন্নয়ন'-প্রক্রিয়া** (Involution) এর, [অর্থাৎ, যে প্রক্রিয়া দ্বারা কোন সংখ্যাকে কোন নির্দ্দিষ্ট শক্তিতে উন্নীত করা হয়, তাহার] ঠিক বিপরীত।

209. বীজগণিতীয় মিশ্ররাশির বর্গমূল নির্ণয় করিবার সাধারণ নিয়ম : পূর্ব্ববর্ণিত সূত্রগুলি হইতে অতি সহজেই নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তসমূহে উপনীত হওয়া যায়। যথা,

$$(a+b)^2=a^2+(2a+b)b\ ;$$
$$(a+b+c)^2=a^2+(2a+b)b+(2a+2b+c)c\ ;$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+(2a+b)b+(2a+2b+c)c+(2a+2b+2c+d)d\ ;$$

ইত্যাদি, ইত্যাদি।

অতএব, পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইতেছে যে,

$$(ax^2+bx+c)^2=a^2x^4+(2ax^2+bx)bx+(2ax^2+2bx+c)c$$
$$=a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2.$$

[x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া]

এক্ষণে, এই শেষোক্ত রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে, কি উপায় অবলম্বন করিয়া নির্ণেয় বর্গমূলের বিভিন্ন পদগুলি ক্রমশঃ পাওয়া যায়, তাহা আলোচনা করা যাক :

বর্গমূলের প্রথম পদ, অর্থাৎ ax^2, স্পষ্টতঃ, প্রদত্ত রাশির প্রথম পদ a^2x^4 এর বর্গমূল।

প্রদত্ত রাশি হইতে a^2x^4 বিয়োগ করিয়া অবশিষ্ট $\{(2ax^2+bx)bx+(2ax^2+2bx+c)c\}$ পাওয়া যাইতেছে ; ইহাতে x এর সর্ব্বোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদ $=2ax^2\times bx$, অর্থাৎ, = (বর্গমূলের প্রথম পদের দ্বিগুণ) × (বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ)। অতএব, ইহা হইতে দেখা যায় যে, বর্গমূলের প্রথম পদ নির্ণীত হওয়ার পর উহার দ্বিতীয় পদও নির্ণয় করিতে পারা যায়।

এখন, উপরিউক্ত অবশিষ্ট হইতে $(2ax^2+bx)\times bx$ বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল, স্পষ্টই, $(2ax^2+2bx+c)c$; ইহাতে x এর সর্ব্বোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদ $=2ax^2\times c$, অর্থাৎ, = (বর্গমূলের প্রথম পদের দ্বিগুণ) × (বর্গমূলের তৃতীয় পদ)। কাজেই দেখা যাইতেছে যে, বর্গমূলের প্রথম পদ ও দ্বিতীয় পদ নির্ণয় করিবার পর উহার তৃতীয় পদও নিরূপণ করা যাইতে পারে।

অতএব দেখা যায় যে, ax^2+bx+c এর বর্গ দেওয়া থাকিলে, উক্ত রাশিমালার বিভিন্ন পদগুলিকে ঐ বর্গের অন্তর্গত পদসমূহ হইতে ক্রমশঃ নির্ণয় করিবার একটি উপায় নির্দ্ধারিত হইল।

প্রক্রিয়াটি নিম্নপ্রদর্শিতরূপে সম্পন্ন করা যায় :

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2 \;\big(\; ax^2+bx+c \\
 & a^2x^4 \\ \hline
2ax^2+bx & 2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2 \\
 & 2abx^3+b^2x^2 \\ \hline
2ax^2+2bx+c & 2acx^2+2bcx+c^2 \\
 & 2acx^2+2bcx+c^2 \\ \hline
\end{array}
$$

(1) প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের, অর্থাৎ, a^2x^4 এর, বর্গমূল বাহির করিয়া উহাকে নির্ণেয় বর্গমূলের **প্রথম পদ**রূপে লিখ ;

(2) প্রদত্ত রাশি হইতে a^2x^4 বাদ দিয়া, অবশিষ্ট $2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2$ নামাও ;

(3) বর্গমূলের প্রথম পদের দ্বিগুণ, অর্থাৎ, $2ax^2$ কে এই অবশিষ্টের বামদিকে, উহার ভাজকের একটি পদরূপে স্থাপন কর ;

(4) এখন, উপরিউক্ত অবশিষ্টের প্রথম পদ $2abx^3$ কে বর্গমূলের প্রথম পদ ax^2 এর দ্বিগুণ (অর্থাৎ, $2ax^2$) দ্বারা ভাগ করিয়া, লব্ধ ভাগফল bx কে নির্ণেয় বর্গমূলের **দ্বিতীয় পদ**রূপে, এবং উল্লিখিত ভাজকেরও দ্বিতীয় পদরূপে লিখ ;

(5) বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ (অর্থাৎ, bx) দ্বারা ভাজক, অর্থাৎ, $2ax^2+bx$ কে গুণ করিয়া, গুণফলটিকে প্রথম অবশিষ্ট (অর্থাৎ, উপরোল্লিখিত অবশিষ্ট) হইতে বিয়োগ কর ;

(6) এই দ্বিতীয় অবশিষ্টকে নামাইয়া, উহার বামে, বর্গমূলের নির্ণীত অংশের (অর্থাৎ, ax^2+bx এর) দ্বিগুণকে (নূতন) একটি ভাজকের অংশরূপে লিখিয়া রাখ ;

(7) উল্লিখিত দ্বিতীয় অবশিষ্টের প্রথম পদ $2acx^2$ কে, উপরিউক্ত নূতন ভাজকের প্রথম পদ $2ax^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া, লব্ধ ভাগফল c কে নির্ণেয় বর্গমূলের **তৃতীয় পদ**রূপে, এবং নূতন ভাজকেরও তৃতীয় পদরূপে লিখ ;

(৪) এখন, এই সম্পূর্ণ নূতন ভাজককে (অর্থাৎ, $2ax^2+2bx+c$ কে) বর্গমূলের তৃতীয় পদ c দ্বারা গুণ করিয়া, গুণফলটিকে দ্বিতীয় অবশিষ্ট হইতে বিয়োগ কর।

এক্ষণে, অবশিষ্ট আর কিছুই রহিল না। অতএব, ax^2+bx+c ই নির্ণেয় বর্গমূল হইল।

টীকা। উপরিউক্ত প্রক্রিয়াতে, প্রদত্ত রাশিটি x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারেই সাজান ছিল। তদ্রূপ, যে কোন রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে, প্রক্রিয়া আরম্ভ করিবার পূর্ব্বে, উহার পদগুলিকে উহার অন্তর্গত যে কোন একই অক্ষরের অধঃক্রমিক বা ঊর্দ্ধক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া লইতে হইবে।

উদা. 1. নিম্নলিখিত রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় কর :

$$x^6+8x^4-2x^3+16x^2-8x+1.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^6+8x^4-2x^3+16x^2-8x+1 \;\big(\, x^3+4x-1 \\
 & x^6 \\ \hline
2x^3+4x & 8x^4-2x^3+16x^2-8x+1 \\
 & 8x^4 \qquad\quad +16x^2 \\ \hline
2x^3+8x-1 & -2x^3 \qquad\qquad -8x+1 \\
 & -2x^3 \qquad\qquad -8x+1 \\ \hline
\end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=x^3+4x-1.$

উদা. 2. $x^4+2(y+z)x^3+(3y^2+2yz+3z^2)x^2$ $+2(y^3+y^2z+yz^2+z^3)x+y^4+2y^2z^2+z^4$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1888]

প্রদত্ত রশিমালা $=x^4+2(y+z)x^3+(3y^2+2yz+3z^2)x^2$
$+2(y+z)(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)^2$;

যেহেতু রাশিমালাটি x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজান রহিয়াছে, অতএব, অবিলম্বে প্রক্রিয়া আরম্ভ করা যাইতে পারে :

$$\begin{array}{l|l}
 & x^4+2(y+z)x^3+(3y^2+2yz+3z^2)x^2 +2(y+z)(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)^2 \;\big(\, x^2+(y+z)x+(y^2+z^2) \\
 & x^4 \\ \hline
2x^2+(y+z)x & 2(y+z)x^3+(3y^2+2yz+3z^2)x^2 \\
 & 2(y+z)x^3+(\;y^2+2yz+\;z^2)x^2 \\ \hline
2x^2+2(y+z)x+(y^2+z^2) & 2(y^2+z^2)x^2+2(y+z)(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)^2 \\
 & 2(y^2+z^2)x^2+2(y+z)(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)^2 \\ \hline
\end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=x^2+xy+xz+y^2+z^2.$

উদা. 3. নিম্নলিখিত রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় কর :

$$\frac{x^4}{4}+4x^2+\frac{ax^2}{3}+\frac{a^2}{9}-2x^3-\frac{4ax}{3}.$$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889]

প্রদত্ত রাশিমালাকে x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া প্রক্রিয়া আরম্ভ করিতে হইবে ; যথা,

$$\begin{array}{l|l}
 & \frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2+\frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9}\ \Big(\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3} \\
 & \frac{x^4}{4} \\ \hline
x^2-2x & -2x^3+4x^2 \\
 & -2x^3+4x^2 \\ \hline
x^2-4x+\frac{a}{3} & \frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9} \\
 & \frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9} \\ \hline
\end{array}$$

অতএব,

নির্ণেয় বর্গমূল $=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3}$.

উদা. 4. $\frac{x^4}{4y^4}+\frac{4y^4}{x^4}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{4y^2}{x^2}+3$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালাকে x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে, উহার নিম্নলিখিত রূপ হইবে :

$$\frac{x^4}{4y^4}+\frac{x^2}{y^2}+3+\frac{4y^2}{x^2}+\frac{4y^4}{x^4};$$

কারণ, ইহাতে বিভিন্ন পদান্তর্গত x এর বিভিন্ন শক্তির সূচকগুলি যথাক্রমে $4, 2, 0, -2$ ও -4 ; এবং স্পষ্টতঃ, উহারা ক্রমহ্রাসমান সংখ্যা। কাজেই, প্রক্রিয়া আরম্ভ করা যাইতে পারে :

$$\begin{array}{l|l}
 & \frac{x^4}{4y^4}+\frac{x^2}{y^2}+3+\frac{4y^2}{x^2}+\frac{4y^4}{x^4}\ \Big(\frac{x^2}{2y^2}+1+\frac{2y^2}{x^2} \\
 & \frac{x^4}{4y^4} \\ \hline
\frac{x^2}{y^2}+1 & \frac{x^2}{y^2}+3 \\
 & \frac{x^2}{y^2}+1 \\ \hline
\frac{x^2}{y^2}+2+\frac{2y^2}{x^2} & 2+\frac{4y^2}{x^2}+\frac{4y^4}{x^4} \\
 & 2+\frac{4y^2}{x^2}+\frac{4y^4}{x^4} \\ \hline
\end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=\frac{x^2}{2y^2}+1+\frac{2y^2}{x^2}$.

উদা. 5. $x^{\frac{8}{5}} - 2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}} + 2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}} + a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}} - 2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}} + a^{\frac{8}{5}}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1880]

প্রদত্ত রাশিমালাকে x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া প্রক্রিয়া আরম্ভ করা যাউক :

$$
\begin{array}{l|l}
 & a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}} - 2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}} + x^{\frac{8}{5}} - 2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}} + 2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}} + a^{\frac{8}{5}} \;\left(a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}} - x^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{4}{5}} \right. \\
 & a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}} \\
\hline
2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}} - x^{\frac{4}{5}} & - 2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}} + x^{\frac{8}{5}} \\
 & - 2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}} + x^{\frac{8}{5}} \\
\hline
2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}} - 2x^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{4}{5}} & - 2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}} + 2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}} + a^{\frac{8}{5}} \\
 & - 2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}} + 2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}} + a^{\frac{8}{5}} \\
\hline
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}} - x^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{4}{5}}$.

প্রশ্নমালা 103

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বর্গমূল নির্ণয় কর (Find the square root of) :

1. $4x^2z^2 + 12xyz + 9y^2$.
2. $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$.
3. $x^6 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1$.
4. $4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 24x + 16$.
5. $4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4$. [কলিঃ, 1870.]
6. $9x^4 - 2x^3y + \frac{163}{9}x^2y^2 - 2xy^3 + 9y^4$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1874]
7. $x^4 - 2x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$.
8. $\frac{1051x^2}{25} - \frac{6x}{5} - \frac{14x^3}{5} + 49x^4 + 9$.
9. $x^4 + \frac{4}{x^2} - 2 + 4x - x^3 + \frac{x^2}{4}$.
10. $\frac{a^2}{x^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^3}{x} - 2 - ax$.
11. $\frac{a^2}{4b^2} - \frac{a}{b} + \frac{4b^2}{a^2} - 1 + \frac{4b}{a}$.
12. $\frac{9a^2}{x^2} - \frac{6a}{5x} + \frac{101}{25} - \frac{4x}{15a} + \frac{4x^2}{9a^2}$.
13. $4x^4 - 8x^3y^2 + 4xy^6 + y^8$.
14. $\frac{49x^2}{y^2} + \frac{y^2}{49x^2} - \frac{42x}{y} + \frac{6y}{7x} + 7$.
15. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\frac{3}{4}$.
16. $25\frac{3}{7} - \frac{20x}{7y} + \frac{9y^2}{16x^2} - \frac{15y}{2x} + \frac{4x^2}{49y^2}$.
17. $x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + 3x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1$.
18. $x^{\frac{5}{3}} - 4x^{\frac{4}{3}} + 2x + 4x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}$.
19. $a^2x^{-2} + 2ax^{-1} + a^{-2}x^2 + 3 + 2a^{-1}x$.
20. $x^{\frac{3}{2}} + xy^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{5}{4}}y^{-\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} + y$.

21. $\frac{9x^3}{4} - 5x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{179x^2y}{45} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{4xy^2}{25}$.

22. $a^{2m} - 4a^{m+n} + 4a^{2n}$.

23. $9a^{2m} + 6a^{3m+1} + 25c^{2m-4} - 30a^m c^{m-2} + a^{4m+2} - 10a^{2m+1}c^{m-2}$.

210. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, এই সূত্রদ্বয়ের প্রয়োগ-সাহায্যে বর্গমূল-নির্ণয় :

উদা. 1. $4 - 4c + 2b + c^2 - bc + \frac{b^2}{4}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [কলিঃ, 1876.]

b এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে,

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = \frac{b^2}{4} - b(c-2) + (c^2 - 4c + 4)$$
$$= \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left\{\frac{b}{2}(c-2)\right\} + (c-2)^2$$
$$= \left\{\frac{b}{2} - (c-2)\right\}^2 = \left(\frac{b}{2} - c + 2\right)^2.$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= \frac{b}{2} - c + 2$.

উদা. 2. $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 12$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) + 12$$
$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4 = \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$.

উদা. 3. $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4 + b^4 - 2a^2b^2} + 4 \cdot \frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a-b}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

[কলিঃ, প্রবেশিকা, 1886.]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2-b^2)^2} + \frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{(a^2+b^2)^2 + 4ab(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2};$$

$$\text{এবং ইহার লব} = \{(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2\} + 4ab(a^2-b^2)$$
$$= (a^2-b^2)^2 + 4ab(a^2-b^2) + 4a^2b^2$$
$$= \{(a^2-b^2) + 2ab\}^2;$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{(a^2 + 2ab - b^2)^2}{(a^2-b^2)^2}$. অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= \frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}$.

উদা. 4. $(ab+ac+bc)^2-4abc(a+c)$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [কলিঃ, 1888.]

প্রদত্ত রাশি $=\{b(a+c)+ac\}^2-4abc(a+c)$

$=b^2(a+c)^2+a^2c^2-2abc(a+c)$

$=\{b(a+c)-ac\}^2=(ab-ac+bc)^2.$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=ab-ac+bc.$

উদা. 5. $a^4+b^4+c^4+d^4-2(a^2+c^2)(b^2+d^2)+2a^2c^2+2b^2d^2$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া,

প্রদত্ত রাশি $=a^4-2a^2(b^2+d^2-c^2)+\{b^4+c^4+d^4-2c^2(b^2+d^2)+2b^2d^2\}$;

এবং, ধনুর্বন্ধনীর (অর্থাৎ, { } এর) অন্তর্গত রাশিমালাকে b এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে, উহা $=b^4-2b^2(c^2-d^2)+(c^4+d^4-2c^2d^2)$

$=b^4-2b^2(c^2-d^2)+(c^2-d^2)^2=\{b^2-(c^2-d^2)\}^2.$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশিমালা $=a^4-2a^2(b^2-c^2+d^2)+(b^2-c^2+d^2)^2$

$=\{a^2-(b^2-c^2+d^2)\}^2=(a^2-b^2+c^2-d^2)^2.$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=a^2-b^2+c^2-d^2.$

উদা. 6. $4\{(a^2-b^2)cd+ab(c^2-d^2)\}^2+\{(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\}^2$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি

$=4\{(a^2-b^2)^2c^2d^2+2abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+a^2b^2(c^2-d^2)^2\}$
$\quad+\{(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2-8abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+16a^2b^2c^2d^2\}$

$=\{4(a^2-b^2)^2c^2d^2+4a^2b^2(c^2-d^2)^2\}+\{(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2+16a^2b^2c^2d^2\}$

$=(a^2-b^2)^2\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}+4a^2b^2\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}$

$=\{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\}\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}$

$=(a^4+2a^2b^2+b^4)(c^4+2c^2d^2+d^4)=(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2.$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$

প্রশ্নমালা 104

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বর্গমূল নির্ণয় কর (Find the square root of) :

1. $25x^2y^2-40xy+16.$
2. $49a^2x^4-42ab^2x^2+9b^4.$
3. $49a^6b^8+126a^7b^7+81a^8b^6.$
4. $\frac{1}{4}x^8y^4-\frac{1}{5}x^7y^7+\frac{1}{25}x^6y^{10}.$

5. $\frac{25a^2b^2}{4}+\frac{c^4}{9}-\frac{5abc^2}{3}$. 6. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

7. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.

8. $4a^2+b^2+9c^2+6bc-12ac-4ab$.

9. $a^4+4b^4+9c^4+4a^2b^2-6a^2c^2-12b^2c^2$.

10. $4a^4+9b^4+25c^4-12a^2b^2+20a^2c^2-30b^2c^2$.

11. $x^2+\frac{a^2}{9}-bx+\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{3}+\frac{2ax}{3}$. 12. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

13. $x^4+\frac{1}{x^4}+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3$. 14. $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}+3$.

15. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\sqrt{2}+2\frac{1}{2}$. 16. $\frac{9x^2}{a^2}+\frac{a^2}{9x^2}-6\frac{x}{a}-\frac{2a}{3x}+3$.

17. $x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6$. 18. $-2+a^{2\sqrt{2}}+a^{-2\sqrt{2}}$.

19. $a^2+b^2+c^2+d^2-2a(b-c+d)-2b(c-d)-2cd$.

20. $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$.

21. $a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2(b^2+d^2)-2b^2(c^2-d^2)+2c^2(a^2-d^2)$.

22. $a^4+2a^3-a+\frac{1}{4}$.

23. $2a^2(b+c)^2+2b^2(c+a)^2+2c^2(a+b)^2+4abc(a+b+c)$.

ত্রিংশ অধ্যায়

লেখাবলীর সাহায্যে সরল সহ-সমীকরণ-সমাধান

(Graphical Solution of Simultaneous Equations of the first degree)

211. কোন বীজগণিতীয় রাশিকে কিরূপে বিন্দু ও রেখা দ্বারা সূচিত করা যায়, তাহা সপ্তদশ ও চতুর্বিংশ অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে।

এক্ষণে, লৈখিক চিত্রের সাহায্যে কিরূপে সহ-সমীকরণ ও তৎসম্পর্কীয় প্রশ্নের সমাধান করা যায়, তাহাই আলোচনা করা যাইবে। পূর্ব্বোক্ত বীজগণিতীয় পদ্ধতি অনুসারে যেরূপ সূক্ষ্ম ফল পাওয়া যায়, এই পদ্ধতিতে লব্ধ ফলগুলি, অবশ্য, সেরূপ সূক্ষ্ম না হইলেও, অত্যন্ত সহজসাধ্য বলিয়া, অনেকস্থলেই এই পদ্ধতি অনুসৃত হইয়া থাকে।

212. লৈখিক চিত্র-সাহায্যে সহ-সমীকরণ-সমাধান :

উদা. 1. লেখ-সাহায্যে সমাধান কর :

$$\left.\begin{aligned} 2x-7y+12 &= 0 \\ 3x+2y &= 32 \end{aligned}\right\}$$

সমীকরণ দুইটির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর।

প্রথম সমীকরণ হইতে,

x	-6	1	15	-13
y	0	2	6	-2

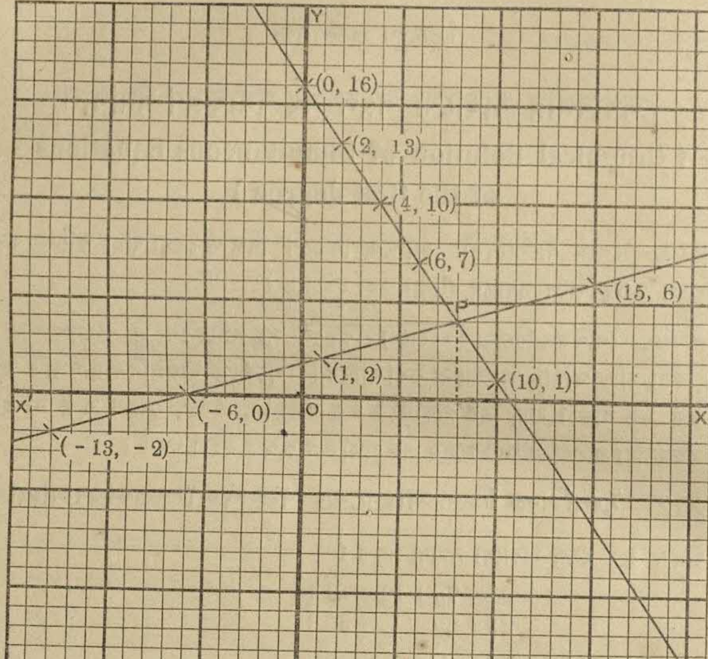
এবং দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে,

x	0	2	4	6	10
y	16	13	10	7	1

মনে কর, বর্গাঙ্কিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'একক'রূপে লইয়া অঙ্কিত, সমীকরণদ্বয়ের লৈখিক চিত্র দুইটি অঙ্কিত হইল। [পরবর্ত্তী পৃষ্ঠা দেখ]

দেখা যাইতেছে যে, লৈখিক চিত্র দুইটি P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন, যেহেতু P বিন্দু উভয় লৈখিক চিত্রের উপরেই অবস্থিত, অতএব, উহার ভুজ-কোটি উভয় সমীকরণকেই সিদ্ধ করিবে। স্পষ্টতঃই, P এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে 8 ও 4.

সুতরাং, $\left.\begin{aligned} x&=8 \\ y&=4 \end{aligned}\right\}$ ই সমীকরণদ্বয়ের নির্ণেয় বীজ।



উপরিউক্ত ফলের শুদ্ধি-পরীক্ষা :

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সকল পদগুলি সমতাচিহ্নের বামদিকে পক্ষান্তর করিয়া, এবং x ও y এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে 8 ও 4 বসাইয়া,

প্রথম সমীকরণে,

বাম পক্ষ $= 2x - 7y + 12 = 2 \times 8 - 7 \times 4 + 12 = 0 =$ ডা'ন পক্ষ ;

এবং দ্বিতীয় সমীকরণে,

বাম পক্ষ $= 3x + 2y - 32 = 3 \times 8 + 2 \times 4 - 32 = 0 =$ ডা'ন পক্ষ।

সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, $x = 8$, $y = 4$ হইলে, উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়।

উদা. 2. লেখ-সাহায্যে সমাধান কর : $\frac{2x+12}{7} = \frac{32-3x}{2}$.

এস্থলে আমাদিগকে, $\frac{2x+12}{7}$ এবং $\frac{32-3x}{2}$, এই রাশি দুইটির লৈখিক চিত্র অঙ্কন করিয়া, উহাদের ছেদবিন্দুর ভুজ (abscissa) নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, $\frac{2x+12}{7}$ এর লেখ এবং $y=\frac{2x+12}{7}$ (অর্থাৎ, $2x-7y+12=0$) এর লেখ, উভয়ই এক।

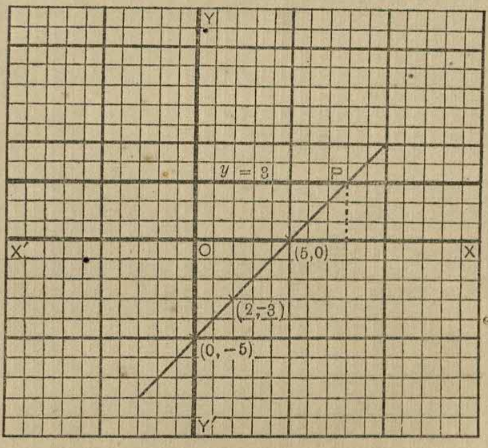
আবার, $\frac{32-3x}{2}$ এর লেখ এবং $y=\frac{32-3x}{2}$ (অর্থাৎ, $3x+2y=32$) এর লেখ, উভয়ই এক।

এখন, $2x-7y+12=0$ এবং $3x+2y=32$, এই সমীকরণদ্বয়ের লৈখিক চিত্র দুইটি অঙ্কন করিয়া (প্রথম উদাহরণের চিত্র দেখ) দেখা যায় যে, উহাদের ছেদবিন্দুর (অর্থাৎ, P এর) ভুজ $=8$.

$\therefore$ $x=8$ ই প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় বীজ।

উদা. 3. লেখ-সাহায্যে সমাধান কর : $x-5=3$.

এক্ষেত্রে, $x-5$ এবং 3, এই রাশি দুইটির লৈখিক চিত্র অঙ্কন করিয়া, উহাদের ছেদবিন্দুর ভুজ নির্ণয় করিতে হইবে।



এখন, আমরা জানি যে, $x-5$ এর লেখ এবং $y=x-5$ এর লেখ, উভয়ই এক; অতএব, $y=x-5$ এর লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর।

$y=x-5$ সমীকরণ হইতে x ও y এর যুগপৎ মান :—

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=-5 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=-3 \end{matrix}\right\} \quad \text{এবং} \quad \left.\begin{matrix} x=5 \\ y=0 \end{matrix}\right\}.$$

এই বিন্দুগুলির সংযোজক সরলরেখাই $y=x-5$ এর লেখ হইবে।

আবার, 3 এর লেখ এবং $y=3$ এর লেখ, উভয়ই এক; এবং $y=3$ এর

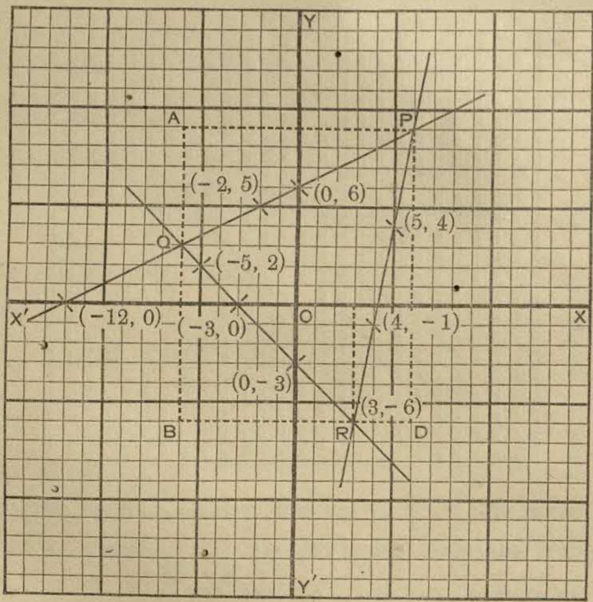
লৈখিক চিত্র, স্পষ্টতঃই, x-অক্ষরেখার সমান্তরাল, এবং মূলবিন্দু হইতে উপরের দিকে তিন 'একক' দূরবর্ত্তী একটি সরলরেখা।

বর্গাঙ্কিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'একক'রূপে লইয়া অঙ্কিত লৈখিক চিত্র দুইটি, পূর্ব্ববর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদত্ত হইল। লেখ দুইটির ছেদবিন্দু P দ্বারা সূচিত করিলে, স্পষ্টই দেখা যায় যে, P বিন্দুর ভুজ $=8$.

অতএব, $x=8$ ই প্রদত্ত সমীকরণটির নির্ণেয় বীজ।

উদা. 4. $x-2y+12=0$, $x+y+3=0$ এবং $5x-y-21=0$, এই তিন সরলরেখা দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির ভুজ-কোটি, এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[Find the co-ordinates of the vertices of the triangle whose sides are given by the equations, $x-2y+12=0$, $x+y+3=0$ and $5x-y-21=0$. Find also its area.]



দেখিতে পাওয়া যায় যে,

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=6 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=-2 \\ y=5 \end{matrix}\right\}, \quad \text{এবং} \quad \left.\begin{matrix} x=-12 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$$

বিন্দু তিনটির সংযোজক সরলরেখা, $x-2y+12=0$ এর লৈখিক চিত্র।

$\left.\begin{array}{l}x=\ \ 0\\ y=-3\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-3\\ y=\ \ 0\end{array}\right\}$, এবং $\left.\begin{array}{l}x=-5\\ y=\ \ 2\end{array}\right\}$

বিন্দু তিনটির সংযোজক সরলরেখা, $x+y+3=0$ এর লৈখিক চিত্র ;

এবং $\left.\begin{array}{l}x=\ \ 3\\ y=-6\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=\ \ 4\\ y=-1\end{array}\right\}$, এবং $\left.\begin{array}{l}x=5\\ y=4\end{array}\right\}$

বিন্দু তিনটির সংযোজক সরলরেখা, $5x-y-21=0$ এর লৈখিক চিত্র।

[বর্গাঙ্কিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'একক'রূপে লওয়া হইয়াছে।]

প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণত্রয়ের লেখ তিনটি, পূর্ব্ববর্ত্তী পৃষ্ঠার চিত্রে, যথাক্রমে PQ, QR এবং RP সরলরেখা দ্বারা সূচিত করা হইল।

চিত্র হইতে দেখা যায় যে,

শীর্ষ P এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে $\left.\begin{array}{l}x=\ \ 6\\ y=\ \ 9\end{array}\right\}$;

শীর্ষ Q এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে $\left.\begin{array}{l}x=-6\\ y=\ \ 3\end{array}\right\}$;

এবং শীর্ষ R এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে $\left.\begin{array}{l}x=\ \ 3\\ y=-6\end{array}\right\}$.

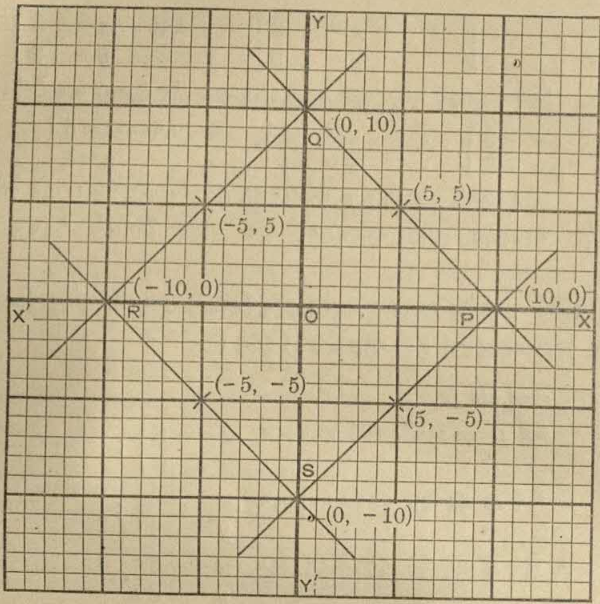
এখন, P, Q, R দিয়া অঙ্কিত, এবং অক্ষরেখাদ্বয়ের সমান্তরাল কতিপয় রেখা টানিয়া (চিত্রে dot-রেখা) দেখা যায় যে,

$$\begin{aligned}\triangle PQR &= \text{আয়ত } ABDP - \triangle QAP - \triangle QBR - \triangle RDP\\ &= AB\times BD - \frac{AP\times AQ}{2} - \frac{QB\times BR}{2} - \frac{RD\times DP}{2}\\ &= 15\times 12 - \frac{12\times 6}{2} - \frac{9\times 9}{2} - \frac{3\times 15}{2}\\ &= 180 - 36 - \tfrac{81}{2} - \tfrac{45}{2}\\ &= 81 \text{ বর্গ একক।}\end{aligned}$$

[অথবা, 226 পৃষ্ঠার উদা. 4 এর নিয়মানুসারে দেখা যায় যে ক্ষেত্রফল = 81 বর্গ একক (প্রায়)।]

উদা. 5. $x+y-10=0$, $x-y+10=0$, $x+y+10=0$ এবং $x-y-10=0$ দ্বারা সূচিত সরলরেখাগুলিকে বাহুরূপে লইয়া অঙ্কিত চতুষ্কোণের শীর্ষবিন্দু চারিটির ভুজ-কোটি নির্ণয় কর। দেখাও যে, চতুষ্কোণটি একটি বর্গক্ষেত্র ; ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[Find graphically the co-ordinates of the vertices of the quadrilateral whose sides are $x+y-10=0$, $x-y+10=0$, $x+y+10=0$ and $x-y-10=0$. Prove that the quadrilateral is a square and find its area.]



দেখা যায় যে,

$$\left.\begin{array}{l} x=10 \\ y=0 \end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=5 \end{array}\right\},\quad \text{এবং}\quad \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=10 \end{array}\right\}$$

বিন্দু তিনটি $x+y-10=0$ এর লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত ;

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=10 \end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l} x=-5 \\ y=5 \end{array}\right\},\quad \text{এবং}\ \left.\begin{array}{l} x=-10 \\ y=0 \end{array}\right\}$$

বিন্দু তিনটি $x-y+10=0$ এর লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত ;

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=-10 \end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l} x=-5 \\ y=-5 \end{array}\right\},\quad \text{এবং}\ \left.\begin{array}{l} x=-10 \\ y=0 \end{array}\right\}$$

বিন্দু তিনটি $x+y+10=0$ এর লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত ;

এবং $$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=-10 \end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=-5 \end{array}\right\},\quad \text{এবং}\quad \left.\begin{array}{l} x=10 \\ y=0 \end{array}\right\}$$

বিন্দু তিনটি $x-y-10=0$ এর লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত।

এখন, বর্গাঙ্কিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'একক'রূপে লইয়া লৈখিক চিত্রগুলি অঙ্কিত করিয়া দেখা যায় যে, উহারা উপরিপ্রদর্শিত চিত্রে, যথাক্রমে PQ, QR, RS এবং SP সরলরেখাগুলি দ্বারা সূচিত হইতেছে [চিত্র দেখ]।

স্পষ্টই, P, Q, R, S এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে,

$$\left.\begin{matrix} x=10 \\ y=0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=10 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=-10 \\ y=0 \end{matrix}\right\}, \quad \text{এবং} \quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=-10 \end{matrix}\right\}.$$

চিত্র হইতে অতি সহজেই দেখা যায় যে, $OP=OQ=OR=OS$ (প্রত্যেকেই 10 'একক' দীর্ঘ বলিয়া), এবং PR কর্ণ (diagonal) টি QS কর্ণের উপর লম্ব।

কাজেই, $PQRS$ চতুষ্কোণটি একটি বর্গক্ষেত্র।

$$\text{উহার ক্ষেত্রফল} = \triangle PQR + \triangle PSR$$
$$= \frac{PR \times OQ}{2} + \frac{PR \times OS}{2}$$
$$= \frac{20 \times 10}{2} + \frac{20 \times 10}{2} = 200 \text{ বর্গ একক।}$$

প্রশ্নমালা 105

লৈখিক চিত্র-সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations graphically) :

1. $x+y=9, \ 3x-2y=7.$
2. $4x+3y=13, \ 3x+2y=11.$
3. $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=4, \ 4x-5y=2.$
4. $y-x=2, \ 3x-2y=5.$
5. $5x-3y=11, \ 2y-3x+4=0.$
6. $\frac{x-2}{2}=\frac{-5x+4}{5}.$
7. $\frac{2x+7}{3}=\frac{3x-7}{2}.$
8. $\frac{4x-3}{5}=\frac{6x}{7}-1.$
9. $x-12=-3.$
10. $5x-13=7.$

11. $-x+3y=18, \ x+7y=22,$ এবং $y+3x=26$ দ্বারা সূচিত সরলরেখা তিনটি কর্তৃক উৎপন্ন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের ভুজ-কোটি, এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[Find the co-ordinates of the vertices, and the area, of the triangle formed by the three straight lines $-x+3y=18$, $x+7y=22$ and $y+3x=26$.]

12. দেখাও যে, $4x-y=16, \ 3x-2y=7$ এবং $x+y=9$ দ্বারা সূচিত সরলরেখাত্রয় এক বিন্দু দিয়া যায়; উহাদের সম্পাতবিন্দু (point of concurrence) এর ভুজ-কোটি নির্ণয় কর।

[Show that the three straight lines $4x-y=16$, $3x-2y=7$ and $x+y=9$ are concurrent; find the co-ordinates of the point of concurrence.]

13. নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের লৈখিক চিত্র দ্বারা উৎপন্ন চতুষ্কোণগুলির শীর্ষবিন্দু-চতুষ্টয়ের ভুজ-কোটি, এবং উহাদের প্রত্যেকের ক্ষেত্রফল, নির্ণয় কর :

[Find the co-ordinates of the vertices, and the area, of the quadrilaterals formed by the straight lines whose equations are given below.]

(i) $x+y=3,\ \frac{x}{3}-\frac{y}{3}=1,\ \frac{x+y}{3}=-1$ এবং $x-y+3=0$;

(ii) $x=1,\ y=5,\ x=12$ এবং $y=10$;

(iii) $x=0,\ y=0,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ এবং $\frac{x}{8}+\frac{y}{12}=1$.

14. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজগুলির শীর্ষবিন্দু-ত্রয়ের ভুজ-কোটি, এবং ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল, নির্ণয় কর :

[Find the co-ordinates of the vertices, and the area, of the triangles formed by the straight lines whose equations are given below.]

(i) $x=0,\ y=0,\ \frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$;

(ii) $x-2=0,\ y-1=0,\ x+y=6$;

(iii) $x-2y+8=0,\ x+y+2=0,\ 5x-y-14=0.$

নিম্নলিখিত সহ-সমীকরণগুলির সাধারণ (common) বীজ নির্ণয় করিয়া প্রত্যক্ষ কর যে, উহাদের প্রত্যেকে x এবং y এর একই মান দ্বারা সিদ্ধ হয়। x এবং y এর এই সাধারণ মানগুলি নির্ণয় কর এবং লেখ-সাহায্যে উহাদিগকে পরীক্ষা কর।

[In each of the following examples, show by solving the equations that they are satisfied by the same values of x and y. Find these values and verify graphically.]

15. $x+y=2,\ x=1,\ y=1.$

16. $7x+5y=24,\ x+y=2,\ 2x+y=9.$

17. $2x-y=7,\ y-x=2,\ 11x=9y.$

213. সমীকরণসম্বন্ধীয় প্রশ্নসমাধানে লৈখিক চিত্রের ব্যবহার :

উদা. 1. প্রতি সের চাউলের মূল্য তিন আনা করিয়া হইলে, দেখাও যে, বর্গাঙ্কিত কাগজে এরূপ একটি সরলরেখা অঙ্কিত করা যায় যে, উহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ (abscissa) যে পরিমাণ চাউল নির্দ্দেশ করিবে, ঐ বিন্দুর কোটি (ordinate) সেই পরিমাণ চাউলের মূল্য জ্ঞাপন করিবে।

[Given that the price of a seer of rice is three annas, shew that a graph in the form of a straight line can be drawn such that if any point be taken on it, the abscissa of the point will represent the quantity of rice of which the price is represented by the ordinate.]

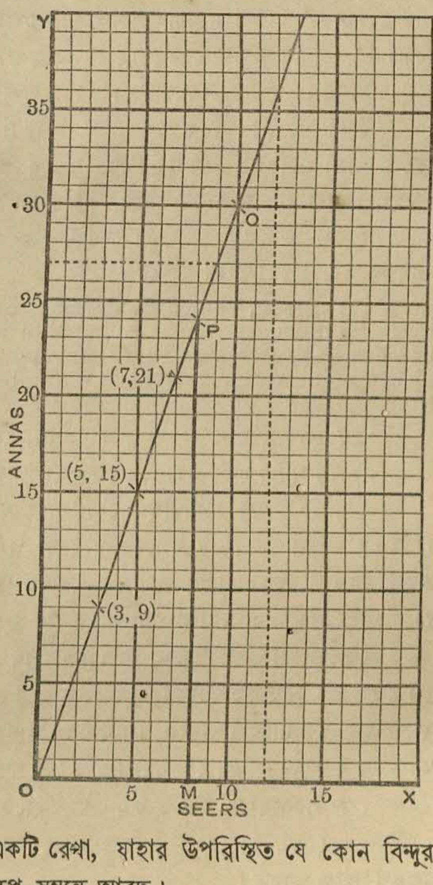
উপরিউক্ত সরলরেখার সাহায্যে, (i) 12 সের চাউলের মূল্য, (ii) 27 আনা মূল্যের চাউলের ওজন, নির্ণয় কর।

[With the aforesaid straight line find (i) the price of 12 seers of rice and (ii) the quantity of rice of which the price is 27 annas]

প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে x-সের চাউলের মূল্য অবশ্যই $3x$ আনা; ইহাকে y দ্বারা সূচিত করিলে $y=3x$ সমীকরণটিই চাউল ও উহার মূল্যনিরূপক সমীকরণ হইবে। এবং এই সমীকরণটির লেখই নির্ণেয় লৈখিক চিত্র হইবে।

অতএব, $y=3x$ এর লৈখিক চিত্রটি অঙ্কন কর।

x	3	5	7
y	9	15	21



পার্শ্বে প্রদর্শিত চিত্রে, ধর OX অক্ষরেখাস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য এক 'সের', এবং OY অক্ষরেখাস্থিত এক বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক আনা' নির্দ্দেশ করিতেছে। তাহা হইলে, OX এবং OY এর পার্শ্বে লিখিত অঙ্কগুলির অর্থ সুস্পষ্ট।

এখন, (3, 9), (5, 15), (7, 21), বিন্দু কয়টি সংস্থাপন করিলে দেখিতে পাইবে যে উহারা সমরেখ। এই সরলরেখার উপর যে কোন একটি বিন্দু, P, লও। স্পষ্টতঃ, ইহার ভুজ $=8$ এবং কোটি $=24$.

যেহেতু এক সেরের মূল্য 3 আনা, অতএব, 8 সেরের মূল্য 24 আনা হইবে। কাজেই, P, এরূপ একটি বিন্দু, যাহার ভুজ OM, যে পরিমাণ (অর্থাৎ, 8 সের) চাউল নির্দ্দেশ করিতেছে, তাহার কোটি PM, সেই পরিমাণ চাউলের মূল্য (অর্থাৎ, 24 আনা) নির্দ্দেশ করিতেছে।

অতএব, OP সরলরেখাটি এরূপ একটি রেখা, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটিই, P এর ভুজ-কোটির অনুরূপ সম্বন্ধে আবদ্ধ।

কাজেই, ইহার উপরিস্থিত $Q(10, 30)$ বিন্দুটি এরূপ একটি বিন্দু, যাহার ভুজ যে পরিমাণ চাউল নির্দ্দেশ করিতেছে, তাহার কোটি সেই পরিমাণ চাউলের মূল্য জ্ঞাপন করিতেছে। ইত্যাদি।

সুতরাং, OP ই নির্ণেয় লৈখিক চিত্র।

এই সরলরেখার সাহায্যে, যে কোন পরিমাণ চাউলের মূল্য অবিলম্বে নির্ণয় করা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ, যে বিন্দুর ভুজ 12, সেই বিন্দুর কোটি স্পষ্টতঃই 36; অতএব, 12 সের চাউলের মূল্য 36 আনা। অন্যান্য ক্ষেত্রেও অনুরূপ ফল পাওয়া যাইবে।

পূর্ব্বপৃষ্ঠার চিত্র (অর্থাৎ, OP সরলরেখা) হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট মূল্যে কত পরিমাণ চাউল পাওয়া যাইবে, তাহাও অবিলম্বে নির্ণয় করা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ, যে বিন্দুর কোটি 27, তাহার ভুজ স্পষ্টতঃই 9; অতএব, 27 আনা মূল্যে 9 সের চাউল পাওয়া যাইবে।

টীকা। OP সরলরেখাকে চাউলের **মূল্য-নিরূপক লেখ** (price-graph) বলে।

উদা. 2. B নামক এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে কোন এক নির্দ্দিষ্ট স্থান হইতে যাত্রা করিল। দেখাও যে, B এর গতি-নির্দ্দেশক লৈখিক চিত্র এরূপ একটি সরলরেখা দ্বারা সূচিত হইতে পারে, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ যত-সংখ্যক মাইল নির্দ্দেশ করিবে, ঐ বিন্দুর কোটি, উক্ত দূরত্ব অতিক্রম করিতে B এর যে সময় আবশ্যক হয়, তাহা নির্দ্দেশ করিবে।

[A person, named B, starting from a given place, travels at the rate of 5 miles an hour. Show that a graph in the form of a straight line can be drawn such that if any point be taken on it, the abscissa of the point will represent the number of miles that B travels in the time represented by the ordinate.]

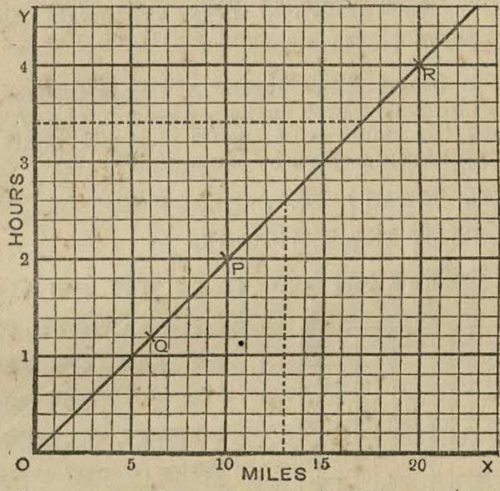
এই লেখ হইতে, (i) 3 ঘণ্টা 24 মিনিটে B যত মাইল অতিক্রম করিবে, তাহা, এবং (ii) 13 মাইল যাইতে B এর যত সময় লাগিবে, তাহা নির্ণয় কর।

ধর, OX এর উপরিস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক মাইল', এবং OY এর উপরিস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য '12 মিনিট' সময় সূচিত করিতেছে; এবং এতদনুসারে পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদর্শিত লৈখিক চিত্রটি অঙ্কিত হইয়াছে। তাহা হইলে, OX এবং OY এর পার্শ্বস্থিত অঙ্কগুলির অর্থ সুস্পষ্ট।

যেহেতু B এক ঘণ্টায় 5 মাইল পথ অতিক্রম করে, অতএব সে দুই ঘণ্টায় 10 মাইল পথ অতিক্রম করিবে। কাজেই, চিত্র হইতে দেখা যায় যে, P এরূপ একটি বিন্দু, যাহার ভুজ যত মাইল (এস্থলে, 10 মাইল) সূচিত করিতেছে, ঐ বিন্দুর কোটি, উক্ত দূরত্ব অতিক্রম করিতে B এর যত সময় (এস্থলে, 2 ঘণ্টা) লাগে, তাহা সূচিত করিতেছে।

OP সরলরেখাটি অঙ্কিত কর এবং উহাকে বর্দ্ধিত কর। তাহা হইলে, OP ই এরূপ একটি সরলরেখা, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটিই P এর ভুজ-কোটির অনুরূপ সম্বন্ধে আবদ্ধ।

এই সরলরেখার উপর অন্য একটি বিন্দু, Q, লইয়া দেখা যাইতেছে যে, উহার ভুজ 6 মাইল, এবং কোটি 1 ঘণ্টা 12 মিনিট সময় নির্দ্দেশ করিতেছে ; কিন্তু আমরা জানি যে, ঐ ব্যক্তি 1 ঘণ্টা 12 মিনিটে 6 মাইল পথ অতিক্রম করিতে পারে। কাজেই, Q বিন্দুটিও উপরিলিখিত সর্ত্তগুলি পূরণ করিতেছে।



তদ্রূপ, এই সরলরেখার উপর আর একটি বিন্দু, R, লইয়া দেখা যাইতেছে যে, উহার ভুজ 20 মাইল, এবং কোটি, 4 ঘণ্টা সময়, নির্দ্দেশ করিতেছে। কিন্তু আমরা জানি যে, ঐ ব্যক্তি 4 ঘণ্টায় 20 মাইল পথ ভ্রমণ করিয়া থাকে। অতএব, R বিন্দুটিও উপরিলিখিত সর্ত্তগুলি পূরণ করিতেছে।

ঐ রেখার উপরিস্থিত অন্যান্য বিন্দুর বেলায়ও অনুরূপ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়। কাজেই, OP সরলরেখাই নির্ণেয় লৈখিক চিত্র।

এই লেখ হইতে B কোন্ নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ দূরত্ব কত সময়ে অতিক্রম করিবে, তাহা অবিলম্বে জানা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ, যদি কোন বিন্দুর ভুজ 13 মাইল দূরত্ব সূচিত করে, তাহা হইলে, চিত্র হইতে দেখা যায় যে, ঐ বিন্দুর কোটি 2 ঘণ্টা 36 মিনিট সময় নির্দ্দেশ করিতেছে ; অতএব, বুঝা যাইতেছে যে, B, 2 ঘণ্টা 36 মিনিটে 13 মাইল দূরত্ব অতিক্রম করে।

আবার, B কোন্ নির্দ্দিষ্ট সময়ে কত মাইল দূরত্ব অতিক্রম করিবে, তাহাও এই লেখ হইতে নির্ণীত হইতে পারে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, যদি ঐ লেখস্থিত কোন বিন্দুর কোটি 3 ঘণ্টা 24 মিনিট সময় সূচিত করে, তবে স্পষ্টই ঐ বিন্দুর ভুজ 17 মাইল দূরত্ব সূচিত করিবে। অতএব, বুঝা যাইতেছে যে, B, 3 ঘণ্টা 24 মিনিটে 17 মাইল পথ অতিক্রম করিবে।

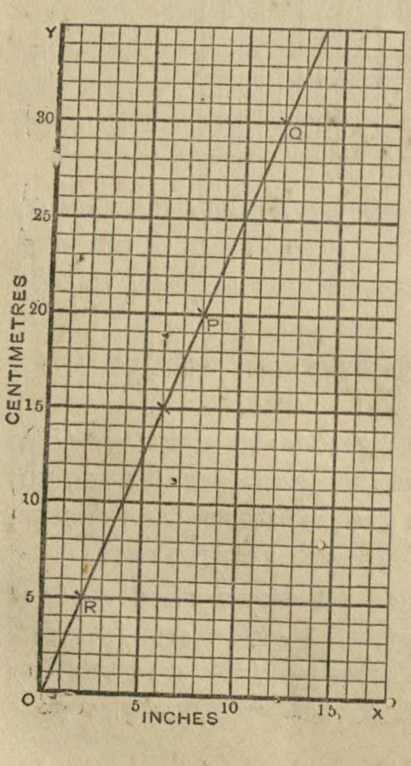
টীকা। OP সরলরেখাটিকে B এর **গতি-নিরূপক লেখ (motion-graph)** বলে।

উদা. 3. যদি এক ইঞ্চির দৈর্ঘ্য 2·5 সেন্টিমিটারের দৈর্ঘ্যের সমান হয়, তবে দেখাও যে, এরূপ একটি সরলরেখা অঙ্কিত করা যায়, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ যত-সংখ্যক 'ইঞ্চি' সূচিত করিবে, ঐ বিন্দুর কোটি উহার সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট 'সেন্টিমিটারের' সংখ্যা নির্দ্দেশ করিবে।

[If one inch be equal in length to 2·5 centimetres, show that a straight line can be drawn such that the abscissa of any point on the line will represent the number of inches that are equivalent to the number of centimetres represented by the ordinate.]

এই চিত্র (বা, সরলরেখা) হইতে, (i) 10 ইঞ্চিতে কত সেন্টিমিটার, এবং (ii) 15 সেন্টিমিটারে কত ইঞ্চি হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

ধর, OX এর উপরিস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক ইঞ্চি', এবং OY এর উপরিস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক সেন্টিমিটার (সে. মি.)' সূচিত করিতেছে; এবং এতদনুসারে, পার্শ্বে প্রদর্শিত চিত্রটি অঙ্কিত হইয়াছে। তাহা হইলে, OX এবং OY এর পার্শ্বস্থিত অঙ্কগুলির অর্থ সুস্পষ্ট।



যেহেতু 1 ইঞ্চি = 2·5 সেন্টিমিটার,
অতএব, 8 ইঞ্চি = 20 সেন্টিমিটার। সুতরাং, পার্শ্বস্থিত চিত্রে, P এরূপ একটি বিন্দু, যাহার ভুজ যত ইঞ্চি দৈর্ঘ্য সূচিত করিতেছে, ঐ বিন্দুর কোটি উক্ত দৈর্ঘ্যের ভিতর যত সেন্টিমিটার আছে, তাহার সংখ্যা নির্দ্দেশ করিতেছে।

একটি সরলরেখা দ্বারা O, P যুক্ত কর, এবং উহাকে বর্দ্ধিত কর। তাহা হইলে, উহা এরূপ এক সরলরেখা হইবে, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটিই P এর ভুজ-কোটির অনুরূপ সম্বন্ধে আবদ্ধ

এই সরলরেখার উপর অন্য এক বিন্দু Q লইয়া দেখা যায় যে, উহার ভুজ 12 ইঞ্চি, এবং উহার কোটি 30 সে. মি. দৈর্ঘ্য সূচিত করিতেছে। কিন্তু আমরা জানি যে, 12 ইঞ্চি = 30 সে. মি. ; কাজেই, Q বিন্দুও উপরিলিখিত সর্ত্ত পূরণ করিতেছে।

এই সরলরেখার উপর, অপর আর এক বিন্দু R লও ; দেখা যায় যে, ইহার ভুজ 2 ইঞ্চি, এবং কোটি 5 সেন্টিমিটার সূচিত করিতেছে। কিন্তু আমরা জানি যে, 2 ইঞ্চি = 5 সে. মি. ; অতএব, R বিন্দুও উপরিউক্ত সর্ত্ত পূরণ করিতেছে।

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, এই সরলরেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুই উপরিউক্ত সর্ত্ত পূরণ করিবে। অতএব, OP ই নির্ণেয় সরলরেখা।

উক্ত লেখ (অর্থাৎ, OP সরলরেখা) হইতে আমরা কোন নির্দ্দিষ্টসংখ্যক ইঞ্চি কত সেন্টিমিটারের সমান, তাহা অবিলম্বে নির্ণয় করিতে পারি। দৃষ্টান্তস্বরূপ, চিত্র হইতে দেখা যায় যে, যে বিন্দুর ভুজ 10 ইঞ্চি নির্দ্দেশ করে, তাহার কোটি 25 সেন্টিমিটার নির্দ্দেশ করে ; কাজেই, বুঝা যাইতেছে যে, 10 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য, 25 সে. মি. দৈর্ঘ্যের সমান।

আবার, উক্ত লেখ হইতে আমরা যে কোন নির্দ্দিষ্টসংখ্যক সেন্টিমিটারের দৈর্ঘ্য কত ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের সমান, তাহাও নির্ণয় করিতে পারি। দৃষ্টান্তস্বরূপ, ঐ সরলরেখার উপরিস্থিত যে বিন্দুর কোটি 15 সে. মি. সূচিত করে, সেই বিন্দুর ভুজ, স্পষ্টই 6 ইঞ্চি সূচিত করে। কাজেই, বুঝা যায় যে, 15 সে. মি. দৈর্ঘ্য, 6 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের সমান।

টীকা। OP সরলরেখা হইতে, কত ইঞ্চি কত সেন্টিমিটারের সমান, বা কত সেন্টিমিটার কত ইঞ্চির সমান, ইহা জানা যায় বলিয়া, উক্ত সরলরেখাকে **'ইঞ্চি-সেন্টিমিটার'-পরিবর্ত্তক লেখ (inch-centimetre conversion graph)** বলা হয়।

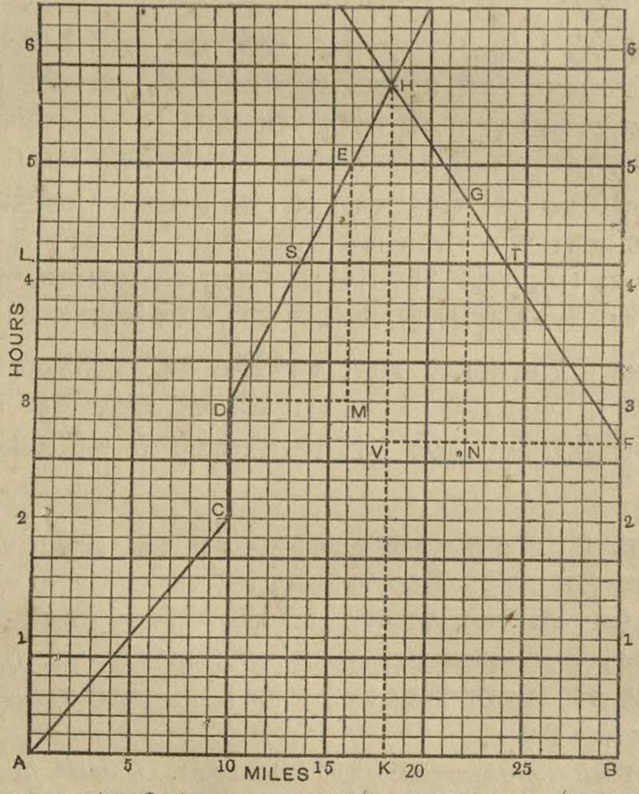
উদা. 4. A ও B পরস্পর 30 মাইল দূরবর্ত্তী দুইটি ষ্টেশন। P, A হইতে B অভিমুখে ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে যাত্রা করিয়া, দুই ঘণ্টা পরে পথিমধ্যে এক ঘণ্টাকাল বিশ্রাম করিল এবং বাকী পথ ঘণ্টায় তিন মাইল গতিতে যাইবে বলিয়া পুনরায় রওনা হইল। P, A হইতে যাত্রা করিবার 2 ঘণ্টা 40 মিনিট পরে, Q, B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টায় 4 মাইল গতিতে চলিতে লাগিল। P এবং Q কখন্ এবং কোথায় একত্রিত হইবে ?

[A and B are two stations 30 miles apart. P starts from A and travels towards B at the rate of 5 miles an hour ; at the end of 2 hours, he takes rest for one hour, and then resumes his journey at the rate of 3 miles an hour. Q leaves B, 2 hours 40 minutes after P leaves A and travels towards A, without stoppage, at the rate of 4 miles an hour. When and where the two will meet ?]

মনে কর, AB সরলরেখাটিকে x-অক্ষরেখা এবং ইহার উপর লম্বভাবে অবস্থিত A-বিন্দুগামী সরলরেখাটিকে y-অক্ষরেখারূপে কল্পনা করা হইল।

ধর, AB রেখাস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য এক 'মাইল' দূরত্ব, এবং BF রেখাস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য '10 মিনিট' সময় নির্দ্দেশ করিতেছে। তাহা হইলে, নিম্নে প্রদত্ত চিত্রের AB এবং BF রেখাদ্বয়ের পার্শ্বস্থিত অঙ্কগুলির অর্থ সুস্পষ্ট।

(i) P, A হইতে রওনা হইয়া ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে, দুই ঘণ্টায় 10 মাইল পথ গমন করিল। অতএব, C যদি এরূপ একটি বিন্দু হয়, যাহার ভুজ ও কোটি যথাক্রমে



10 মাইল এবং 2 ঘণ্টা নির্দ্দেশ করে, তাহা হইলে, AC সরলরেখাই P এর প্রথম দুই ঘণ্টার গতি-নিরূপক লেখ হইবে।

তৃতীয় ঘণ্টায়, P এর গতি-নিরূপক লেখ এইরূপ হইবে যে, উহার উপরিস্থিত

যে কোন বিন্দুর ভুজই সর্ব্বদা 10 মাইল নির্দ্দেশ করিবে ; কারণ, এই ঘণ্টায় P স্থির হইয়া বিশ্রাম করিতেছিল ; কাজেই, উল্লিখিত চিত্রে, CD সরলরেখাই P এর তৃতীয় ঘণ্টার গতি-নিরূপক (অথবা, P এর বিশ্রামের) লেখ হইবে।

তৃতীয় ঘণ্টার পর, P, ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। অতএব, চিত্রে, DM, 6 মাইল পথ, এবং ME, 2 ঘণ্টা সময় নির্দ্দেশ করিলে, DE সরলরেখাই P এর তৃতীয় ঘণ্টার পরবর্ত্তী সময়ের গতি-নিরূপক লেখ হইবে।

স্থতরাং, $ACDE$, এই ভগ্ন-সরলরেখাই P এর গতি-নিরূপক 'সম্পূর্ণ লেখ' হইবে।

(ii) P, A হইতে যাত্রা করিবার 2 ঘণ্টা 40 মিনিট পরে, Q, B হইতে রওনা হইল। কাজেই, চিত্রে, BF সরলরেখাকে Q এর B তে 2 ঘণ্টা 40 মিনিট কালব্যাপী বিশ্রামের লেখ বলিয়া কল্পনা করা যায়।

তৎপরে, Q, B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। অতএব, চিত্রে, G যদি এরূপ একটি বিন্দু হয় যে, FN ও NG রেখাদ্বয় যথাক্রমে 8 মাইল পথ ও 2 ঘণ্টা সময় নির্দ্দেশ করে, তাহা হইলে স্পষ্টতঃ, FG সরলরেখাই Q এর গতি-নিরূপক লেখ হইবে।

(iii) ধর, এই দুইটি লেখ (অর্থাৎ, P এর গতি-নিরূপক 'সম্পূর্ণ লেখ' এবং Q এর গতি-নিরূপক লেখ) H বিন্দুতে ছেদ করিল। H হইতে AB এর উপর HK লম্বটি অঙ্কিত কর, এবং FN কে বর্দ্ধিত করিয়া HK রেখার সহিত V বিন্দুতে মিলিত কর।

অতএব, পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইতেছে যে, HK দ্বারা নির্দ্দিষ্ট সময়ে, P, B অভিমুখে AK দ্বারা সূচিত দূরত্ব, এবং Q, A অভিমুখে BK (অর্থাৎ, FV) দ্বারা সূচিত দূরত্ব, অতিক্রম করিয়াছে ; এবং কাজেই, তাহারা এই সময়ে মিলিত হইয়াছে।

স্থতরাং, তাহাদের সাক্ষাতের নির্ণেয় সময় $= HK$ দ্বারা নির্দ্দিষ্ট সময় $= P$ এর রওনা হওয়ার 5 ঘণ্টা 40 মিনিট পরে ;

এবং A হইতে সাক্ষাতের স্থানের দূরত্ব $= AK$ দ্বারা নির্দ্দিষ্ট দূরত্ব $= 18$ মাইল।

টীকা 1. যেহেতু HV রেখা 3 ঘণ্টা সময় সূচিত করিতেছে, অতএব, B হইতে Q এর রওনা হওয়ার 3 ঘণ্টা পরে, P এবং Q মিলিত হইয়াছে।

টীকা 2. L বিন্দু দিয়া অঙ্কিত OX রেখার সমান্তরাল রেখাটি লেখ দুইটিকে S ও T বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে (পূর্ব্বপৃষ্ঠার চিত্র দেখ)। যেহেতু AL, 4 ঘণ্টা 10 মিনিট সময়, এবং ST, $10\frac{1}{2}$ মাইল দূরত্ব সূচিত করিতেছে, অতএব, পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইতেছে যে, P এর রওনা হওয়ার পর 4 ঘণ্টা 10 মিনিটের সময়, P ও Q এর মধ্যে $10\frac{1}{2}$ মাইল ব্যবধান রহিয়াছে।

প্রশ্নমালা 106

1. দুগ্ধের মূল্য সের প্রতি চারি আনা করিয়া হইলে, 5 সের পর্য্যন্ত দুগ্ধের মূল্য নির্ণয় করা যায়, এরূপ একটি 'মূল্য-নিরূপক লৈখিক চিত্র' অঙ্কিত কর। চিত্র হইতে 3 সের 5 ছটাক দুগ্ধের মূল্য, এবং দশ আনা নয় পাইতে কত পরিমাণ দুগ্ধ পাওয়া যায়, তাহা নিরূপণ কর।

[If milk sells for 4 annas per seer, construct the price-graph of milk, giving the price of any quantity of milk up to 5 seers. From the graph read off the price of 3 seers and 5 chattaks of milk, and also the quantity of milk that can be had for 10 annas and 9 pies.]

2. ফজ্‌লি আমের মূল্য ডজন প্রতি এক টাকা দুই আনা হইলে, 30 টি পর্য্যন্ত আমের মূল্য নির্ণয় করা যায়, এরূপ একটি 'মূল্য-নিরূপক লেখ' অঙ্কিত কর। লেখ হইতে, 17 টি আমের মূল্য, এবং 1 টাকা 12 আনা 6 পাইতে কত আম পাওয়া যায়, তাহা নির্ণয় কর।

[If *Fazli* mangoes be worth one rupee two annas a dozen, construct a price-graph for mangoes, giving the price of any number up to 30. Read off from the graph the price of 17 mangoes and also the number of mangoes that can be had for Re. 1. 12as. 6p.]

3. কোন ব্যক্তি ঘণ্টায় 4 মাইল হিসাবে গমন করিলে, তাঁহার 'গতি-নিরূপক লেখ' অঙ্কিত কর। লেখ হইতে, 13 মাইল যাইতে তাঁহার কত সময় লাগিবে, এবং $4\frac{3}{4}$ ঘণ্টায় তিনি কত মাইল গমন করিবেন, তাহা নির্ণয় কর।

[If a man walks at the rate of 4 miles an hour, construct a graph of his motion. Read off from the graph the time in which he travels 13 miles, and also the number of miles he travels in $4\frac{3}{4}$ hours.]

4. 'এক হাত', 1·5 ফুটের সমান হইলে, একটি 'হাত-ফুট-পরিবর্ত্তক লেখ' অঙ্কিত কর। লেখ হইতে, $5\frac{3}{4}$ হাতে কত ফুট, এবং $6\frac{3}{4}$ ফুটে কত হাত, তাহা নির্ণয় কর।

[If one cubit be equal to 1·5 feet, construct a conversion-graph for cubits and feet. Read off from the graph the number of feet that are equivalent to $5\frac{3}{4}$ cubits, and also the number of cubits that are equivalent to $6\frac{3}{4}$ feet.]

5. *A* কোন নির্দ্দিষ্ট স্থান হইতে এক নির্দ্দিষ্ট দিকে ঘণ্টায় 3 মাইল গতিতে যাত্রা করিল; এবং *B*, *A* এর এক ঘণ্টা পরে ঐ স্থান হইতে ঐ দিকেই ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে যাত্রা করিল। *A* এবং *B* এর 'গতি-নিরূপক লেখ' দুইটি অঙ্কিত কর, এবং উহা হইতে, *B*, *A* কে কোথায় এবং কোন্ সময়ে ধরিবে, তাহা নির্ণয় কর।

[*A* starts from a place and walks in a given direction at the rate of 3 miles an hour ; *B* starts from the same place one hour later and

moves in the same direction at the rate of 5 miles an hour. Draw the motion-graphs of A and B, and find when and where B overtakes A.]

6. A এবং B, 20 মাইল দূরবর্ত্তী দুইটি ষ্টেশন। P, A হইতে B অভিমুখে ঘণ্টায় 3 মাইল গতিতে, এবং Q, B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টায় 2 মাইল গতিতে, একই সময়ে যাত্রা করিল। P এবং Q এর 'গতি-নিরূপক লেখ' দুইটি অঙ্কিত কর। লেখ হইতে, উহারা কোথায় এবং কোন্ সময়ে মিলিত হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

[A and B are two stations 20 miles apart. P starts from A and travels towards B at the rate of 3 miles an hour ; whilst Q starting from B travels towards A at the rate of 2 miles an hour. Construct the motion-graphs of P and Q, and find when and where they meet.]

7. পঞ্চাশটি একই জাতীয় বস্তুর মূল্য 3 টাকা 2 আনা হইলে, 50 টি পর্য্যন্ত বস্তুর মূল্য নির্ণয় করা যায়, এরূপ একটি 'মূল্য-নিরূপক লৈখিক চিত্র' অঙ্কিত কর। উহা হইতে, 19 টি বস্তুর মূল্য এবং 2 টাকা 7 আনায় কতটি বস্তু পাওয়া যায়, তাহা নির্ণয় কর।

[Fifty articles of the same kind cost Rs. 3. 2as. Construct a graph from which you can read off the cost of any number of articles up to 50. Hence, find the cost of 19 articles, and the number of articles that you would get for Rs. 2. 7as.]

8. 1 কিলোগ্রাম = 2·2 পাউণ্ড হইলে, এরূপ একটি 'কিলোগ্রাম-পাউণ্ড-পরিবর্ত্তক লৈখিক চিত্র' অঙ্কিত কর, যাহা হইতে 15 পাউণ্ড পর্য্যন্ত ওজনের তুল্য ওজনবিশিষ্ট কিলোগ্রামের সংখ্যাও নিরূপণ করা যায়। এই চিত্র হইতে, 11 পাউণ্ড কত কিলোগ্রামের সমান, তাহা নির্ণয় কর।

[Given that 1 kilogramme = 2·2 lbs. ; construct a graph which will enable you to read off the number of kilogrammes that are equivalent to any given number of lbs. up to 15 lbs. Read off the number of kilogrammes in 11 lbs.]

9. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে তিন ঘণ্টা কাল ভ্রমণ করিবার পর দেড় ঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া পুনরায় ঘণ্টায় আড়াই মাইল বেগে চলিতে লাগিলেন। তাঁহার ভ্রমণের 'গতি-নিরূপক লেখ' অঙ্কিত কর।

[A man travels for 3 hours at the rate of 2 miles an hour, at the end of which he takes rest for an hour and a half, and then starts to walk at the rate of two miles and a half per hour. Construct the graph of his motion.]

10. এক ব্যক্তি B হইতে C অভিমুখে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে চলিতে লাগিলেন। তিন ঘণ্টা পরে তিনি তাঁহার মত পরিবর্ত্তন করিয়া পুনরায় B অভিমুখে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে প্রত্যাবর্ত্তন করিতে লাগিলেন। এইরূপভাবে দুই ঘণ্টা কাল চলিবার পর, পুনরায়

তাঁহার মত পরিবর্ত্তিত হইল ; এবং তিনি C অভিমুখে ঘণ্টায় 7 মাইল বেগে দৌড়াইতে লাগিলেন। তাঁহার গতি-নিরূপক একটি লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর।

[A man starts from a place B to walk towards C at the rate of 4 miles an hour. After 3 hours he changes his mind and walks back towards B at the rate of 3 miles an hour. At the end of 2 hours again he suddenly changes his mind and begins to run towards C at the rate of 7 miles an hour. Draw a graph of his motion.]

11. কোন এক রাস্তার উপর A, B এবং C পর পর তিনটি ষ্টেশন, এবং A হইতে B এর দূরত্ব 6 মাইল। Q, ঠিক মধ্যাহ্নে B হইতে C অভিমুখে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলিতে লাগিল ; এবং P, অপরাহ্ণ দেড়টার সময় A হইতে B অভিমুখে ঘণ্টায় $6\frac{1}{2}$ মাইল বেগে দৌড়াইতে আরম্ভ করিল। উহাদের গতির লৈখিক চিত্র দুইটি অঙ্কিত কর ; এবং ঐ চিত্র হইতে, P, কখন্ এবং কোন্ স্থানে Q কে ধরিবে, তাহা নির্ণয় কর।

[A, B and C are three stations in order on the same road, the distance between A and B being 6 miles. Q starts from B at noon to walk towards C at the rate of 3 miles an hour, and at 1-30 P. M. P starts from A to run towards C at the rate of $6\frac{1}{2}$ miles an hour. Draw graphs of their motion, and find when and where P will overtake Q.]

12. কোন ব্যক্তি 40 দিনে 620 টাকা ব্যয় করেন। এরূপ একটি লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর, যদ্দ্বারা যে কোন নির্দ্দিষ্টসংখ্যক দিনে তিনি কত পরিমাণ টাকা ব্যয় করেন, তাহা নিরূপণ করা যায়। এই চিত্র হইতে, 28 দিনে তিনি কত ব্যয় করিবেন, তাহা নির্ণয় কর।

[A man spends Rs. 620 in 40 days. Draw a graph to give his expenditure in any number of days. Determine from the graph the amount spent in 28 days.]

13. বেলা 3 টা ও 4 টার মধ্যে, কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটি একত্রিত হইবে তাহা লৈখিক চিত্র-সাহায্যে নির্ণয় কর।

[At what time between 3 and 4 o'clock are the two hands of a watch together ? Determine it from the graph.]

14. টাকা প্রতি 5 পাই করিয়া আয়-কর (income-tax) ধার্য্য আছে। এরূপ একটি লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর, যদ্দ্বারা 3000 হইতে 5000 পর্য্যন্ত টাকার আয়-কর নির্ণয় করা যায়। এই চিত্র হইতে, কত পরিমাণ আয়ের আয়-কর 85 টাকা এবং 4350 টাকা আয় হইলে, কত আয়-কর দিতে হইবে, তাহা নিরূপণ কর।

[An income-tax of 5 pies per rupee is in force. Draw a graph to show the tax on all incomes from Rs. 3000 to Rs. 5000 and determine

the income corresponding to a tax of Rs. 85 and the tax corresponding to an income of Rs. 4350.]

15. কলিকাতা হইতে রাণাঘাটগামী একখানি 'এক্সপ্রেস রেলগাড়ী' (express train) এবং নৈহাটি হইতে কলিকাতাগামী অন্য একখানি স্থানীয় (local) রেলগাড়ীর বিভিন্ন ষ্টেশনে আগম ও নির্গমের সময় নিম্নে প্রদত্ত হইল। রেলগাড়ী দুইখানির প্রত্যেকটি বরাবর সমবেগে চলিতে থাকিলে, এবং স্থানীয় গাড়ীখানি (local train) নৈহাটি হইতে কলিকাতার মধ্যবর্ত্তী প্রত্যেক ষ্টেশনে এক মিনিট করিয়া থামিলে, উহারা কোথায় এবং কোন্ সময়ে পরস্পরের সহিত মিলিত হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

কলিকাতা হইতে মাইল নিরূপিত দূরত্ব :		ছাড়িবার সময় :	
46	রাণাঘাট		17-56
24	নৈহাটি	16-24	
22	কাকিনাড়া	16-29	
19	শ্যামনগর	16-36	
17	ইছাপুর	16-42	
15	পল্তা	16-45	
14	ব্যারাকপুর	16-49	
13	টিটাগড়	16-53	
12	খড়দহ	16-57	
10	সোদপুর	17- 2	
9	আগরপাড়া	17- 6	
8	বেলঘরীয়া	17-11	
5	দমদম	17-19	
	কলিকাতা	17-31	16-42

[B. C. S., 1922.]

[The following table shows the timings of two trains, one an express from Calcutta to Ranaghat, and the other a local from Naihati to Calcutta. Find by graphical methods when and where the trains meet, assuming that all runs are at constant speeds and that the local train waits one minute at each station between Naihati and Calcutta.

Distance from Calcutta			
46	Ranaghat	dep.	17-56
24	Naihati	16-24	↑
22	Kakinara	16-29	
19	Shamnagar	16-36	
17	Ichhapur	16-42	
15	Palta	16-45	
14	Barrackpur	16-49	
13	Tittagarh	16-53	
12	Khardah	16-57	
10	Sodepur ↓	17- 2	
9	Agarpara	17- 6	
8	Belghurria	17-11	
5	Dum-Dum	17-19	
	Calcutta	17-31	16-42]

[B. C. S. 1922.]

বিবিধ প্রশ্নমালা IV

I

1. নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :
   (i) $(x+7)(x+9)(x+11)(x+13)$;
   (ii) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$.

2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $7(z+x)^3-(x-y)^3-(y+z)^3$.

3. সরল কর : $(a-b)^2(a+b-2c)^2+(b-c)^2(b+c-2a)^2$
   $+(c-a)^2(c+a-2b)^2$, যখন $a+b+c=0$.

4. $x+y+z=4xyz$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{x}{1-4x^2}+\frac{y}{1-4y^2}+\frac{z}{1-4z^2}=\frac{16xyz}{(1-4x^2)(1-4y^2)(1-4z^2)}.$$

5. $2s = a + b + c$ হইলে, দেখাও যে,

$$1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}.$$

6. দেখাও যে, $$\frac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2bc} + \frac{(c+a)(c^2+a^2-b^2)}{2ca} + \frac{(a+b)(a^2+b^2-c^2)}{2ab} = a+b+c.$$

7. $\frac{1}{a} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)$ হইলে,

$$\frac{qr}{(a-q)(a-r)} + \frac{rp}{(a-r)(a-p)} + \frac{pq}{(a-p)(a-q)}$$ এর মান নির্ণয় কর।

8. দেখাও যে, $(x^2-y^2)^3 + (y^2-z^2)^3 + (z^2-x^2)^3$ কে x^2-y^2, y^2-z^2 এবং z^2-x^2 এর প্রত্যেকটি দ্বারাই ভাগ করা যায়।

9. $a : b = x : y$ হইলে, দেখাও যে,

$$ab : xy :: a^2+b^2 : x^2+y^2.$$

10. সরল কর : $$\frac{\sqrt{x^2-y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}+y} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x-\sqrt{x^2-y^2}}.$$

II

1. $x+y+z=15$, এবং $xy+yz+zx=75$ হইলে, $x^3+y^3+z^3-3xyz$ এর মান নির্ণয় কর।

2. দেখাও যে, $$(a+b-2c)^3 + (b+c-2a)^3 + (c+a-2b)^3 = 3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b).$$

3. দেখাও যে, $$(b-c)(b+c-2a)^2 + (c-a)(c+a-2b)^2 + (a-b)(a+b-2c)^2 = 9(a-b)(b-c)(a-c).$$

4. সরল কর : $$\frac{1}{bc(b-a)(c-a)} + \frac{1}{ca(c-b)(a-b)} + \frac{1}{ab(a-c)(b-c)}.$$

5. $x = \frac{b}{a-b}$ এবং $y = \frac{a}{a+b}$ হইলে, $\frac{y}{x} + \frac{y-1}{x+1}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $ab + 2a^2 - 3b^2 - 4bc - ac - c^2$ এবং $9ac + 2a^2 - 5ab + 4c^2 + 8bc - 12b^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

7. $6x^3 - 11x^2 + 5x - 3$ এবং $9x^3 - 9x^2 + 5x - 2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(c+a)(a+b)+(c-a)(a+b)(b+c).$$

9. $\dfrac{x}{a+b-c}=\dfrac{y}{a-b+c}=\dfrac{z}{b+c-a}$ হইলে, দেখাও যে, প্রত্যেকটি ভগ্নাংশই $\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$ এর সমান।

10. সমাধান কর :

$$\left.\begin{array}{l}2^x\times 4^y=32\\ 3^x\div 9^y=\ \ 3\end{array}\right\}.$$

III

1. $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^5$ কে x এর অধঃক্রমিক শক্তিতে বিস্তার কর।

2. দেখাও যে, $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a).$

অতএব, প্রমাণ কর যে,

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3=24xyz.$$

3 $a=\cdot4278$, $b=1\cdot2345$ এবং $c=\cdot8067$ হইলে, $a^3-b^3+c^3+3abc$ এর মান নির্ণয় কর।

4. দেখাও যে, $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$

$$=(a-b)(a-c)(b-c).$$

5. $6x^3-25x^2+23x-6$, $2x^2-7x+3$ এবং $6x^2-7x+2$ এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

6. $x^5+11x-12$ এবং x^5+11x^3+54 এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

7. সরল কর : $\dfrac{a^3(b+c)}{(c-a)(b-a)}+\dfrac{b^3(c+a)}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{c^3(a+b)}{(a-c)(b-c)}.$

8. দেখাও যে, $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ কে $b-c$, $c-a$ এবং $a-b$ এর প্রত্যেকটির দ্বারা যথাযথরূপে ভাগ করা যায়।

9. বর্গমূল নির্ণয় কর :

$$24+\frac{x^2}{y}+8\left(\frac{2y}{x^2}-xy^{-\frac{1}{2}}\right)-\frac{32\sqrt{y}}{x}\text{ এর।}$$

10. $a:b::c:d$ হইলে, দেখাও যে,

$$(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2.$$

IV

1. $a+b=2$ এবং $ab=7$ হইলে, a^5+b^5 এর মান নির্ণয় কর।

2. $2(a^6+b^6)-ab(a^2+b^2)(2ab-3a^2+3b^2)$ কে পাঁচটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

3. $a=2658$, $b=2664$ এবং $c=2678$ হইলে, $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর মান নির্ণয় কর।

4. $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ এবং $z=a+b-c$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

5. $x=\frac{a}{a+b}$ এবং $y=\frac{b}{a-b}$ হইলে, $\frac{2x^2+5xy+3y^2}{2x^2+xy-3y^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. দেখাও যে, $8(a+b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$
$=3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$.

7. $x^2-3xy-10y^2$, $x^2+2xy-35y^2$ এবং $x^2-8xy+15y^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর; এবং নির্ণীত ল. সা. গু. কে উক্ত রাশিগুলির গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

8. $x=15$ হইলে, x এর মান সোজাসুজি না বসাইয়া, অন্য উপায়ে $x^5-18x^4+47x^3-31x^2+19x-60$ এর মান নির্ণয় কর।

9. $a:b=c:d=e:f$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$a:b::\sqrt{m^2a^2+n^2c^2-p^2e^2}:\sqrt{m^2b^2+n^2d^2-p^2f^2}$.

10. x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ রাশি দুইটির প্রত্যেকটিই $x+a$ দ্বারা বিভাজ্য হইলে, দেখাও যে, $a=\frac{q-q'}{p-p'}$.

V

1. $x=\frac{a-b}{m-c}$, $y=\frac{b-c}{m-a}$ এবং $z=\frac{c-a}{m-b}$ হইলে,
দেখাও যে, $x+y+z+xyz=0$.

2. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{a^3}{b^3}+\frac{c^3}{d^3}=\frac{b^3}{a^3}+\frac{d^3}{c^3}$.

3. $x=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ হইলে, $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-a-b)^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

4. $x = \frac{2ac}{a+c}$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{(x-a)^2+(x-c)^2}{a^2+c^2} + \frac{4ac}{(a+c)^2}$ এর মান, a ও c এর যে কোন মানের জন্য সর্ব্বদা একই থাকিবে।

5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $6a^4 + 43a^3b - 56a^2b^2 + 43ab^3 + 6b^4$;

(ii) $12x^4 - 37x^3 + 45x^2 - 37x + 12$;

(iii) $abx^4 + (ac+b^2)x^3 + (2ab+bc)x^2 + (ac+b^2)x + ab$.

6. দেখাও যে, $(x+y)^3 - (y+z)^3 + (z-x)^3 = 3(x+y)(y+z)(x-z)$.

7. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

(i) $x^3 - (a+p)x^2 + (q+ap)x - aq$ এবং $x^3 + ax^2 - 3a^2x + a^3$;

(ii) $x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz$ এবং $x^2 - 2xy + y^2 - 2xz + 2yz + z^2$.

8. x-যুক্ত কোন মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলে যদি উহার মান শূন্য হয়, তবে দেখাও যে, $x-a$ উক্ত রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক।

[If a rational and integral expression in x vanishes for $x=a$ prove that $x-a$ is a factor of the expression.]

9. $a : b :: c : d$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{4a^6+5b^6}{4c^6+5d^6} = \frac{a^3b^3}{c^3d^3}.$$

10. বর্গমূল নির্ণয় কর :

$25x^{-2} - 12x + 16x^{-8} + 4x^4 - 24x^{-5}$ এর।

VI

1. দেখাও যে, $(a^2-a+1)(b-c) + (b^2-b+1)(c-a) + (c^2-c+1)(a-b)$
$= (a^2-a+1)(b^2-c^2) + (b^2-b+1)(c^2-a^2) + (c^2-c+1)(a^2-b^2)$.

2. $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{ab}{(x-a)(x-b)} + \frac{bc}{(x-b)(x-c)} + \frac{ca}{(x-c)(x-a)} = 0.$$

3. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = 0$.

4. $(x^2+y^2+z^2+2xy)^2 - 2(x+y)^2z^2$ কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

5. সরল কর :

$$\left\{\frac{y^2-yz+z^2}{x}+\frac{x^2}{y+z}-\frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\right\}\cdot\frac{\frac{2}{y}+\frac{2}{z}}{\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}}+(x+y+z)^2.$$

6. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

(i) $x^3+(5m-3)x^2+3m(2m-5)x-18m^2$ এবং $x^3+(m-3)x^2-m(2m+3)x+6m^2$.

(ii) $10x^3-54x^2+87x-45$ এবং $5x^4-36x^3+87x^2-90x+54$.

7. $2x^4+x^3-9x^2+8x-2$ এবং $2x^4-7x^3+11x^2-8x+2$ এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

8. প্রকৃত ভাগ না করিয়া দেখাও যে, $x^{55}-y^{55}$, $x-y$ দ্বারা বিভাজ্য এবং উহাকে $x+y$ দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগশেষ $-2y^{55}$ হইবে।

9. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, দেখাও যে, $a(a+b+c+d)=(a+b)(a+c)$.

10. বর্গমূল নির্ণয় কর : $\frac{9x^2}{a^2}+\frac{a^2}{9x^2}-\frac{6x}{a}-\frac{2a}{3x}+3$ এর।

VII

1. $1+x+y$, $1-x+y$, $1+x-y$ এবং $x+y-1$ এর ক্রমিক গুণফলকে $1+2xy-x^2-y^2$ দ্বারা ভাগ কর।

2. সরল কর : $\frac{bc(x-a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(x-b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab(x-c)}{(c-a)(c-b)}$.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1896]

3. প্রমাণ কর যে, $2\{(b+c-2a)^4+(c+a-2b)^4+(a+b-2c)^4\}$
$=\{(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2+(a+b-2c)^2\}^2$.

4. নিম্নলিখিত রাশিসমূহকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত কর :

(i) $\dfrac{a^2}{\frac{a^2+b^2}{a+b}-b}+\dfrac{b^2}{\frac{a^2+b^2}{a+b}-a}$; (ii) $\dfrac{\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}+\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}+\frac{1+x}{1-x}}$.

5. p এবং q এর সাংখ্যমান নির্ণয় করিয়া, $41x^2-60xy+104y^2$ কে $(px+qy)^2+4(qx-py)^2$ এর আকারে প্রকাশ কর।

6. $6x^3-17x^2+11x-2$ এবং $12x^3-4x^2-3x+1$ এর ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

7. দেখাও যে, $(a+b)(m^2+n^2)+am(n-3m)+bn(m-3n)$ এর একটি গুণনীয়ক $m-n$. a এর মান কত হইলে, x^3+5x+a, $x-3$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে?

8. n একটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $3^{2n+1}+2^{2n+1}$ এর সাংখ্যমানের এককস্থানীয় অঙ্কটি 5 হইবে।

9. $a:b::b:c$ হইলে, দেখাও যে, $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$.

10. 8 টা ও 9 টার মধ্যে কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর লম্ব হইবে?

VIII

1. দেখাও যে, $(a-b)(x-a)(x-b)+(b-c)(x-b)(x-c)$
$+(c-a)(x-c)(x-a)=(a-b)(b-c)(a-c)$.

2. দেখাও যে, $4(a^2+ab+b^2)^3-(a-b)^2(a+2b)^2(2a+b)^2$
$=27a^2b^2(a+b)^2$.

3. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে, $16s(s-a)(s-b)(s-c)$
$=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$.
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1867]

4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :
$$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2-(a+b)^2(c-d)^2-(a-b)^2(c+d)^2.$$

5. সরল কর : $\dfrac{(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3}{(y+z)(y-z)^3+(z+x)(z-x)^3+(x+y)(x-y)^3}$.

6. সরল কর : $\dfrac{x^2-yz}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2+zx}{(y+z)(y-x)}+\dfrac{z^2+xy}{(z-x)(z+y)}$.
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1865]

7. n একটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $2^{4n}-1$, 15 দ্বারা বিভাজ্য।

8. x^4+2x^2+1, , $x^6+x^4-x^2-1$ এবং x^4-1 এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর।
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1869]

9. সরল কর : $\dfrac{(x^{a+b})^2.(x^{b+c})^2.(x^{c+a})^2}{(x^a.x^b.x^c)^4}$.

10. $x=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ হইলে, $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1. [২-৩ পৃষ্ঠা]

1. 100.	2. 10.	3. 12 মাইল।	4. 8 মাইল।
5. 9.	6. 12.	7. 45 মিনিট।	8. 15 মিনিট।
9. 32.	10. $\frac{1}{64}$; $20\frac{1}{4}$.	11. 5 বর্গগজ।	12. 7 শি. 6 পে.।
13. 20.	14. 9.	15. 28.	16. 4.
17. 4480.	18. 900.	19. 1952.	20. 720.

প্রশ্নমালা 2. [১৩-১৪ পৃষ্ঠা]

1. $10-a$.	2. $17-x$.	3. $7-x$ বা $7+x$.	4. $b-y$ বা $b+y$.
5. $\frac{22}{a}$.	6. $\frac{100}{x}$.	7. $5p$ বা $\frac{p}{5}$.	8. $15q$ বা $\frac{15}{q}$.

9. ab মাইল। 10. $\frac{z}{y}$ ঘণ্টায়। 11. $(a-15)$ বৎসর ; $(a+30)$ বৎসর।

12. $x+30$ বৎসর। 13. ab বর্গগজ। 14. $\frac{x}{y}$ ফুট।

15. $10b+7$. 16. $80+a$. 17. $100a+10b+c$.

18. $100c+10b+a$. 19. $\frac{x}{4}$. 20. $\frac{500y}{1200+x}, \frac{700y}{1200+x}, \frac{xy}{1200+x}$.

প্রশ্নমালা 3. [২০ পৃষ্ঠা]

1. 34.	2. 0.	3. 4.	4. 1.	5. $5\frac{1}{3}$.
6. $1\frac{1}{3}$.	7. 6.	8. 4.	9. 12.	10. 8.
11. 2.	12. $\frac{1}{2}$.	13. 5.	14. 80.	15. 29.
16. 325.	17. 0.	18. 14.	19. 114.	20. 4.
21. 69.	22. 19.	23. 0.	24. 325.	25. 9.

প্রশ্নমালা 4. [২৩-২৪ পৃষ্ঠা]

1. 24.	2. $37\frac{1}{3}$.	3. 4.	4. 720.	5. $3\frac{1}{3}$.
6. $\frac{2}{3}$.	7. 1.	8. 40.	9. $\frac{2}{3}$.	10. $\frac{8}{9}$.
11. 0.	12. 50.	13. 1.	14. 75.	15. 100.
16. 200.	17. 1520.	18. 41·625.	19. 22680.	20. 845000.

প্রশ্নমালা 5. [২৬-২৭ পৃষ্ঠা]

1. 4. 2. 2. 3. 6. 4. 18. 5. 8.
6. 16. 7. 32. 8. 256. 9. 11. 10. 21.
11. 11. 12. 9. 13. 3. 14. 162. 15. 18.
16. 9. 17. 0. 18. 21. 19. 23. 20. 1.
21. 98. 22. 50. 23. 9. 24. 42. 25. 51.
26. 2805. 27. 7. 28. 171. 29. 2401. 30. 192.
31. 1029. 32. 1218. 33. 48. 34. 143. 35. 18750.
36. 16. 37. 160. 38. 78. 39. 7. 40. 2.

প্রশ্নমালা 6. [৩২ পৃষ্ঠা]

1. A এর ক্ষতি = £100. 2. -70. 3. -25.
4. -100. 5. -30. 6. $4, -3, 5$.
7. $15, -10, -20, 30$. 8. $-15, 10, 20, -30$.

প্রশ্নমালা 7. [৩৫ পৃষ্ঠা]

1. -22. 2. -18. 3. (i) -31, (ii) -41. 4. -19.
5. -1180. 6. -222. 7. -2034. 8. 658.
9. -7128. 10. -220416417.

প্রশ্নমালা 8. [৩৭ পৃষ্ঠা]

1. 3. 2. -5. 3. -4. 4. -47. 5. -14.
6. -51. 7. 16. 8. -8. 9. -32. 10. 1.

প্রশ্নমালা 9. [৪১-৪৩ পৃষ্ঠা]

1. $-x+y$. 2. $m^2+n^2+p^2$. 3. $c^2+a^2b-a^2$.
4. $2abc-3mnp^2$. 5. $2a^3b-9b^2c^2-2df$.
6. $-6x^4y-11xyz-10x^2y^3$. 7. $4(a^2bc-b^2ca+c^2ab)$.
8. $-25x^3mn+16m^3nx$. 9. -14. 10. -234.
11. 92. 12. 5. 13. 177. 14. -4653.
15. -12015. 16. $-6a+b-3c$. 17. $2x-z$.
18. $2x^3+9x^2+7$. 19. $-a+2b-8d$. 20. $2x^2-3y^2$.
21. 153. 22. -125. 23. 200. 24. 120. 25. 400.

প্রশ্নমালা 10. [৪৫ পৃষ্ঠা]

1. -10. 2. 10. 3. -6. 4. -22. 5. 0.
6. -291. 7. -77. 8. 83. 9. 17. 10. 177.

প্রশ্নমালা 11. [৪৭ পৃষ্ঠা]

1. $2a+3b-2c$. 2. $-3a+3b+4c$. 3. $3x+2y-3z$.
4. $2m^2-2m-4$. 5. $2x^2+y^2-z^2$. 6. $-2y^2-7xy+3x^2$.
7. $4a^2-7ab-b^2$. 8. $7bc-7c^2+10xy$. 9. $-x^3+x^2-x+2$.
10. $-(x+2y)$. 11. $3x-4y+5z$. 12. $-2m^2-5m+6$.
13. $-(3a^2b+3ab^2)$. 14. $2a^2b^2$. 15. $-3a^2b+3ab^2$.

প্রশ্নমালা 12. [৫০-৫১ পৃষ্ঠা]

1. $-4a+8b$. 2. $7x-4y$. 3. $-2x$. 4. $-4a+2b$.
5. $5a+2b$. 6. $2b$. 7. 6. 8. 8. 9. $-2a+7b$.
10. 0. 11. $-2x+5y+7z$. 12. $-2c$. 13. $15x-15y$.
14. $8a-8b$. 15. $11m-7n$. 16. $6a-6b-18c$.
17. $6x-6y-20z$. 18. $x-y-13z$. 19. $-3x-y-z$.
20. $a-11b+17c$. 21. $2x-12y+20z$. 22. $5a-b+11c$.
23. $x-3y+2z$. 24. $11a-2b-16c$.
25. $a-(b+c-d)+(-m+n-x)+y-z$.
26. $a-\{b+c-d+m+(-n+x-y+z)\}$.
27. $\{a-b-(c-d+m)\}-\{-n-(-x+y-z)\}$.
28. $-\{-a-(-b-c)\}-\{-d-(-m+n)\}-\{x-(y-z)\}$.

প্রশ্নমালা 13. [৫৪ পৃষ্ঠা]

1. 15. 2. 18. 3. 36. 4. -32.
5. -45. 6. -78. 7. -24. 8. -35.
9. -45. 10. 36. 11. 60. 12. 64.

প্রশ্নমালা 14. [৫৫-৫৬ পৃষ্ঠা]

1. 54. 2. 47. 3. -8. 4. -393. 5. -111.
6. 30. 7. 0. 8. 1136. 9. -280.

প্রশ্নমালা 16. [৬১-৬২ পৃষ্ঠা]

14. $-6x^7y^5$. 15. $21a^3b^4c^3$. 16. $40x^{17}y^{16}$.
17. $-156x^{10}y^9z^6$. 18. $140x^6y^7z^{20}$. 19. $-4x^{11}y^7$.
20. $-70a^{15}b^{12}$. 21. $48x^{16}y^{10}z^7$. 22. $24x^7y^8z^7$.

প্রশ্নমালা 17. [৬২ পৃষ্ঠা]

1. $-10x^7$. 2. $-20a^4b^6$. 3. $21m^7n^8$. 4. $-18x^4y^7$.
5. $3a^7b^{10}$. 6. $-40m^8n^7$. 7. $50x^2y^3z^3$. 8. $-24x^4y^4z^4$.
9. $48x^5y^5z^5$. 10. $25a^5b^9c^{13}$. 11. $-24x^3y^8z^5$.
12. $32a^3b^2x^2y^3$. 13. $35a^3b^3z^4$. 14. $-60a^6x^7y^5$.
15. $70x^5y^5z$. 16. $-18a^8b^6c^6$. 17. $63a^9x^8y^2$.
18. $160x^{14}y^7z^7$. 19. $65a^{10}b^{14}c^{20}$. 20. $112a^{13}x^{10}y^9z^7$.

প্রশ্নমালা 18. [৬৫-৬৬ পৃষ্ঠা]

1. $-2x^2+xy$. 2. $-5a^2+10ab-15ac$. 3. $8x^2y-12xy^2$.
4. $2a^3bc-3ab^3c-abc^3$. 5. $-3x^3y^2+6x^2y^3+3xy^4$.
6. $21a^2b^4-7ab^4-35a^3b^2+7a^2b^3$. 7. $-6a^4x+8a^3x^2-10a^3x$.
8. $-8m^4n+12m^3n^2-20m^2n^3$. 9. $-a^3b^2c^2+a^2b^3c^2-a^2b^2c^3$.
10. $x^3yz+xy^3z+xyz^3-xy^2z^2-yz^2x^2-zx^2y^2$.
11. $12c^4d^5-18c^3d^7+30c^3d^6+24c^4d^6$.
12. $-16a^7b^3+12a^6b^4-10a^5b^5+8a^4b^6$. 13. $7x^4-2x^2$.
14. 0. 15. $9x^6-25y^4$. 16. x^6+4x^2.
17. $a^{12}b^6+4a^4b^2$. 18. $4a^{18}b^{12}+81a^6b^4$. 19. $3a^2y$.
20. (i) $x^3+y^3+z^3-3xyz$. (ii) 0.

প্রশ্নমালা 19. [৭০ পৃষ্ঠা]

1. $-4x^3$. 2. $-3x^4$. 3. $4a^4x^3$. 4. $3x^5y^5$.
5. $2a^2b^2$. 6. $-2p^2q^2$. 7. $5x^6y^4z$. 8. $-8a^3c^2$.
9. $-3m^5n^6p$. 10. $3a^2c^2$. 11. $-5x^4y^2$. 12. $3a^6x^5y^4z^2$.
13. a^{44}. 14. $-7x^{48}$. 15. $-7m^{18}$. 16. $-7a^{41}b^{120}$.

প্রশ্নমালা 20. [৭১ পৃষ্ঠা]

1. $3a-2b$. 2. $-2a^2+3b^2$. 3. $2a^2-3b^2$.
4. $-4xy+3x^2$. 5. $-2x^2+3y^2$. 6. $n^2-3mn+4m^2$.

7. $ax-2x^2+3a^2$. 8. $-3x^2+2a^2-5ax$.
9. $2m^2n^2-3m^4-4n^4$. 10. $-p^2+\frac{5}{8}pq+\frac{3}{8}q^2$.
11. $-2xy^2+3x^3-4y^3$. 12. $\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}a^3-\frac{9}{4}a^2x$.
13. $3xa+\frac{15}{4}a^2-4x^2$. 14. $5m^4n^2-7m^2n^4-8p^6$.
15. $b^2c^2x^2y^2-2a^2c^2y^2z^2+3a^2b^2x^2z^2$.

প্রশ্নমালা 21. [৭৩-৭৪ পৃষ্ঠা]

1. $x^2+8x+16$. 2. $9a^2+12a+4$. 3. $x^2+4xy+4y^2$.
4. $4x^2+28xy+49y^2$. 5. $9a^2+24ab+16b^2$. 6. $25a^2+70ab+49b^2$.
7. $a^2y^2+6axby+9b^2x^2$. 8. $a^4+4a^2bc+4b^2c^2$.
9. $9x^4+12x^2y^2+4y^4$. 10. $16x^4+8x^2y^3+y^6$.
11. $a^2+4b^2+9c^2+4ab+6ac+12bc$. 12. $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2a^2bc+2abc^2$. 13. $4p^2+9q^2+16r^2+12pq+16pr+24qr$.
14. $x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2$. 15. $4x^2+9y^2+16z^2+12xy+16xz+24yz$. 16. $x^4+y^6+z^8+2x^2y^3+2x^2z^4+2y^3z^4$.
17. $x^2+y^2+4a^2+9b^2+2xy+4xa+6xb+4ya+6yb+12ab$.
18. $9a^2+16b^2+c^2+4d^2+24ab+6ac+12ad+8bc+16bd+4cd$.
19. $4a^2+x^2+16y^2+9z^2+4ax+16ay+12az+8xy+6xz+24yz$.
20. $16m^2+9n^2+9p^2+4q^2+24mn+24pm+16mq+18np+12nq+12pq$.
21. $4x^2$. 22. $4z^2$. 23. $16a^2$. 24. $a^2+4ab+4b^2$.
25. $x^2+2xy+y^2$. 26. 1. 27. 0. 28. 4.
29. 9. 30. 1. 31. 16. 32. 25.

প্রশ্নমালা 22. [৭৬ পৃষ্ঠা]

1. x^2-6x+9. 2. $4x^2-20x+25$. 3. $9x^2-30xy+25y^2$.
4. $a^2x^2-2abxy+b^2y^2$. 5. $64m^2-48mn+9n^2$.
6. $p^2m^2-2pqmn+q^2n^2$. 7. $p^4-2p^2mn+m^2n^2$.
8. $x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4$. 9. $x^6-4x^4z+4x^2z^2$.
10. $9a^6-30a^3b^3+25b^6$. 11. $x^2y^2z^2+2abcxyz+a^2b^2c^2$.
12. $x^4y^2z^2-2x^3y^3z^2+y^4z^2x^2$. 13. $a^4x^6-2a^2b^2x^4y^4+b^4y^8$.
14. $a^2+4b^2+4c^2-4ab-4ac+8bc$. 15. $4x^2+9y^2+16z^2-12xy-16xz+24yz$. 16. $9m^2+16n^2+25q^2-24mn-30mq+40nq$.

17. $a^4+9b^4+25c^4-6a^2b^2-10a^2c^2+30b^2c^2$. **18.** $x^2+y^2+a^2+b^2-2xy-2xa-2xb+2ya+2yb+2ab$. **19.** $a^2+4x^2+9b^2+16y^2-4ax-6ab-8ay+12xb+16xy+24by$. **20.** 7921.
21. 13689. **22.** 248004. **23.** 986049. **24.** $36b^2$. **25.** $64b^2$.
26. $49a^2$. **27.** $121z^4$. **28.** $25b^2c^2+c^2a^2+10bc^2a$. **29.** 4.
30. 81. **31.** 16. **32.** 25. **33.** 144.

প্রশ্নমালা 23. [৭৮-৭৯ পৃষ্ঠা]

1. x^2-9. **2.** $25x^2-169$. **3.** x^2-4a^2.
4. $a^2x^2-b^2y^2$. **5.** $a^2m^2-n^4$. **6.** $x^2y^2-y^2z^2$.
7. $x^4-4y^2z^2$. **8.** $x^2y^4-x^4y^2$. **9.** x^4-1.
10. a^8-b^8. **11.** $a^2+b^2+2ab-c^2$.
12. $a^2-b^2-c^2-2bc$. **13.** $m^4+m^2n^2+n^4$. **14.** x^4+4y^4.
15. $a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2+2bcyz$. **16.** $b^2y^2+c^2z^2-a^2x^2+2bcyz$.
17. $b^4m^2-c^4n^2-a^4p^2+2c^2a^2np$. **18.** $a^6-64b^6-729c^6+432b^3c^3$.
19. a^4x^4+4. **20.** $a^8x^8+a^4x^4+1$. **21.** m^4+n^4. **22.** x^8-1.
23. $4a(b-c)$. **24.** $4a(3c-2b)$. **25.** $4xy(x^2+y^2)$. **26.** $4x(y-a+b)$.
27. $8a(3b-5c+7d)$. **28.** 9376. **29.** 1069840. **30.** 4985645.
31. $(5x+6)(5x-6)$. **32.** $(3a+4c)(3a-4c)$. **33.** $(4m+7n)(4m-7n)$.
34. $(2p+9q)(2p-9q)$. **35.** $(ax+8b)(ax-8b)$.
36. $(6x^2+11y^2)(6x^2-11y^2)$. **37.** $(7+8d)(7-8d)$.
38. $(12c+5d)(12c-5d)$. **39.** $(a+b+c)(a+b-c)$.
40. $(a+2b+5c)(a+2b-5c)$. **41.** $(2x+3a-4b)(2x-3a+4b)$.
42. $(a+2b-3c)(a-2b+3c)$. **43.** $(a^2+9b^2)(a+3b)(a-3b)$.
44. $(x-y+a-b)(x-y-a+b)$. **45.** $(9x^2+25y^2)(3x+5y)(3x-5y)$.
46. $(7a-b)(a+15b)$. **47.** $(5x-2y)(x+12y)$. **48.** $(2a+3b-4c)(b-2c)$.
49. $(2m+5n-2p)(2m+n-8p)$. **50.** $(5x-7y+12z)(x-y+2z)$.

প্রশ্নমালা 24. [৮৫-৮৭ পৃষ্ঠা]

1. 400 টাকা। **2.** 350 টাকা। **3.** 304. **4.** 7.
5. 15. **6.** 9. **7.** 7. **8.** 16.
9. 20. **10.** 16, 13. **11.** 120, 105. **12.** 39, 14.
13. 125, 100. **14.** 76, 50. **15.** 27. **16.** 40 বৎসর।

17. 36 বৎসর, 9 বৎসর। 18. 5 বৎসর পরে। 19. 2 টাকা। 20. 100 ঝুড়ি।
21. 6 মাইল। 22. বালকের সংখ্যা 16, বালিকার সংখ্যা 34.
23. 48 বৎসর, 16 বৎসর। 24. 36. 25. 1440 টাকা। 26. 3 ঘণ্টায়।

প্রশ্নমালা 25. [৯২ পৃষ্ঠা]

1. $6\frac{2}{3}$ একক দীর্ঘ। 2. $7\frac{4}{5}$ ফুট। 3. $7\frac{1}{7}$ গজ। 4. 3·5 ইঞ্চি।
5. 3·6 ফুট। 6. $\frac{7}{10}$ ফুট। 7. 5 গজ। 8. 65 ফুট।
9. 17 ফুট। 10. 28·3 ফুট।

প্রশ্নমালা 27. [১১০-১১২ পৃষ্ঠা]

1. $-5x^2-2xy-y^2-2x-y-2$. 2. $4a^2b$. 3. $-m^3n^2-mnp-m^2n^2$. 4. $a^2b^2x^2$. 5. $a^4b^4c^4$. 6. $a^3b^3-b^3c^3+c^3a^3-a^2b^2c^2$. 7. $a^3+b^3+c^3-3abc$. 8. $2x+2y+2z$. 9. $2x+2y+2z$. 10. $x^2y+y^2z+z^2x$. 11. $a^2b+b^2c+ca^2+ab^2+bc^2+c^2a$. 12. $abc^2+bca^2+b^2d+cab^2+a^2d+c^2d$. 13. $-\frac{3}{4}(x+y+z)$. 14. $-\frac{5}{14}(x+y+z)$. 15. 0. 16. 0. 17. 0. 18. 1280. 19. 1280. 20. 0. 21. $(a^2+b^2)(m+n+p+q+l)+(a^2-b^2)(m+n+p+q+k)+c^2(l+m+n)$ 22. $4(ax^2+by^2+cz^2)$. 23. 0. 24. $3(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$. 25. $(a+b+c)(x^2+y^2+z^2)$.

প্রশ্নমালা 28. [১১৪-১১৬ পৃষ্ঠা]

1. $10x^5-11x^4y+10x^3y^2+6x^2y^3-3y^4$. 2. $2m^3nx-7n^3xm+12x^3mn+7m^2n^2x+8n^2x^2m$. 3. $11x^6-3x^5y-50x^4y^2+15x^3y^3+26x^2y^4-19xy^5+40y^6$. 4. $5ax^4-8a^2x^3+8yzbc^2+2y^2zbc+4yz^2bc$. 5. $-2-x^3y^5z+2xy^3z^5+2x^3z^5y+6x^2y^2z^2-3xyz^4$. 6. $4x^4y^3z^2-80x^3y^4z^2+28x^2y^3z^4-22x^3y^2z^4-102x^4y^3z^3+155x^2y^4z^3$. 7. $-12x^3y^4z^5-100x^3y^5z^4+58x^4y^5z^3+92x^4y^3z^5+39x^5y^3z^4-38x^5y^4z^3$. 8. $-4x^2+5xy-7y^2-8yz$. 9. $6x^3-12x^2y^2+2a^2bx-7bxy^2-9xyab$. 10. $-2x^4+6x^3y-2x^2y^2+8xy^3+7y^4$. 11. $-2x^5+3x^4y-10x^3y^2-4x^2y^3-13xy^4+50y^5$. 12. $a^2+5ab-8b^2$. 13. $4x^2-8xy+y^2-12x-15y+9$. 14. $2a^3-4a^2b+7ab^2-15b^3$. 15. $-12x^3y+7x^2y^2-8x^2+17y-29$. 16. $5a^2-4ab-5bc+11b^2$. 17. $-2x^3-3y^2-5xy-3x-2$. 18. $-3a^3-11b^2c-6ac^2-5b^3$. 19. $-4x^3-22xy^2-45y^3-11x^2-24xy-15$.

20. $\frac{11}{24}x+\frac{19}{168}y+\frac{496}{57}z$. 21. $\frac{3}{10}ax+\frac{11}{56}y+\frac{32}{45}mz$. 22. $30\cdot08c^2by+1\cdot2a^2cx+\cdot45c^3z$. 23. $-\frac{129}{38}a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}x-\frac{15}{44}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{4}}y-b^{\frac{3}{5}}c^{\frac{5}{12}}z+lx-6my-5nz$.
24. (i) $1\cdot2x+2\cdot3y-\cdot6z$. (ii) $35x-24\cdot7y-\frac{1}{21}z$.
(iii) $3\cdot\dot{4}a+19\cdot04l^2+20m^2+30p$. 25. $2(bc^2+ca^2+ab^2)$. 26. 0.
27. 0. 28. $ax+by+cz$. 29. $2ax+12by-cz$. 30. $14x+44y+7z$.

বিবিধ প্রশ্নমালা I

[১১৭-১২৭ পৃষ্ঠা]

I

1. (i) 10. (ii) $\frac{1}{2}$. 2. (i) $x\div y+p$. (ii) $(x+p)\div y$.
4. (i) $(40x+10)$ সের ; (ii) $(36p+12q+r)$ ইঞ্চি। 5. $\frac{xy}{60}$ মিনিট।
6. -6. 7. $-\frac{1}{2}$. 10. 9, 7, 5, 2, -1, -3, -4, -8, -12.

II

1. $m+n$; $m-n$. 2. $\frac{px}{420}$ মাইল।
3. (i) 0. (ii) 25. (iii) 46. (iv) 45. 4. 16.
5. $(\sqrt[3]{a})\times(\sqrt[3]{a})\times(\sqrt[3]{a})=a$, &c. ; 35. 7. $-7x^2y$; -560.
8. $16x^4-8xy^3+24x^2y^2+y^4-32x^3y$; 81. 9. $30b+13c-23a$.
10. $x-2y+z$.

III

1. (i) $(a+b)c=x\div yz$. (ii) $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$.
(iii) $\sqrt[3]{(m-n)}\div(mn)^3<\sqrt{x}+\sqrt{y}$. (iv) $\because a>b$, $\therefore 3a>3b$.
2. 5, -4, $-\frac{13}{2}$, $\frac{13}{2}$, -10. 3. -1000. 5. 66.
7. $-6a^2+bc-9x^2+16$. 8. a. 9. $(4x-8)$ ফুট ; (x^2-4x) বর্গফুট।
10. $\frac{3m^2-mn}{240}$ কাঠা।

IV

1. -11 ; 1. 3. $4\frac{13}{15}$. 5. 9. 6. $(3x+2p+q)$ পাউণ্ড।
7. $6p$; $6p-q$. 8. $a^2+b^2+c^2$. 9. $-4x^2-7y^2-8yz+5xy$.
10. $7x^2-y^2-2xy$.

V

1. $(5a+7)\div y \cdot 9$. 4. $2, a, b, a+b$. 5. $7\frac{1}{2}$. 6. 505.
8. y. 9. 32. 10. 16.

VI

2. 536. 6. 60. 8. 3808. 9. 7 ফুট।

VII

1. $(x+yz+p)$ টন। 3. 2 ; 0. 5. (1) $1+x$. (2) $3a+b-5c$.
6. (i) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. (ii) $(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$.
7. 0. 8. $a+b+c$. 9. $2a-\frac{3}{4}b+\frac{7}{8}c-\frac{3}{10}d$. 10. 14 ইঞ্চি।

VIII

2. $2m$; $2n$. 3. (i) $ma+mb+na+nb$. (ii) $a^2+2ab+b^2$.
4. 0 ; 0. 6. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.
7. $36a^8b^{15}c^{22}x^{10}y^{10}z^{10}+90a^{18}b^{20}c^{12}x^8y^8z^8+10a^{18}b^{10}c^{17}x^6y^6z^6$.
8. $2b^5c^{10}x^4y^2+5a^5b^{10}x^2z^4+3a^{10}c^5y^4z^2$. 9. 62.

IX

1. $x^2+y^2+z^2+2yz-2zx-2xy$. 7. $m+n+3p$.
8. $(27x^2-93xy-66y^2)$. 9. 37.

X

1. 7. 2. 126. 3. 1500 টাকা।
4. 2250 পা. ; 900 পা. ; 750 পা. ; 300 পা.। 5. 40 বৎসর; 20 বৎসর ; 36 বৎসর।
6. 52 পা. ; 2 পা. 12 শি.। 7. 102. 8. 80 জন পুরুষ; 120 জন স্ত্রীলোক।
9. 12 ফুট জলের উপর, 6 ফুট জলে, 4 ফুট মাটির মধ্যে।
10. A 162 টাকা, B 118 টাকা এবং C 104 টাকা।

প্রশ্নমালা 29. [১৩০ পৃষ্ঠা]

1. x^2+3x+2. 2. $x^2+11x+18$. 3. x^2+x-30.
4. $x^2-14x+33$. 5. $a^2+5a-176$. 6. $m^2+12m-133$.
7. $p^2+2p-143$. 8. $p^2-5p-204$. 9. $x^2+5x-36$.
10. $x^2-15x+50$. 11. $x^2-7x-60$. 12. $k^2-11k-26$.
13. $a^2+19a+70$. 14. $m^2-8m-84$. 15. $x^2-18x+65$.

16. $x^2+19x+84$. 17. $a^2-14a+33$. 18. $x^2-9x-52$.
19. $m^2-11m-80$. 20. $x^2-18x+80$. 21. $a^2-6a-72$.
22. $m^2+6m-91$. 23. $x^2-26x+160$. 24. $x^2-13x-90$.
25. $x^2-6x-160$.

প্রশ্নমালা 30. [১৩১ পৃষ্ঠা]

1. $2a^2+5ab+3b^2$. 2. $2m^2-5mn+3n^2$. 3. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. 4. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$. 5. $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$. 6. $2a^2+2b^2+3c^2-5ab-7ac+5bc$. 7. $2x^2+3y^2+4z^2-5xy-6xz+7yz$. 8. $5x^2-2a^2-3b^2+3xa-2xb+5ab$. 9. $x^3-y^3-z^3-x^2y-x^2z+xy^2-y^2z+xz^2-z^2y$. 10. $x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2-2yz^2x$.

প্রশ্নমালা 31. [১৩৬-১৩৭ পৃষ্ঠা]

1. $27a^3+45a^2b-75ab^2-125b^3$. 2. $4a^2-9b^2-16c^2+24bc$. 3. x^4+3x^2+4. 4. $a^4-2a^2b^2+b^4$. 5. x^8+x^4+1. 6. $x^6-x^4y^4+2x^3y^3+y^6$. 7. m^6+n^6. 8. p^6-q^6. 9. $a^5-26a^3b^2+25ab^4$. 10. $x^5-5x^3+5x^2-1$. 11. $x^6-2a^3x^3+a^6$. 12. $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$. 13. $x^6+10x-33$. 14. x^6-2x^3+1. 15. $a^8+a^6b^2+a^4b^4+a^2b^6+b^8$. 16. $x^3+y^3+z^3-3xyz$. 17. $a^3+b^3+c^3-3abc$. 18. $2a^6-a^5b-14a^4b^2+13a^3b^3-43a^2b^4+23ab^5-20b^6$. 19. $apx^3+(bp-aq)x^2-(cp+bq)x+cq$. 20. $mnx^3-(n^2+mr)x^2+r^2$. 21. $ax^4-(1+a)bx^3+(c+b^2-ac)x^2-c^2$. 22. $abx^5-(b^2+ac)x^4+(2bc+ad)x^3-(2bd+c^2)x^2+2cdx-d^2$. 23. $mpx^4-(mq-mr+np)x^3+(ms+nq-nr-ps)x^2+(q-r-n)sx-s^2$. 24. $alx^3+(2lh+am)x^2y+(lb+2hm)xy^2+bmy^3+anx^2+2hnxy+bny^2$. 25. $l^2px^4+m^2px^3y+(2g^2p+l^2q)x^3+n^2px^2y^2+(2f^2p+m^2q)x^2y+(c^2p+2g^2q+l^2r)x^2+n^2qxy^2+(2f^2q+m^2r)xy+(c^2q+2g^2r)x+n^2ry^2+2f^2ry+c^2r$. 26. $x^5+1\frac{766}{945}x^4y+3\frac{239}{945}x^3y^2+2\frac{356}{735}x^2y^3+2\frac{4}{35}xy^4+y^5$. 27. $x^6+\frac{5}{3}x^5y+3\frac{3}{11}x^4y^2+\frac{26}{33}x^3y^3+4\frac{16}{33}x^2y^4+\frac{1}{11}xy^5+y^6$. 28. $\cdot621x^{12}+3\cdot197x^{10}+20\cdot7x^9+\cdot405x^8+\cdot3321x^7+2\cdot085x^6+16\cdot0872x^5+11\cdot07x^4+5\cdot8675x^3+29\cdot25x^2+6\cdot95x+45$. 29. $\cdot399a^5+7\cdot289a^4b+16\cdot71a^3b^2+32\cdot867a^2b^3+23\cdot789ab^4+25\cdot2b^5$. 30. $2\cdot3lx^5+(3\cdot15l+2\cdot3m)x^4y+(1\cdot17l+3\cdot15m+2\cdot3n)x^3y^2+(2\cdot07l+1\cdot17m+3\cdot15n)x^2y^3+(2\cdot07m+1\cdot17n)xy^4+2\cdot07ny^5$. 31. $a^2x^5-\frac{29}{210}abx^4y$

$+ (\frac{181}{90}ac - b^2)x^3y^2 + (\frac{55}{756}bc + \frac{4}{5}ad)x^2y^3 + (c^2 - \frac{6}{7}bd)xy^4 + \frac{8}{9}cdy^5$.

32. $2{\cdot}25a^2m^6 + (3{\cdot}9ac - 1{\cdot}44b^2)m^4n^2 + (1{\cdot}69c^2 - 3{\cdot}84bd)m^2n^4 - 2{\cdot}56d^2n^6$.

33. $16a^4 - 81b^4$. 34. $625a^4x^4 - 1296b^4y^4$. 35. $x^{12} - y^{12}$.

36. $x^8 + 49x^4y^4 + 625y^8$. 37. $a^{18}x^{18} - b^{18}y^{18}$.

41. $6x^3 + 19x^2 + 42x + 45$. 42. $2x^3 - 7x^2 - 24x + 45$.

43. $3x^5 + 9x^4 + 11x^3 + 21x^2 + 28x + 12$. 44. $px^4 + qx^3 + p^2x^2 + p(q + r)x + qr$. 45. $\frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3}x^5 + 7\frac{5}{12}x^4 + 4\frac{1}{2}x^3 + 16\frac{1}{2}x^2 + 5x + 10$.

প্রশ্নমালা 32. [১৪২-১৪৩ পৃষ্ঠা]

1. $x - 2$. 2. $x - 5$. 3. $3x + 4$. 4. $5x - 7$.
5. $2a - 3b$. 6. $x^2 - xy + y^2$. 7. $2x - 3a$. 8. $x^2 - ax + a^2$.
9. $a^2 + 2ab - b^2$. 10. $x + 3$. 11. $2x - 1$. 12. $2ay - b$.
13. $am + 3n$. 14. $2x^2 + 3xy - 4y^2$. 15. $3y^3 - x^2y + 2x^3$.
16. $4m^2 - 6mn + 8n^2$. 17. $a^3 - 3a^2y - y^3$. 18. $27(z + a)$. 19. $z - x$.
20. $x^4 + 2ax^3 + 3a^2x^2 + 2a^3x + a^4$. 21. $x^4 - 2x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 + y^4$.
22. $x^2 + (a + b)x + ab$. 23. $x - c$. 24. $a + b + c$. 25. $ab + ac + bc$.
26. $ab + ac - bc$. 27. $x^2 - (a - b)x - ab$.
28. $a^2 - ab - ac + b^2 - bc + c^2$. 29. $x^2 - xy + x + y^2 + y + 1$.
30. $x^2 + 2xy + 3xz + 4y^2 - 6yz + 9z^2$. 31. $x^2 + xy - xz + y^2 + yz + z^2$.
32. $2x - 3y - z$. 33. $ab - ac - bc + c^2$. 34. $x + c$.
35. $x + a$. 36. $a^2 + ab - bc - c^2$. 37. $ab - ac + bc - b^2$.
38. $y^2x + 2y^2z + yx^2 - 2yz^2 - x^2z - xz^2$. 39. $x^2 - ax + a^2$.
40. $c + a - b$. 41. $2(a + b)x$. 42. $x + y + z + xyz$.
43. $16x^4 - 8x^2(2y^2 + a^2) + (4y^2 - a^2)^2$.

প্রশ্নমালা 33. [১৪৫-১৪৬ পৃষ্ঠা]

1. $m^2 - 3mn + 2n^2$. 2. $a^2 - 3ab + b^2$. 3. $2x^2 - 3xy - 2y^2$.
4. $a^2 - 4ax - 2x^2$. 5. $3 + 2x - 2x^2 + x^3$. 6. $x^2 - 2x + 3$.
7. $2a^2 + 3ab - 4b^2$. 8. $a^2 - 2ax + 4x^2$. 9. $a^2 - 2ab + 2b^2$.
10. $2x^2 - 3x - 8$. 11. $x^3 + 3x^2 + 9x + 27$.
12. $a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 16$. 13. $3 - x^2 + 2x^3$.
14. $3x^2 - 4x + 5$. 15. $32 + 16x + 8x^2 + 4x^3 + 2x^4 + x^5$.
16. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. 17. $2a^2 - 3ab + 4b^2$.

18. $a^2+3ab-5b^2$. 19. $x^3+2x^2a+2xa^2+a^3$.

20. $a^3-3a^2b-b^3$. 21. $x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4$.

22. $x+6+\frac{5}{x+5}$. 23. $x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2+\frac{\frac{2}{27}y^3}{x-\frac{1}{3}y}$. 24. r.

25. ভাগফল $\frac{1}{3}+\frac{7}{9}x+\frac{43}{27}x^2+\frac{43}{81}x^3$ এবং ভাগশেষ $\frac{43}{81}x^4$.

প্রশ্নমালা 34. [১৪৮ পৃষ্ঠা]

13. x^3+x^2+x+1. 14. $x^3-x^2y+xy^2-y^3$.

15. $x^4+x^3+x^2+x+1$. 16. $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$.

17. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. 18. $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$.

19. $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

20. $x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6$.

প্রশ্নমালা 35. [১৫২-১৫৩ পৃষ্ঠা]

1. $x^3+9x^2+27x+27$. 2. $8x^3+12x^2+6x+1$.

3. $27a^3+27a^2b+9ab^2+b^3$. 4. $64x^3+144x^2y+108xy^2+27y^3$.

5. $x^6+6x^4y+12x^2y^2+8y^3$. 6. $x^3y^3+3x^2y^3z+3xy^2z^2+y^3z^3$.

7. $a^6b^3+3a^4b^2c^2d+3a^2bc^4d^2+c^6d^3$.

8. $a^3+b^3+8c^3+3a^2b+6a^2c+3ab^2+12ac^2+6b^2c+12bc^2+12abc$.

9. $8x^3+27y^3+z^3+36x^2y+12x^2z+54xy^2+6xz^2+27y^2z+9yz^2+36xyz$.

10. $x^9+3x^6y^3+3x^3y^6+y^9$. 11. $125m^3$.

12. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. 13. $27b^3$. 14. x^3+3x^2+3x+1.

15. $x^3+6x^2+12x+8$. 16. $8a^3$. 17. 90. 18. 175.

20. 52. 21. 0. 22. -1. 23. 0. 24. 10.

28. x^3+1. 29. $1+8x^3$. 30. $125p^3+1$. 31. $343a^3+64b^3$.

32. $512x^3+27y^3$. 33. $a^3b^3+64c^3$. 34. $a^3x^3+125b^3$.

35. $125a^3+729b^3$. 36. $(a+1)(a^2-a+1)$. 37. $(x+2)(x^2-2x+4)$.

38. $(2x+1)(4x^2-2x+1)$. 39. $(3a+2)(9a^2-6a+4)$.

40. $(2m+4)(4m^2-8m+16)$. 41. $(4p+5)(16p^2-20p+25)$.

42. $(2x+6y)(4x^2-12xy+36y^2)$. 43. $(3a+7y)(9a^2-21ay+49y^2)$.

44. $(6ax+y)(36a^2x^2-6axy+y^2)$.

45. $(3ab+4xy)(9a^2b^2-12abxy+16x^2y^2)$.

46. $(9abc+10xyz)(81a^2b^2c^2-90abcxyz+100x^2y^2z^2)$.

47. $(11ab^2x^3+9cy^2z^3)(121a^2b^4x^6-99acb^2y^2x^3z^3+81c^2y^4z^6)$.

প্রশ্নমালা 36. [১৫৫ পৃষ্ঠা]

1. $x^3-6x^2+12x-8$. 2. $8x^3-12x^2+6x-1$.
3. $8-36a+54a^2-27a^3$. 4. $27-108a+144a^2-64a^3$.
5. $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$. 6. $125m^3-300m^2n+240mn^2-64n^3$.
7. $8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$. 8. $8a^3-b^3-c^3-12a^2b-12a^2c+6ab^2+6ac^2-3b^2c-3bc^2+12abc$. 9. $8x^3-27y^3-z^3-36x^2y-12x^2z+54xy^2+6xz^2-27y^2z-9yz^2+36xyz$. 10. $p^6-q^6-r^6-3p^4q^2-3p^4r^2+3p^2q^4+3p^2r^4-3q^4r^2-3q^2r^4+6p^2q^2r^2$.
11. $64b^3$. 12. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$. 13. $8x^3$. 14. 0.
15. 343. 16. -505. 17. 27. 18. 36. 19. 140.
23. $1-8x^3$. 24. x^3-27. 25. $64a^3-1$. 26. $x^6-8y^3z^3$.
27. $27m^3-8n^3q^3$. 28. $(5a-1)(25a^2+5a+1)$.
29. $(7x-2y^2)(49x^2+14xy^2+4y^4)$. 30. $(6k-5l)(36k^2+30kl+25l^2)$.
31. $(1-8k)(1+8k+64k^2)$. 32. $(9m-4an^2)(81m^2+36amn^2+16a^2n^4)$.

প্রশ্নমালা 37. [১৫৮-১৬০ পৃষ্ঠা]

1. $25x^2+90xy+81y^2$. 2. $256a^2-416ab+169b^2$.
3. $x^2+200x+10000$. 4. $y^2+1000y+250000$.
5. $a^2+1998a+998001$. 6. $y^2+20002y+100020001$.
7. 976144. 8. 1024144. 9. 10100·25. 10. 9920·16.
11. $8x^3+60x^2+150x+125$. 12. 1157625. 13. 985074·875.
14. 513152864·216. 15. (i) 50000032. (ii) 2000288.
16. (i) $(3x+3y)^2-(x-y)^2$. (ii) $(5x+8y)^2-(x+2y)^2$. (iii) $(x+100)^2-(2)^2$. (iv) $(500)^2-(5)^2$. (v) $(2x+100)^2-(\cdot 4)^2$.
17. a^4-x^4. 18. $16a^4-81$. 19. $a^8+b^8+a^4b^4$. 20. 99999984.
21. 99999744. 22. $8a^3+12a^2x+6ax^2+x^3$. 23. $a^6-12a^4+48a^2-64$.
24. x^3+64. 25. $8y^3-27$. 26. x^6-64. 27. $4x^2+240x+1575$.
28. $36x^2+108x-1075$. 29. $36x^2-408x+1075$. 30. $100a^2$.
31. $x^2+2xy+y^2$. 32. $8000a^3$. 33. $\cdot 125a^3$. 34. $1331a^3$.
35. $5x^3$. 36. $(x+2)(x+3)$. 37. $5(y+8)(y+5)$.
38. $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$. 39. $(x+y+3)(x+y+12)$.
40. $(9a+8b+8)(a+8b-4)$. 41. $(2x+5y)(4x^2-10xy+25y^2)$.
42. $(8a+13x-4)\{(8a+13x)^2+4(8a+13x)+16\}$.
43. $(15a+3b+2)(15a+3b-2)$. 44. $5x(x+2y)(x-3y)$. 45. 225.

46. 512. 47. 10000. 48. 8099·999996. 49. 92355. 50. 1.
51. $(2+5x+3x^2)(2+5x-x^2)$. 52. $a^2b^2(x^2+1)^2-(a^2+b^2)^2x^2$.
53. $(11x^2+28x+10)^2-(x^2+x+5)^2$. 54. $(49x^2+98ax+39a^2)^2+(5a^2)^2$.

প্রশ্নমালা 38. [১৬১-১৬২ পৃষ্ঠা]

1. $a(b+c)$. 2. $a^2b^2(b+a)$. 3. $x^3y^3(y-2x)$.
4. $2xyz(x+2y-3z)$. 5. $2a^3b(2a^2-3ab-4b^2)$.
6. $ax^2(y-5axy^2+3x)$. 7. $3x^2y^2z^2(x^2y-4y^2z+7xz^2)$.
8. $14a^5b^5(2a^3-3b^3)$. 9. $36x^8y^8(2x^2+3y^2)$.
10. $13a^5b^5c^5(3b^2c^2-5c^2a^2-7a^2b^2)$.

প্রশ্নমালা 39. [১৬২ পৃষ্ঠা]

1. $(3a+4b)(3a-4b)$. 2. $a(2a+5x)(2a-5x)$.
3. $(6x^2+1)(6x^2-1)$. 4. $(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)$.
5. $x(4x^2+3)(4x^2-3)$. 6. $x(4x^2+9)(2x+3)(2x-3)$.
7. $(1+4a^2)(1+2a)(1-2a)$. 8. $x^2(1+9x^2)(1+3x)(1-3x)$.
9. $(6+x^2a)(6-x^2a)$. 10. $(8a^2+7x^3)(8a^2-7x^3)$.
11. $(11+m^3)(11-m^3)$. 12. $(7x^3a^5+9)(7x^3a^5-9)$.
13. $(ab+5cd)(ab-5cd)$. 14. $(9x^6+8a^5)(9x^6-8a^5)$.
15. $p^2(q^2+10)(q^2-10)$. 16. $x^3(12x^2+5a^2)(12x^2-5a^2)$.
17. $3a^5(8a^2+9x^2)(8a^2-9x^2)$. 18. $2ax(7ax^2+8)(7ax^2-8)$.
19. $4x^5a^3(9x^6a^3+11)(9x^6a^3-11)$.
20. $5m^{15}n^7(7m^4n^3+11)(7m^4n^3-11)$. 21. $(a+3b+5c)(a+3b-5c)$.
22. $(a+3b-5c)(a-3b+5c)$. 23. $4xy$.
24. $(5a+3x)(a+x)$. 25. $(2a-2b+3c-3d)(2a-2b-3c+3d)$.
26. $(7x+5y-3z)(7x-5y+3z)$. 27. $12(5x-1)(x+2)$. 28. $4a(b-c)$.
29. $(3a+b-c)(a-7b+9c)$. 30. $(14a+21x-23y)(2a+27x-41y)$.
31. $-9(x+a)(x-a)(x^2+a^2)$. 32. $28a(5a-3)$.

প্রশ্নমালা 40. [১৬৩-১৬৪ পৃষ্ঠা]

1. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. 2. $(x^4-x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.
3. $(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2)$.
4. $(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2)(a^4-a^2x^2+x^4)$.
5. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$. 6. $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$.

7. $9(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. 8. $(a^2+2a+3)(a^2-2a+3)$.
9. $(x^2+x-3)(x^2-x-3)$. 10. $(2x^2+2x+3)(2x^2-2x+3)$.
11. $(2x^2+2x-3)(2x^2-2x-3)$. 12. $(2x^2+3x+3)(2x^2-3x+3)$.
13. $(2a^2+5a-3)(2a^2-5a-3)$. 14. $(2a^2+10a+25)(2a^2-10a+25)$.
15. $(3x^2+x+4)(3x^2-x+4)$. 16. $(3a^2+a-4)(3a^2-a-4)$.
17. $(3x^2+3x-4)(3x^2-3x-4)$. 18. $(3a^2+5a+4)(3a^2-5a+4)$.
19. $(4x^2+6xa+5a^2)(4x^2-6xa+5a^2)$.
20. $(3a^2+7ax+5x^2)(3a^2-7ax+5x^2)$. 21. $(x^2+4x+12)(x^2-4x+12)$.
22. $(a^2+5ab-5b^2)(a^2-5ab-5b^2)$. 23. $(6a^2+2ab-b^2)(6a^2-2ab-b^2)$.
24. $(7m^2+2mn-4n^2)(7m^2-2mn-4n^2)$.
25. $(8a^2+12ax+9x^2)(8a^2-12ax+9x^2)$.
26. $(2x^2+14xa+49a^2)(2x^2-14xa+49a^2)$. 27. $(x+y-z)(x-y+z)$.
28. $(2a+b-3c)(2a-b+3c)$. 29. $(3x+2y-3z)(3x-2y+3z)$.
30. $(a+2b-5c)(a-2b+5c)$. 31. $(4y+3x-5z)(4y-3x+5z)$.
32. $(a-2b+3c-2d)(a-2b-3c+2d)$. 33. $(x-2y+z)(x-z)$.
34. $(2x+3a+5b+1)(2x+3a-5b-1)$.
35. $(3x+2y-7z-5)(3x-2y+7z-5)$.
36. $(4a-3b+4c-3)(4a+3b-4c-3)$.
37. $(x-7y+5z-2)(x-7y-5z+2)$.
38. $(4x+5a+3y-7b)(4x+5a-3y+7b)$.
39. $(7x-4y+8z-1)(7x-4y-8z+1)$. 40. $(a+b-c-d)(a-b+c-d)$.

প্রশ্নমালা 41. [১৬৫ পৃষ্ঠা]

1. $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$. 2. $a(a-3x)(a^2+3ax+9x^2)$.
3. $(2x+1)(4x^2-2x+1)(64x^6-8x^3+1)$.
4. $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a^6+8a^3b^3+64b^6)$.
5. $(3a^2+5x^2)(9a^4-15a^2x^2+25x^4)$.
6. $(m+n)(m-n)(m^2-mn+n^2)(m^2+mn+n^2)$.
7. $(7x+8y)(49x^2-56xy+64y^2)$.
8. $(2x^2-1)(2x^2+1)(4x^4+2x^2+1)(4x^4-2x^2+1)$.
9. $(a+2x^2)(a^2-2ax^2+4x^4)(a-2x^2)(a^2+2ax^2+4x^4)$.
10. $(5x^3-6a^3)(25x^6+30x^3a^3+36a^6)$.
11. $ab(4a^4+7b^4)(16a^8-28a^4b^4+49b^8)$.
12. $x^2y^2(3x^3+2y^3)(3x^3-2y^3)(9x^6-6x^3y^3+4y^6)(9x^6+6x^3y^3+4y^6)$.

13. $(a+b)^2(a^4-2a^3b+6a^2b^2-2ab^3+b^4)$.
14. $2(x+y)(x-y)(4x^4-14x^2y^2+13y^4)$.
15. $2(a-b)(a^2+ab+b^2)(4a^6-2a^3b^3+b^6)$.

প্রশ্নমালা 42. [১৭২-১৭৩ পৃষ্ঠা]

1. $(x+1)(x+2)$. 2. $(x+2)(x+3)$. 3. $(a+1)(a+3)$.
4. $(x-1)(x-4)$. 5. $(x+2)(x+5)$. 6. $(x-3)(x-4)$.
7. $(x+3)(x+5)$. 8. $(x+3)(x-5)$. 9. $(x-4)(x-9)$.
10. $(x+4)(x-9)$. 11. $(x-12)(x-2)$. 12. $(x-20)(x-2)$.
13. $(x+10)(x-3)$. 14. $(x+8)(x-6)$. 15. $(x+18)(x-2)$.
16. $(x+12)(x-3)$. 17. $(x+14)(x-3)$. 18. $(x+18)(x-4)$.
19. $(x+5)(x-8)$. 20. $(x-16)(x+5)$. 21. $(x-32)(x+3)$.
22. $(x-14)(x+4)$. 23. $(x-7)(x+6)$. 24. $(x-9)(x+8)$.
25. $(x+12)(x+10)$. 26. $(x-4)(x+20)$. 27. $(x-24)(x+3)$.
28. $(x+12)(x-7)$. 29. $(x-12)(x-8)$. 30. $(x+26)(x-3)$.
31. $(x-12)(x+6)$. 32. $(x-21)(x-4)$. 33. $(x-22)(x-4)$.
34. $(x+15)(x-8)$. 35. $(x-10)(x+8)$. 36. $(x+14)(x-6)$.
37. $(a-8)(a+7)$. 38. $(m-15)(m+6)$. 39. $(a+20)(a-3)$.
40. $(a-6)(a-9)$. 41. $(p-24)(p+2)$. 42. $(m+9)(m-8)$.
43. $(m+30)(m-3)$. 44. $(a-24)(a-5)$. 45. $(x+13)(x-6)$.
46. $(a-51)(a+2)$. 47. $(a-15)(a-4)$. 48. $(x+16)(x-4)$.
49. $(a-30)(a+4)$. 50. $(x+15)(x-7)$. 51. $(x-7y)(x+6y)$.
52. $(a-8b)(a-4b)$. 53. $(m+6n)(m-5n)$. 54. $(a+4b)(a-3b)$.
55. $(a+3b)(a-5b)$. 56. $(x-8y)(x+y)$. 57. $(x+8y)(x-5y)$.
58. $(p-8q)(p-6q)$. 59. $(p+10q)(p-8q)$. 60. $(x+24y)(x-4y)$.
61. $(a^2+5)(a+1)(a-1)$. 62. $(x^2+5)(x^2-3)$.
63. $(x^2+7)(x+2)(x-2)$. 64. $(x^3+3)(x-1)(x^2+x+1)$.
65. $(a-2)(a^2+2a+4)(a^3-2)$. 66. $(x+3)(x^2-3x+9)(x-1)(x^2+x+1)$.
67. $(a+2)(a^2-2a+4)(a-1)(a^2+a+1)$.
68. $(x^2+4)(x+2)(x-2)(x^2+2)(x^2-2)$. 69. $(a^2+4)(a+2)(a-2)(a^4+5)$.
70. $(x^2+1)(x^2-2)(x^4-x^2+1)(x^4+2x^2+4)$. 71. $(a^2+2a-2)(a+1)^2$.
72. $(x^2+3x+1)(x+1)(x+2)$. 73. $(x-3)(x+1)(x-1)^2$.
74. $(a+1)(a-4)(a^2-3a+1)$. 75. $(x+1)(x-5)(x^2-4x+1)$.
76. $(x-3)(x+2)(x+1)(x-2)$. 77. $(x-2)(x-3)(x-1)(x-4)$.

78. $(a-2)(a+9)(a+2)(a+5)$. 79. $(a-4)(a+10)(a+2)(a+4)$.
80. $(x-9)(x+1)(x-10)(x+2)$. 81. $(x+3)(2x-5)$.
82. $(2a+3)(3a-5)$. 83. $(2m-3)(4m+3)$. 84. $(3x+8y)(2x-3y)$.
85. $(5a-3b)(2a-7b)$. 86. $(3m-4n)(4m+5n)$. 87. $(2x+5y)(6x-y)$.
88. $(4a+5b)(5a-6b)$. 89. $(6x-7y)(3x-5y)$. 90. $(3x+8y)(4x-3y)$.

প্রশ্নমালা 43. [১৭৫-১৭৬ পৃষ্ঠা]

1. $(x+3)(x+1)$. 2. $(x+5)(x+1)$. 3. $(x+5)(x+3)$.
4. $(x-3)(x-7)$. 5. $(x+6)(x-8)$. 6. $(x+5)(x-9)$.
7. $(x-4)(x-8)$. 8. $(x+5)(x-11)$. 9. $(a+2b-c)(a+c)$.
10. $(x+y)(x-y+2)$. 11. $(x+y+1)(x-y+5)$. 12. $(a+5b-c)(a-b+c)$.
13. $(x-y-z)(x-5y+z)$. 14. $(x-2y-2z)(x-8y+2z)$.
15. $(a+b-3c)(a-13b+3c)$. 16. $(x+12y-3z)(x+3z)$.
17. $(x+y-5z)(x-15y+5z)$. 18. $(2x+1)(x-3)$.
19. $(3x+1)(x-2)$. 20. $(3x+2)(x+4)$. 21. $(4x-1)(x+2)$.
22. $(2x-1)(3x+2)$. 23. $(3x-4)(2x+1)$. 24. $(3x-1)(2x+3)$.
25. $(4x-5)(2x+3)$. 26. $(2x-5)(2x+7)$. 27. $(2x-3)(3x+4)$.
28. $(3x+2)(x-6)$. 29. $(2x+5)(x-7)$. 30. $(2x-7)(x+6)$.
31. $(3x-5)(x+6)$. 32. $(3x-2)(4x+3)$. 33. $(2a-3b)(a+5b)$.
34. $(3x-2y)(2x-3y)$. 35. $(3m+2n)(2m-5n)$. 36. $(3p-4q)(p+3q)$.
37. $(4a+3b)(2a-5b)$. 38. $(5m-2n)(2m+3n)$. 39. $(4x-y)(3x+4y)$.
40. $(5a+3b)(3a-4b)$. 41. $(2a-b)(a-2b)$. 42. $(3a+b)(a-3b)$.
43. $(3x-y)(x+3y)$. 44. $(4a-1)(a+4)$. 45. $(4a-b)(a-4b)$.
46. $(5x+1)(x-5)$. 47. $(5x-y)(x-5y)$. 48. $(6x+1)(x+6)$.
49. $(6a-b)(a+6b)$. 50. $(6a+b)(a-6b)$. 51. $(7a-b)(a-7b)$.
52. $(7a-b)(a+7b)$. 53. $(7a+b)(a-7b)$. 54. $(8x-y)(x+8y)$.
55. $(9x-y)(x-9y)$. 56. $(10x-y)(x+10y)$.
57. $(2a+2b-1)(a+b+2)$. 58. $(2x^2+2y^2+xy)(x-y)^2$.
59. $(2a^2+2b^2+ab)(a+b)^2$. 60. $(x^2+y^2)(4x-y)(x-4y)$.
61. $(2x^2+3)(x+2)(x-2)$. 62. $(2a^2+b^2)(2a+3b)(2a-3b)$.
63. $(a^2+2b^2)(3a+4b)(3a-4b)$.
64. $(2x-1)(4x^2+2x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$.
65. $(2a^2+b^2)(2a^2-b^2)(a^2+2b^2)(a^2-2b^2)$.

প্রশ্নমালা 44. [১৭৯ পৃষ্ঠা]

1. a^2b^2. 2. $4a^2$. 3. $3xy^2$. 4. $5a^2y^3$.
5. $9m^2n^3$. 6. $4ax$. 7. $12mp$. 8. $15x^2y^2z^2$.
9. $18a^2c^2$. 10. $24c^3$. 11. $12z^2$. 12. $15m^3n^3p^3q^3$.
13. $18a^2b^2c^2d^2$. 14. 6. 15. $8x^2y^2$.

প্রশ্নমালা 45. [১৮১ পৃষ্ঠা]

1. $a(a+b)$. 2. $x^3y^3(x+y)$. 3. $3(x+3)$.
4. $4a^2(a^2+bc)$. 5. $m^3n^3(m-n)^2$. 6. $ax(2a+3x)$.
7. $2a^2b^2(3a+4b)$. 8. $3x^2y^2(x-2y)$. 9. $2ab(a+2b)$.
10. $16x^3a^3(x^2-a^2)$. 11. $8(x^2+ax+a^2)$. 12. $8xa^2(x^2+a^2)$.
13. $6(a+3b)$. 14. $4x(x-5)$. 15. $xy(x+6y)$.
16. $a^2x^2(a+2x)$. 17. $2x+3$. 18. $a-2b$.
19. $x-2$. 20. $18(x+2a)$. 21. $a-b$.
22. $x+2$. 23. $4ab(3a+b)$. 24. x^2+5x+6.

প্রশ্নমালা 46. [১৮৫-১৮৬ পৃষ্ঠা]

1. a^2b^2. 2. a^3b^2c. 3. $30x^2y^4$. 4. $28m^4n^3p$.
5. $24x^3y^3z^2$. 6. $140a^2b^2c^2$. 7. $120a^3b^3c^3$. 8. $180x^4y^3z^2a^2$.
9. $a^2b^2(a^2-b^2)$. 10. $24(x^2-y^2)^2$. 11. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
12. $a^2(a-x)(a-2x)(a+3x)$. 13. $a^2(a-2)(a+2)(a+4)$.
14. $12a^3x^2(x^2-a^2)(x^2-ax+a^2)$. 15. $48(x+6)(x+5)(x-2)$.
16. $(x+7)(x+5)(x+4)(x-3)$. 17. $3a^2(4a^2-9b^2)(a^2-b^2)$.
18. $(8a^3+27b^3)(8a^3-27b^3)$. 19. $12x^2(4x^2-25y^2)(2x-y)$.
20. $(2x-3a)^2(9x^2-a^2)$. 21. $2x(4x^4+81)$.
22. $6(3a-x)^2(a^2-4x^2)$. 23. $(2x-1)^2(4x^2-1)(x+3)$.
24. $(x-2y)(x-3y)(x-4y)(x+5y)$. 25. $(2x-1)(3x+1)(x+2)$.
26. $(1-4x^2)(1+2x+4x^2)(1+2x-4x^2)$. 27. $(x^2-3)^2(9x^4-1)(9x^2-1)$

প্রশ্নমালা 47. [১৮৯ পৃষ্ঠা]

1. $\frac{1}{2b}$. 2. $\frac{3x}{4y}$. 3. $\frac{2a}{5x}$. 4. $\frac{3xz}{5y^2}$. 5. $\frac{2d}{3ab}$. 6. $\frac{2az}{5xy}$.
7. $\frac{2d^5}{3a}$. 8. $\frac{3npq}{5m}$. 9. $\frac{x-a}{x}$. 10. $-\frac{1}{x+3}$. 11. $\frac{2x-3a}{2x}$

12. $-\frac{a}{4b+a}$. 13. $\frac{3a}{x+4a}$. 14. $\frac{2x^2}{x^2-2a^2}$. 15. $\frac{4x}{x+3}$.

16. $\frac{x-2}{x-3}$. 17. $\frac{x-3}{x+4}$. 18. $\frac{a-4b}{a-5b}$. 19. $\frac{a^2}{a+b}$.

20. $\frac{1-4x}{1-5x}$. 21. $\frac{x-y}{x+7y}$. 22. $\frac{1-2a^2}{1+3a^2}$. 23. $\frac{x^2-13}{x^2-4}$.

24. $\frac{3ax}{a-3x}$. 25. $\frac{2x+3}{3x+4}$. 26. $\frac{x-a}{x+a}$. 27. $\frac{x+5a}{x+7a}$.

28. $\frac{2x-5}{3x-2}$. 29. $\frac{2x-5a}{3x-7a}$. 30. $\frac{2-3ax}{1-5ax}$. 31. $\frac{x-a}{x^2+a}$.

32. $\frac{3a+5b}{3c-1}$. 33. $\frac{2x+3a}{3x+2a}$. 34. $\frac{2a-b}{a^2-1}$. 35. $\frac{a-b-c}{a+b-c}$.

প্রশ্নমালা 48. [১১১ পৃষ্ঠা]

1. $\frac{2adf}{4bdf}, \frac{3bcf}{4bdf}, \frac{4bde}{4bdf}$.

2. $\frac{6ax^2}{12abc}, \frac{4by^2}{12abc}, \frac{3cz^2}{12abc}$.

3. $\frac{15abx^2}{60x^3y^2}, \frac{10bcxy}{60x^3y^2}, \frac{6acy^2}{60x^3y^2}$.

4. $\frac{a^2(a+b)}{a(a^2-b^2)}, \frac{ba(a-b)}{a(a^2-b^2)}, \frac{c(a-b)}{a(a^2-b^2)}$.

5. $\frac{x^2(a-2b)}{a(a^2-4b^2)}, \frac{ay^2(a+2b)}{a(a^2-4b^2)}$.

6. $\frac{2a^2}{a(a-b)}, \frac{c-a}{a(a-b)}$.

7. $\frac{2a(a+b)}{a^2-b^2}, \frac{-3b(a+b)}{a^2-b^2}, \frac{4c(a-b)}{a^2-b^2}$.

8. $\frac{2b^2c^2x(a-x)}{a^2b^2c^2(a^2-x^2)}, \frac{3a^2c^2y(a+x)}{a^2b^2c^2(a^2-x^2)}, \frac{4a^2b^2z}{a^2b^2c^2(a^2-x^2)}$.

9. $\frac{a^2x(2x+3y)}{xy(4x^2-9y^2)}, \frac{b^2y(2x-3y)}{xy(4x^2-9y^2)}, \frac{c^2}{xy(4x^2-9y^2)}$.

10. $\frac{a^2(x^2-x+1)}{x^4+x^2+1}, \frac{b^2(x^2+x+1)}{x^4+x^2+1}$.

11. $\frac{3(x+3)}{x^3+2x^2-5x-6}, \frac{4(x+1)}{x^3+2x^2-5x-6}$.

12. $\frac{a^2-4b^2}{a^4+8ab^3}, \frac{abc}{a^4+8ab^3}$.

13. $\frac{a(a^2+3ab+9b^2)}{a^3-27b^3}, \frac{b(a-3b)}{a^3-27b^3}, \frac{c}{a^3-27b^3}$.

14. $\frac{a^2(a-b+c)}{ab(a^2+b^2-c^2-2ab)}, \frac{b^2(a-b-c)}{ab(a^2+b^2-c^2-2ab)}, \frac{abc}{ab(a^2+b^2-c^2-2ab)}$.

15. $\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{(a-b)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{(b-c)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

প্রশ্নমালা 49. [১২৩-১২৫ পৃষ্ঠা]

1. $\frac{a^2+b^2}{ab}$. 2. 0. 3. 1. 4. $\frac{4ab}{a^2-b^2}$.

5. $\frac{a+b}{2(a-b)}$. 6. $\frac{12xy}{4x^2-9y^2}$. 7. $\frac{a^2-2ab-b^2}{(a+b)^2(a-b)}$.

8. $\frac{2a^3}{a^2-b^2}$. 9. $\frac{1}{(a-b)(b-c)}$. 10. $\frac{2}{x^2-4x+3}$.

11. $\frac{2}{x^2+10x+16}$. 12. $\frac{6xy}{8x^3+27y^3}$. 13. $\frac{2ab}{a^2-b^2}$.

14. 0. 15. $\frac{8x^2y^2}{x^4-y^4}$. 16. $\frac{-64ax^3}{a^4-16x^4}$.

17. $\frac{x^2}{6(x^2-9)}$. 18. $\frac{2b}{1-16a^2b^2}$. 19. $\frac{4x^4}{x^4-16a^4}$.

20. $\frac{8a^7b}{a^8-b^8}$. 21. $\frac{108x^4}{81x^4-y^4}$. 22. $\frac{9ax(x+a)}{x^4-81a^4}$.

23. $\frac{4ab}{(a-b)^2}$. 24. $\frac{6x^2-12}{x^4-5x^2+4}$. 25. $\frac{6a^2x}{4x^4-5a^2x^2+a^4}$.

26. $\frac{48a^3}{x^4-10a^2x^2+9a^4}$. 27. $\frac{2x}{x^4-1}$. 28. $\frac{x-c}{(x-a)(x-b)}$.

29. $\frac{4}{x^2-6x+5}$. 30. $\frac{4}{x^2+14ax+13a^2}$. 31. $\frac{2}{x+3}$.

32. 0. 33. $\frac{4x^3}{1+x^4+x^8}$. 34. $\frac{12x^4}{x^6-64}$. 35. $\frac{66ax^5}{16x^8-6561a^8}$.

প্রশ্নমালা 50. [১২৬-১২৭ পৃষ্ঠা]

1. $\frac{1}{3}$. 2. $\frac{a^2}{9}$. 3. xyz. 4. $\frac{x^2y^2z^2}{9a^2b^2c^2}$.

5. $\frac{5n^2x^2}{8my}$. 6. $\frac{x+2}{x}$. 7. 3. 8. $\frac{a^2-b^2}{a}$.

9. $\frac{a^2-4x^2}{a^2}$. 10. $\frac{x^2-1}{x^2-x-6}$. 11. 1. 12. 1.

13. $\frac{a^2+b^2}{a}$. 14. $\frac{x}{2}$. 15. $\frac{x+2}{x+3}$. 16. $\frac{a^2(a-b)}{x}$.

17. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^2}{a^2}+1$. 18. $\frac{8ab}{9x^2}+2+\frac{9x^2}{8ab}$. 19. $2\left(\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}\right)$.

20. 1. 21. $\frac{a+b-c}{a+b+c}$. 22. 1.

প্রশ্নমালা 51. [১৯৮-১৯৯ পৃষ্ঠা]

1. $\frac{5ax}{6by}$. **2.** $\frac{(a+b)^2}{b}$. **3.** $\frac{x-7}{x-5}$. **4.** $a-b$.

5. $\frac{m-n}{m+2n}$. **6.** $(m-n)^2$. **7.** 1. **8.** 1.

9. $\frac{x^2+y^2}{2xy}$. **10.** $\frac{x^2-8x+12}{x^2-10x+21}$. **11.** $\frac{1}{p^2+q^2}$. **12.** a^2-b^2.

13. xy. **14.** ab. **15.** $2x$. **16.** 1. **17.** $\frac{xy}{x^2+y^2}$.

18. $-\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{ab(a-b)^2}$. **19.** $\frac{a}{a-b}$. **20.** a^2-b^2. **21.** $a-b$.

প্রশ্নমালা 52. [২০৩-২০৪ পৃষ্ঠা]

1. 4. **2.** -5. **3.** -4. **4.** -5. **5.** -5. **6.** -60.
7. 13. **8.** 5. **9.** -2. **10.** -2. **11.** 1. **12.** 2.
13. 3. **14.** -4. **15.** 0. **16.** 7. **17.** -2. **18.** -1.
19. 7. **20.** 3. **21.** 5. **22.** 7. **23.** -6. **24.** 0.
25. -8. **26.** 9. **27.** -2. **28.** $\frac{1}{8}$. **29.** 1. **30.** -1.
31. 12. **32.** 30. **33.** 12.

প্রশ্নমালা 53. [২০৬-২০৮ পৃষ্ঠা]

1. 6 ফুট, 3 ফুট। **2.** 20. **3.** 40 এবং 10. **4.** 80. **5.** 12.
6. 60. **7.** 40. **8.** 96. **9.** 42, 43, 44. **10.** 33.
11. 25, 65. **12.** 15 এবং 24. **13.** 36. **14.** 72.
15. 10, 11. **16.** 600 পা., 250 পা.। **17.** 120 পা., 300 পা.।
18. 3 পা. 10 শি.। **19.** 35, 25. **20.** 30, 10.

প্রশ্নমালা 56. [২২৭-২২৯ পৃষ্ঠা]

1. (i) (11, 8) ; $(-9, 11)$; $(-5, -6)$; $(9, -10)$.
(ii) (2·2, 1·6) ; $(-1·8, 2·2)$; $(-1, -1·2)$; $(1·8, -2)$.
2. $(3\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3})$; $(-3, 3\frac{2}{3})$; $(-1\frac{2}{3}, -2)$; $(3, -3\frac{1}{3})$. **5.** 20.
6. 13. **7.** 50. **8.** 11 ; -13. **9.** 17·5 ; 36.
10. 12 ; 8. **11.** 13 ক্ষেত্রফলের একক। **12.** 16 ক্ষেত্রফলের একক।
13. 1 ক্ষেত্রফলের একক। **14.** 40 ক্ষেত্রফলের একক ; 7, 4·5. **15.** 2·5 সে. মি.।
16. 6, 7. **17.** 5. **18.** 32 ক্ষেত্রফলের একক ; 7, 5.

বিবিধ প্রশ্নমালা II

[২৩৭-২৪৫ পৃষ্ঠা]

I

1. (i) $y^3(x-2z)-y^2xz+y(xz^2-x^3-2z^3)+(x^3z-xz^3)$.
(ii) $(xy^3-x^3y)+z(x^3-xy^2-2y^3)+z^2xy-z^3(x+2y)$.

2. 94. 4. $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$. 5. $8ab$; 128.

6. $2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$. 7. $(a+c)^2-(b-d)^2$.

8. $(2x+3y)(2x+3y-4)$. 9. $2+3x$.

10. $\dfrac{2x}{(x-4)(x-3)(x+3)}$. 11. 3.

II

1. $\frac{3}{2}\{3ax^3+ax^2y+3axy^2+7dy^3\}$. 2. $m(am+b)(m^2+2)$.

3. x^6-2x^3+1. 5. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$.

6. $x^4-(p-1)x^3+(q-p+1)x^2-(p-1)x+1$. 7. $a^4+a^2b^2+b^4$.

8. (i) $(a-b)(b-c)$. (ii) $(b+2a+3c)(b-2a-3c)$.

9. $ab(a^2-b^2)(a^2-4b^2)$. 10. 0. 11. 8.

III

1. px^3+qx^2+rx+s. 2. $-3b^3$. 3. 392. 4. 16.

5. $x^2+yz-xy-zx$. 6. $(4a-1)(16a^2+8a+3)$.

9. (x^2-2x+3) ; $(x+2)(x^2-2x+3)(x^2+2x+3)$. 10. x. 11. 12.

IV

1. $-l^4r^2+r(6l^3mn-4l^2m^3)-2l^3n^3-3l^2m^2n^2+6lm^4n-2m^6$.

2. $3a^3x^4+6a^2bx^3+3ab^2x^2+4b^3x+12$. 3. $64a^6-216b^6$.

4. (i) $a^3-3abc+(b^3+c^3)$. (ii) $a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+(b^2c-bc^2)$.
(iii) $a^4(b-c)-a(b^4-c^4)+(b^4c-bc^4)$.

5. $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$; -11 ; -68.

8. $a+2b+3c$. 9. $(x+y)$; $(x+y)^2(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

10. $\dfrac{m^3}{m^3+a^3}$. 11. 8.

V

1. 121. 2. $\frac{1}{2}(ax^5+bx^4y-cx^3y^2-dx^2y^3+exy^4-fy^5)$.

4. $8a^3+12a^2c+6ac^2+c^3$; 5. $8x^6+4x^5+12x^4-8x^2+24x-32$.

7. $a^3+a^2b+ab^2+b^3$. 8. (i) $a^2x(6ax+1)(a-x)$. (ii) $(yz+x)(xz+y)$.

9. $(x-1)$; $(x-1)^2(x-2)(3x+2)(x+1)(2x+1)$. 10. $\frac{4}{3x}$. 11. $\frac{9}{14}$.

VI

1. 87659405. 2. -125. 4. x^2+1. 5. $(x^2-7x+9)^2+(5)^2$.

6. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)$.

7. (i) $(a-b)(a-b+2)$. (ii) $(2a-b)(3a+b+3)$.

(iii) $(5x+2y)(3x-2y+2)$. 8. $(2x-y)a^2+(x+y)ax-x^3$.

9. (a^2-2a+2) ; $(a^4+4)(a+1)$. 10. $\frac{2(3x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$.

11. তাঁহার বাৎসরিক আয় 1200 টাকা।

VII

1. 7. 3. $x^3+y^3+z^3-3xyz$. 4. $x+a$.

6. $2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2-x^4-y^4-z^4$. 7. (i) $(3x+5)(2x-3)$.

(ii) $(7x-7y-4)(5x-5y-3)$. (iii) $(x-3y^2)(11x-21y^2)$.

9. -5.

VIII

1. $1+(a+b)x+\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}x^2$. 2. 55. 4. $2x(a+b)$

5. a^2-2 ; a^3-3a ; a^4-4a^2+2. 8. $(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$.

9. 11. 10. $\frac{1024a^7}{x^8-256a^8}$.

IX

1. $a^4+a^2x^2+x^4$. 4. $x^3+6x+\frac{12}{x}+\frac{8}{x^3}$.

6. $a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$. 8. 3.

9. $\frac{(a+2)}{(m-3n)(m-n)}$. 10. 28.

X

1. $2(a+m)(c+n)+2bd$. 2. 16. 5. $a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2$.

6. $(5x-2)(3x-7)$. 7. 17. 8. প্রত্যেকের আয় £125.

9. 4. 10. 1.

প্রশ্নমালা 58. [২৪৭ পৃষ্ঠা]

1. $(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)$.
2. $(p-2q-r)(p^2+4q^2+r^2+2pq+pr-2qr)$.
3. $(2x-3y-z)(4x^2+9y^2+z^2+6xy+2xz-3yz)$.
4. $(a+2b+1)(a^2+4b^2+1-2ab-a-2b)$.
5. $(2a+3b-4)(4a^2+9b^2+16-6ab+8a+12b)$.
6. $x^2+y^2+4+xy-2x+2y$. 7. $(x^2-x+2)(x^4+x^3-x^2+2x+4)$.
8. $2(z-y)(3x^2+y^2+z^2-3xy-3zx+yz)$.
9. $(a^2+3a+5)(a^4-3a^3+4a^2-15a+25)$. 10. $x-5y+3$.
11. $a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc$. 12. $x^2+y^2+1+xy+x-y$.
13. $x^2+4y^2+9z^2+2xy-3xz+6yz$. 14. $2a-3b-c$.

প্রশ্নমালা 59. [২৫১-২৫২ পৃষ্ঠা]

1. $(b-c)(a-c)(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)$. 2. $(b+c)(b-c)\times(a+c)(a-c)(a+b)(a-b)$. 3. $(b-c)(a-c)(a-b)(a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+abc)$. 4. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$. 5. $(b-c)(a-c)(a-b)(ab+bc+ca)$. 6. $(x+y)(y+z)(z+x)$.
7. $(y-z)(z-x)(x-y)(xy+yz+zx)$. 8. $5(y-z)(z-x)(x-y)\times(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$. 9. $-(y-z)(z-x)(x-y)$.
10. $-(b-c)(c-a)(a-b)$. 11. $-(b-c)(c-a)(a-b)$.
12. $(a+b+c)(ab+bc+ca)$. 13. $3(2x-y+z)(x-z)(x+y)$.
14. $-(b-c)(c-a)(a-b)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)$.
15. $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$.
16. $3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$. 17. $(y+z-x)(x+y-z)(x-y+z)$.
18. $-(y-z)(z-x)(x-y)$. 19. $-(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z+3)$.
20. $(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$.
21. $(ax+by+cz)(by+cz-ax)(cz+ax-by)(ax+by-cz)$.
22. $(x+2y+3z)(2y+3z-x)(3z+x-2y)(x+2y-3z)$.
23. 4200. 24. 249. 25. 1950.

প্রশ্নমালা 60. [২৫৯ পৃষ্ঠা]

1. $(x^2+1)(x+1)$. 2. $(x+1)^2(x-1)$. 3. $(x-1)^2(x+1)$.
4. $(ab+c)(ac+b)$. 5. $(x-a)(x+b)(x^2-bx+b^2)$. 6. $(ax+by)(bx+ay)$.

7. $(x+y+z)(x-z)$. 8. $(x+a)(b-c)$. 9. $(x^2-ab)(2a-3b)$

10. $(a-b)(a+b+c)$. 11. $(2a-3b)(2a+3b+4c)$.

12. $(ax-by)(ax+by+cz)$. 13. $(x^2-yz)(x^2+yz+y^2)$.

14. $(4x-5a)(4x+5a+3b)$. 15. $(a+b)(a^2+ab+b^2)$.

16. $(m-n)(m^2-mn+n^2)$. 17. $(a-b)(a+b)^3$.

18. $(x-y)^3(x+y)$. 19. $(a+2)(a^2+3a+4)$.

20. $(x-5)(x^2-12x+25)$. 21. $(2a-3b)(a+3b)(4a+3b)$.

22. $(x-y)(x-y-1)$. 23. $(2a-b)(2a-b-3)$.

24. $(x^2+a^2)(x-a)^2$. 25. $(a^2+2b^2)(a-2b)(a-b)$.

26. $(a+2b)(a+b+c)$. 27. $(x-3y)(x-y+z)$.

28. $(m+2p-3n)(m-2n)$. 29. $(a-7b+5c)(a-3b)$.

30. $(2x-3a+4b)(x+4a)$. 31. $(a-2b+3)(a-4b)$.

32. $(x-3y+2)(3x+y)$. 33. $(a-b-c)(a+b+c+1)$.

34. $(x-2y+3z)(x+2y-3z+4)$. 35. $(3x-4y-2z)(3x-4y+2z-5)$.

36. $(a+b)(a-b)(x+a)(x-a)(2x^2-3a^2)$. 37. $(x^2+ax-b)(2x-3b)$.

38. $(x+a)(x-a)(a+b)^2$. 39. $(a-1)^2(2a^2-a+2)$.

40. $(a-1)(a^2-6a+1)(a^2+3a+1)$. 41. $(2x+2y+z)(x+2y+2z)$.

42. $(2x+3y+z)(x-y-z)$. 43. $(a^2+1)^2(a^4-7a^2+1)$.

44. $(2x-3y+3z)(2x+y-3z)$. 45. $(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$.

46. $(x+1)(x+2)(x+4)$.

প্রশ্নমালা 61. [২৬২-২৬৩ পৃষ্ঠা]

1. $(x+1)(x+3)(x+4)$. 2. $(x+2)(x+3)(x+4)$. 3. $(x-1)(x-2)(x-3)$.

4. $(x-2)(x+3)(x+4)$. 5. $(x-1)(x^2-3x-2)$.

6. $(x+1)(x^2+4x-6)$. 7. $(x-2)(x^2-4x+5)$.

8. $(x^2-3x-5)(x+2)(x-2)$. 9. $(x-1)(x+2)(x^2-4x+5)$.

10. $(x+1)(x-3)(x^2-3x-2)$. 11. $(x+3)(x-2)(x^2+4x-6)$.

12. $(x-4)(x+2)(x^2-5x+7)$. 13. $(x-5)(x^2-2x+3)$.

14. $(x+3)(x^2-3x+4)$. 15. $(x+2)(x-4)^2$. 16. $(x-2)(2x^2+x+2)$.

17. $(x+2y)(x^2-2xy-5y^2)$. 18. $(a+3b)(a^2+ab-3b^2)$.

19. $(a-2b)(5a^2+7ab+14b^2)$. 20. $(2x-1)(4x^2+2x+3)$.

21. $(x-1)(x+3)(2x+1)$. 22. $(x-2)(x+1)^2$.

23. $(a-b)(2a^2+ab+b^2)$. 24. $(x-1)(3x^2+11x+3)$.

25. $(x+3y)(x^2-3xy+3y^2)$. 26. $(x+a-b)(x-a+2b)$.

27. $\{x^2+y^2(a+b)^2\}\{x+y(a-b)\}\{x-y(a-b)\}$.
28. $\{a^2+b^2(x+y)^2\}\{a^2+b^2(x-y)^2\}$. 29. $(a+2x-y)(a-x+2y)$.
30. $(x+2a+b)(x-a+2b)$. 31. $(x+y+z)(x+3y-z)$.
32. $(2a+b-3c)(2a-3b+3c)$. 33. $(x^2+2x+3)(x^2+4x-3)$.
34. $(a^2+ab-b^2)(a^2-5ab+b^2)$. 35. $(2x^2-6x+3)(2x^2-4x-3)$.
36. $(x^2+1)(x-1)^2$. 37. $(a^2+3a-5)(a^2-3a+5)$.
38. $(a-bx)(a-bx-cx^2)$. 39. $(x^2y^2+xy-z+1)(x^2y^2-xy+z+1)$.
40. $\{x(y+z)-y+z\}\{x(y-z)+y+z\}$.
41. $\{x(a+b)+y(a-b)\}\{x(a-b)+y(a+b)\}$.
42. $(x^2-2x-4)(x^2-2x-1)$. 43. $(a^2-3a+5)(a^2-3a+1)$.
44. $(2x^2+3x-3)(2x^2+3x-4)$. 45. $(x^2-xy+y^2)(x^2-4xy+y^2)$.
46. $(x^2-3x+4)(x^2-2x+4)$. 47. $(a^2-5ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$.
48. $(x^2+7x+5)(x^2-3x+5)$. 49. $(a^2+6ab+b^2)(a-b)^2$.
50. $(x^2+4x+10)(x^2+4x-2)$. 51. $(x^2-3x-17)(x^2-3x-5)$.
52. $(x^2+7x+30)(x+8)(x-1)$. 53. $(2x^2-3x+7)(x-3)(2x+3)$.
54. 0. 55. 0. 56. 0. 57. 300. 58. 5.

প্রশ্নমালা 62. [২৭০-২৭১ পৃষ্ঠা]

1. $2x-1$. 2. $3x-2$. 3. $2x+5a$. 4. $x(3x+4)$.
5. $3a-1$. 6. $2a-3b$. 7. x^2+x+1. 8. x^2-xy+y^2.
9. $x(2x^2+x+1)$. 10. x^2+3x+1. 11. x^2+4x+1.
12. $3a^2+2ax+x^2$. 13. $5a^2+3ax+x^2$. 14. $7x^2-3ax+2a^2$.
15. $5x^2-3x+2$. 16. $-7x^2+4x+1$. 17. $x^2(2x^2+3ax+4a^2)$.
18. $2(a^2+5a+2)$. 19. x^2+3x-2. 20. x^2-3x+5.
21. x^2+5x+1. 22. x^2+2x+4. 23. x^2+3x+5.
24. $2(x^2-2xa+2a^2)$. 25. $3x^2+2xy+4y^2$. 26. x^2+2x+3.
27. $4a^2+2a-5$. 28. x^2+2x+3.

প্রশ্নমালা 63. [২৭৪ পৃষ্ঠা]

1. x^2-5x+6. 2. $2x^3-17x+12$. 3. x^2+3x+4.
4. $3x^3-5x^2+7$. 5. $6x^2-11x+4$. 6. $2x^2+15x-8$.
7. $3x^2+5x-1$. 8. $5x^2-3x-1$. 9. $2x^2+3x-1$.
10. $3x^3-2x+1$. 11. x^2+x+2. 12. x^2+3x-2.

প্রশ্নমালা 64. [২৭৬-২৭৭ পৃষ্ঠা]

1. $x+4$. 2. $2x-1$. 3. $2x-3$. 4. $2x^2+1$.
5. $3a-2b$. 6. $3a-5b$. 7. $3x-4$. 8. $2x^2-3$.

প্রশ্নমালা 65. [২৭৮ পৃষ্ঠা]

1. $9x^4+30x^3-17x^2-76x+32$. 2. $18x^4+3x^3-109x^2-84x+32$. 3. $48x^5-64x^4-120x^3+160x^2+27x-36$. 4. $45x^4-24x^3-123x^2+40x+80$. 5. $12x^4-14x^3-94x^2+63x+180$. 6. $12x^6+8x^5+25x^4+34x^3+15x^2+18x+8$. 7. $32x^6-24x^5-8x^4+18x^3-48x^2+27x-18$. 8. $12x^6+24x^5+95x^4+118x^3+249x^2+144x+216$.

প্রশ্নমালা 66. [২৮০ পৃষ্ঠা]

1. $12x^4-100x^3+195x^2+70x-72$. 2. $6x^4-79x^3+273x^2-188x-96$. 3. $48x^4-92x^3-128x^2+157x-30$.
4. $16x^8+40x^7+20x^6+38x^5-20x^4-39x^3-15x^2-9x+9$.

প্রশ্নমালা 67. [২৮৩ পৃষ্ঠা]

1. $x+3$. 2. $\frac{x+3}{x+5}$. 3. $\frac{a+3b}{a-4b}$. 4. $\frac{x^2-ax+b^2}{x^2+ax-b^2}$.
5. $\frac{3x-2y}{2x+5y}$. 6. $\frac{1+2x-3x^2}{1-2x+3x^2}$. 7. $\frac{(x-1)^2}{x^2-3x+1}$. 8. $\frac{x^2+3x+5}{x^2+3x-5}$.
9. $\frac{x^2+3ax+7a^2}{2x^2-3ax+5a^2}$. 10. $\frac{2x+3}{3x+4}$. 11. $\frac{3x^2-ax-2a^2}{3x^2+ax-2a^2}$.
12. $\frac{2(a^2-5ab+7b^2)}{3(a^2+5ab+7b^2)}$. 13. $\frac{3(3x^2+4x+5)}{4(2x^2+3x+4)}$. 14. $\frac{a(3a^2-b^2)}{2a^2-b^2}$.
15. $\frac{4x(2x^2-3y^2)}{5y(3x^2-2y^2)}$. 16. $2(a+b+c)$. 17. $1+xyz$.
18. $\frac{z+x-2y}{4(y+z)}$. 19. 2. 20. $\frac{7x-2y}{5x^2-3xy+2y^2}$.

প্রশ্নমালা 68. [২৮৬-২৮৭ পৃষ্ঠা]

1. $\frac{108x^4}{81x^4-y^4}$. 2. $\frac{9ax(x+a)}{x^4-81a^4}$. 3. $\frac{4ab}{(a-b)^2}$.
4. $\frac{6x^2-12}{x^4-5x^2+4}$. 5. $\frac{6a^2x}{4x^4-5a^2x^2+a^4}$. 6. $\frac{48a^3}{x^4-10a^2x^2+9a^4}$.
7. $\frac{2x}{x^4-1}$. 8. $\frac{(x-c)}{(x-a)(x-b)}$. 9. $\frac{4}{x^2-6x+5}$.

10. $\frac{4}{x^2+14ax+13a^2}$. 11. $\frac{2}{x+3}$. 12. 0.

13. $\frac{4x^3}{1+x^4+x^8}$. 14. $\frac{12x^4}{x^6-64}$. 15. $\frac{96ax^5}{16x^8-6561a^8}$.

16. $\frac{3}{(x+a)(x+4a)}$. 17. $\frac{a-d}{(x+a)(x+d)}$. 18. $\frac{6a-11}{(a-1)(a-2)(a-3)}$.

19. $\frac{1}{(x+2)^2}$. 20. $\frac{5}{(x-3)(x-4)(x-5)}$. 21. $\frac{1}{a-1}$.

22. 1. 23. 0. 24. 0. 25. $\frac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$.

প্রশ্নমালা 69. [২৮৯-২৯১ পৃষ্ঠা]

1. $-x^2y^2z^2$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. 1. 4. $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$.

5. $\frac{1+a^2}{1+a}$. 6. $\frac{4a^4}{a^4-x^4}$. 7. x. 8. $a-b$.

9. $\frac{1}{3(x-2)}$. 10. $-\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{xy(x-y)^2}$. 11. $\frac{adf+ae}{bdf+be+cf}$.

12. x^2. 13. a^2+b^2. 14. m. 15. $4xy$. 16. 1.

17. $\frac{1}{8}$. 18. $\frac{2}{3}$. 19. 1. 20. a.

প্রশ্নমালা 70. [২৯৯-৩০৩ পৃষ্ঠা]

21. 0. 24. 3. 25. $\frac{a^4-10a^3b-6ab^3-b^4}{a^4+10a^3b+6ab^3-b^4}$. 26. 1.

27. $\frac{a-b}{a+b}$. 28. 0. 29. x^6+2. 30. 1. 31. $\frac{3(a+b)}{a-b}$.

32. 1. 34, 0. 35. 3. 36. $x+y+z$.

37. $a^2+b^2+c^2$. 38. $a+b+c$. 39. 0. 42. 0.

43. 1. 44. 2. 45. 1. 46. 0.

47. $\frac{1}{xyz}$. 48. $\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$. 49. $\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

50. $\frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$. 51. $\frac{x^2+hx+k}{(x-a)(x-b)(x-c)}$. 56. x^2.

প্রশ্নমালা 71. [৩০৬-৩০৮ পৃষ্ঠা]

1. 2. 2. 2. 3. -5. 4. 1. 5. 2.

6. $\frac{1}{2}$. 7. 3. 8. -5. 9. 6. 10. $a+b$.

11. $2a$. 12. $\frac{1}{2}(a+b)$. 13. $a+b$. 14. $m-n$.
15. $a+b$. 16. $\frac{1}{4}(a+b)$. 17. $\frac{2ab}{a+b}$. 18. $\frac{12ab}{a+3b}$.
19. $c+d$. 20. $\frac{1}{3}(a+b+c)$. 21. $-\frac{1}{3}(a+b+c)$. 22. ab.
23. $\frac{1}{ab}$. 24. 13. 25. 16. 26. 20. 27. −3.
28. 8. 29. 10. 30. 9. 31. 9. 32. 5.
33. 8. 34. 5. 35. 7. 36. $\frac{8a}{25}$. 37. 24.
38. 18. 39. $\frac{6a}{7}$. 40. 56. 41. $4\frac{1}{2}$. 42. 6.
43. $10\frac{3}{8}$. 44. $\frac{ac+b^2}{b^2+c^2}$. 45. $-2\frac{39}{73}$. 46. 8. 47. 11.
48. 2. 49. $25a+24b$. 50. $\frac{2ab}{a+b}$. 51. 72. 52. $7\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা 72. [৩০৯-৩১০ পৃষ্ঠা]

1. 27. 2. 5. 3. 20. 4. 2. 5. 10.
6. 5. 7. 5. 8. 5. 9. 7. 10. 5.

প্রশ্নমালা 73. [৩১১ পৃষ্ঠা]

1. $\frac{15}{16}$. 2. $\frac{3}{2}$. 3. $2\frac{4}{7}$. 4. $4\frac{1}{20}$. 5. 3.
6. 3. 7. $10\frac{7}{8}$. 8. $a^2+b^2+c^2$. 9. $\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$.
10. 0. 11. $a^3+b^3+c^3-3abc$. 12. 0.

প্রশ্নমালা 74. [৩১৪-৩১৬ পৃষ্ঠা]

1. $-5\frac{1}{2}$. 2. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. 3. $\frac{1}{3}(a+b+c)$.
4. $\frac{a^2+b^2+c^2}{2(a+b+c)}$. 5. 2. 6. 3. 7. 4. 8. 5.
9. $1\frac{1}{2}$. 10. 4. 11. 4. 12. 7. 13. 1.
14. 4. 15. 2. 16. $\frac{12}{73}$. 17. 3. 18. 2.
19. $\frac{3}{2}$. 20. $2\frac{3}{4}$. 21. $26\frac{1}{3}$. 22. 13. 23. $55\frac{1}{2}$.
24. $-\frac{19}{28}$. 25. $-\frac{49}{114}$. 26. $-\frac{24}{7}$. 27. 15. 28. $\frac{31}{47}$.
29. $\frac{4}{5}$. 30. $\frac{ab(a+b-2c)}{a^2+b^2-ac-bc}$. 31. $\frac{c(a^2-ab+b^2)+ab}{ab(c+1)}$.

32. $\dfrac{nb-am}{m-n}$. 33. $\dfrac{a^2-bc}{b+c-2a}$. 34, $\dfrac{3ab-a^2-b^2}{a+b}$. 35. $3a$.

প্রশ্নমালা 75. [৩১৭-৩১৯ পৃষ্ঠা]

1. $1\frac{1}{2}$. 2. -3. 3. $-\frac{46}{63}$. 4. 2. 5. 1.
6. 2. 7. $\frac{7}{9}$. 8. $-\frac{11}{7}$. 9. 2. 10. $\frac{1}{4}$.
11. $\frac{5}{8}$. 12. $1\frac{8}{11}$. 13. $\frac{1}{5}$. 14. $\frac{7}{8}$. 15. $4\frac{1}{2}$
16. 6. 17. 7. 18. $4\frac{1}{2}$. 19. $-\frac{4}{3}$. 20. 1.
21. $-\frac{5}{6}$. 22. $3\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা 76. [৩২১-৩২২ পৃষ্ঠা]

1. 24. 2. $-b$. 3. $-\frac{3}{4}$. 4. 2. 5. 7
6. $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$. 7. $\dfrac{ab}{a+b}$. 8. $\dfrac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$. 9. 2.
10. $\dfrac{3}{2a^2}$. 11. 4. 12. $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$. 13. 3. 14. 2.
15. $\dfrac{ab}{a-b}$. 16. 25. 17. 3. 18. $\dfrac{2(a^2+b^2)}{a-b}$.
19. 6. 20. $\frac{1}{2}(a-b)$.

প্রশ্নমালা 77. [৩২৬ পৃষ্ঠা]

1. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}x=5\\y=2\end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{l}x=7\\y=6\end{array}\right\}$ 4. $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=7\end{array}\right\}$
5. $x=\dfrac{b^2+ac}{a^2+b}$, $y=\dfrac{ab-c}{a^2+b}$. 6. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\}$ 7. $\left.\begin{array}{l}x=40\\y=16\end{array}\right\}$
8. $\left.\begin{array}{l}x=8\\y=5\end{array}\right\}$ 9. $\left.\begin{array}{l}x=6\\y=4\end{array}\right\}$ 10. $\left.\begin{array}{l}x=6\\y=8\end{array}\right\}$

প্রশ্নমালা 78. [৩২৮ পৃষ্ঠা]

1. $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=2\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{l}x=7\\y=2\end{array}\right\}$ 4. $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=7\end{array}\right\}$
5. $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=4\end{array}\right\}$ 6. $\left.\begin{array}{l}x=13\\y=3\end{array}\right\}$ 7. $\left.\begin{array}{l}x=6\\y=5\end{array}\right\}$ 8. $\left.\begin{array}{l}x=5\\y=5\end{array}\right\}$
9. $\left.\begin{array}{l}x=2\frac{1}{2}\\y=1\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ 10. $\left.\begin{array}{l}x=6\\y=2\end{array}\right\}$

প্রশ্নমালা 79. [৩৩২-৩৩৩ পৃষ্ঠা]

1. $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=2\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=1\end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{l}x=7\\y=4\end{array}\right\}$ 4. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=2 \end{array}\right\}$ 6. $\left.\begin{array}{l} x=6 \\ y=4 \end{array}\right\}$ 7. $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right\}$ 8. $\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=3 \end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=2 \end{array}\right\}$ 10. $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array}\right\}$ 11. $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right\}$ 12. $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=4 \end{array}\right\}$ 14. $\left.\begin{array}{l} x=-5 \\ y=2 \end{array}\right\}$ 15. $\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=1 \end{array}\right\}$ 16. $\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=11 \end{array}\right\}$

17. $x=\frac{bc-c^2}{ab-a^2}$, $y=\frac{ac-c^2}{ab-b^2}$. 18. $\left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=9 \end{array}\right\}$ 19. $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{5} \end{array}\right\}$

20. $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right\}$ 21. $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right\}$ 22. $\left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=4 \end{array}\right\}$ 23. $\left.\begin{array}{l} x=10 \\ y=5 \end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=10 \end{array}\right\}$ 25. $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right\}$ 26. $x=\frac{a^2-b^2}{am-bn}$, $y=\frac{a^2-b^2}{an-bm}$.

27. $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{3}{5}$. 28. $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{1}{2}$. 29. $x=4$, $y=2$.

30. $x=\frac{1}{15}$, $y=18$.

প্রশ্নমালা 80. [৩৩৮-৩৪২ পৃষ্ঠা]

1. 180 গজ × 90 গজ, 230 গজ × 100 গজ। 2. 15 ফুট ; 12 ফুট। 3. £33. 4. 50 বৎসর, 30 বৎসর। 5. 20 জন পুরুষ, 16 জন স্ত্রীলোক। 6. 56 ঘণ্টায়, A, 84 মাইল এবং B, 70 মাইল ভ্রমণ করিয়া। 7. 28 দিন। 8. £2. 15 শি.। 9. 24 ফুট। 10. 22 দিন কাজ করিয়াছিল। 11. 4 দিন। 12. £52 ; 52 শি. 13. A, £162 ; B, £118 ; C, £104. 14. 34 টি ভেড়া ; £70. 15. লণ্ডন হইতে $98\frac{2}{3}$ মাইল দূরে ; $10\frac{2}{3}$ ঘণ্টা। 16. 44 টি আতা। 17. 32. 18. 72. 19. 23. 20. 5, 8, 2, 24. 21. 19, 5, 4, 32. 22. 22, 31, 9, 54.

প্রশ্নমালা 81. [৩৫০-৩৫৮ পৃষ্ঠা]

1. 3 টা বাজিয়া $16\frac{4}{11}$ মিনিট। 2. 5 টা বাজিয়া $27\frac{3}{11}$ মিনিট। 3. (i) 7 টা বাজিয়া $5\frac{5}{11}$ মিনিট। (ii) 7 টা বাজিয়া $21\frac{9}{11}$ এবং $54\frac{6}{11}$ মিনিট। (iii) 7 টা বাজিয়া $38\frac{2}{11}$ মিনিট। 4. (i) 7 টা বাজিয়া $5\frac{5}{11}$ মিনিট। (ii) 6 টা বাজিয়া $16\frac{4}{11}$ মিনিটে। 5. $\frac{ap}{p+q}$ মাইল। 6. দ্রুততর ভ্রমণকারীর যাত্রার স্থান হইতে 8 মাইল ; 6 ঘণ্টা। 8. 36 মিনিট। 9. ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ এবং $4\frac{1}{2}$ মাইল করিয়া। 10. 160. 11. £6. 12. 300. 13. কুকুর, 960 ; খরগোস, 1200. 14. 180. 15. 20 শিলিং ও 5 শিলিং। 16. 40. 17. 76 পাউণ্ড স্বর্ণ এবং 30 পাউণ্ড রৌপ্য। 18. 4 ঘণ্টা এবং 6 ঘণ্টা।

19. 42 বৎসর। 20. প্রথম শলাকা হইতে $6\frac{2}{3}$ আউন্স ও দ্বিতীয়টি হইতে $13\frac{1}{3}$ আউন্স।
21. £450. 8 শি. 4 পে.; £156. 13 শি. 4 পে.। 22. 11 পয়সা; প্রথম শ্রেণীর প্রত্যেক লোক 6 পয়সা; দ্বিতীয় শ্রেণীর 5 পয়সা, তৃতীয় শ্রেণীর 4 পয়সা; এবং চতুর্থ শ্রেণীর 4 পয়সা। 23. 189. 24. 25 আউন্স; প্রতি আউন্স 8 শি.।
25. 7 শি.; 11 শি. 8 পে.। 26. 2080. 27. প্রত্যেকটি $\frac{3}{4}$ পে.; 512.
28. 12. 29. 654. 30. 1504. 31. 80. 32. 736. 33. 4550.

প্রশ্নমালা 82. [৩৬৩-৩৬৮ পৃষ্ঠা]

1. $\frac{4}{5}$. 2. 7, 9. 3. 6, 2. 4. 60, 15. 5. 24, 15.
6. $\frac{6}{13}$. 7. $\frac{2}{3}$. 8. $\frac{3}{8}$. 9. 15 টাকা; 24 টাকা। 10. 3, 5.
11. ঘণ্টায় 6 মাইল এবং 3 মাইল করিয়া। 12. 8; 16. 13. 20 দিন।
14. 480 বর্গগজ। 15. প্রতি পাউণ্ড চা 2 শি. 8 পে. এবং কফি 1 শি. 6 পে.।
16. A এর গতিবেগ ঘণ্টায় 3 মাইল, B এর গতিবেগ ঘণ্টায় $4\frac{2}{7}$ মাইল।
17. চার্লসের 22 এবং উইলিয়মের 26. 18. A, 500 টাকা; B, 400 টাকা; C, 200 টাকা। 19. 75. 20. 65. 21. 21 ক্রাউন, 40 অর্দ্ধ-গিনি।
22. একটি ঘোড়া £24; একটি গরু £12. 23. A এর 5 শি., B এর 3 শি.।
24. A, 24 দিন; B, 48 দিন। 25. $\frac{8}{15}$. 26. 15 মাইল। 27. 72.
28. 75 শি., 35 শি.। 29. 34টি ভেড়া; £70। 30. 27.

প্রশ্নমালা 83. [৩৭৬-৩৮১ পৃষ্ঠা]

1. 50 পাউণ্ড; প্রতি পাউণ্ড 28 শি.। 2. A, 14 শি.; B, 19 শি.।
3. A এর 3 শি. 6 পে.; B এর 4 শি. 2 পে.। 4. A, $\frac{mp}{p-m+n}$ দিন; B, $\frac{mp}{m-n}$ দিন। 5. 8 ঘণ্টা। 6. 720 মাইল। 7. প্রথমটি হইতে 4 এবং দ্বিতীয়টি হইতে 3 গ্যালন। 8. 253. 9. 20 জন লোক; 6 শি.।
10. প্রত্যেকটি সমান ছিদ্র 32 ঘণ্টায় এবং অপরটি 24 ঘণ্টায়।
11. প্রথম প্রকারের 75 এবং দ্বিতীয় প্রকারের 25 কোয়ার্ট্‌স মদ।
12. 6 কোয়ার্ট্‌স গম; 10 কোয়ার্ট্‌স বালি। 13. ঘণ্টায় 45 এবং $22\frac{1}{2}$ মাইল।
14. 20 বুসেল রাই (rye), 52 বুসেল গম। 15. ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ মাইল।
16. A, 5; B, 6 মিনিট। 17. A ঘণ্টায় 10 এবং B ঘণ্টায় 12 মাইল।
18. ঘণ্টায় $\frac{b(n-1)}{a-c}$ মাইল। 19. 100 মাইল।

প্রশ্নমালা 84. [৩৯০-৩৯১ পৃষ্ঠা]

7. (1) $6x-5y=0$. (2) $5x+7y=35$. (3) $x+y+2=0$. (4) $21x-5y+124=0$. (5) $5x+9y+55=0$.

প্রশ্নমালা 85. [৩৯৩-৩৯৪ পৃষ্ঠা]

1. $x^3+6x^2+11x+6$. 2. $x^3+14x^2+59x+70$. 3. $x^3-x^2-24x-36$. 4. $x^3-x^2-70x-200$. 5. $x^3-4x^2-29x-24$. 6. $x^3+x^2-46x+80$. 7. $x^3-37x+84$. 8. $x^3-6x^2-37x+210$. 9. $x^3-23x^2+167x-385$. 10. $x^3-18x^2+99x-162$. 11. $x^3-13x^2-8x+240$. 12. $x^3+25x^2+199x+495$. 13. $x^3-52x+96$. 14. $x^3-23x^2+151x-273$. 15. x^3+13x^2-144. 16. $x^3-7x^2-138x+1080$. 17. $x^3-3x^2-73x+315$. 18. $x^3+35x^2+396x+1440$. 19. $x^3-148x-672$. 20. $x^3-31x^2+290x-800$.

প্রশ্নমালা 86. [৩৯৫-৩৯৬ পৃষ্ঠা]

1. $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$. 2. $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz$. 3. $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz$. 4. $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$. 5. $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz$. 6. $a^2+x^2+y^2+z^2-2ax+2ay-2az-2xy+2xz-2yz$. 7. $a^2+x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2xy+2xz+2yz$. 8. $m^2+n^2+p^2+q^2+r^2+2mn+2mp+2mq+2mr+2np+2nq+2nr+2pq+2pr+2qr$. 9. $p^2+q^2+r^2+x^2+y^2-2pq+2pr-2px-2py-2qr+2qx+2qy-2rx-2ry+2xy$. 10. $a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2-2ab+2ac-2ax+2ay+2az-2bc+2bx-2by-2bz-2cx+2cy+2cz-2xy-2xz+2yz$. 11. $a^2+4x^2+9y^2+16z^2-4ax-6ay-8az+12xy+16xz+24yz$. 12. $4a^2+b^2+4c^2+d^2-4ab+8ac-4ad-4bc+2bd-4cd$. 13. 49. 14. 9. 15. 0. 16. 144. 17. 1635. 18. 1. 19. 63. 20. 0. 21. 47. 22. 69.

প্রশ্নমালা 87. [৩৯৯-৪০০ পৃষ্ঠা]

1. $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$. 2. $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$. 3. $a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$. 4. $a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+126a^5b^4+126a^4b^5+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9$. 5. $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$. 6. $m^7-7m^6n+21m^5n^2-35m^4n^3+35m^3n^4-21m^2n^5+7mn^6-n^7$. 7. $x^4+8x^3+24x^2+32x+16$. 8. $x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$.

9. $x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1$. 10. $x^4+12x^3+54x^2+108x+81$. 11. $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$. 12. $64-192z+240z^2-160z^3+60z^4-12z^5+z^6$. 13. $16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$. 14. $x^9-9x^8y+36x^7y^2-84x^6y^3+126x^5y^4-126x^4y^5+84x^3y^6-36x^2y^7+9xy^8-y^9$. 15. $243x^5-810x^4+1080x^3-720x^2+240x-32$. 16. $1-8a+28a^2-56a^3+70a^4-56a^5+28a^6-8a^7+a^8$. 17. $1-7c+21c^2-35c^3+35c^4-21c^5+7c^6-c^7$. 18. $1-18x+135x^2-540x^3+1215x^4-1458x^5+729x^6$. 19. $1-14x+84x^2-280x^3+560x^4-672x^5+448x^6-128x^7$. 20. $256x^8-1024x^7a+1792x^6a^2-1792x^5a^3+1120x^4a^4-448x^3a^5+112x^2a^6-16xa^7+a^8$. 21. $x^{10}-10x^9a+45x^8a^2-120x^7a^3+210x^6a^4-252x^5a^5+210x^4a^6-120x^3a^7+45x^2a^8-10xa^9+a^{10}$. 22. $243x^5-810x^4a+1080x^3a^2-720x^2a^3+240xa^4-32a^5$. 23. $10x^4+20x^2+2$. 24. $2x^6+30x^4+30x^2+2$. 25. $14x^6a+70x^4a^3+42x^2a^5+2a^7$. 26. 16. 27. 32. 28. 64. 29. 128. 30. 256. 31. 30. 32. 3. 33. 0. 34. 16. 35. 0.

প্রশ্নমালা 88. [৪০১-৪০২ পৃষ্ঠা]

1. $x^3+y^3-z^3+3xyz$. 2. $p^3-8q^3-r^3-6pqr$. 3. $8x^3-27y^3-z^3-18xyz$. 4. $a^3-8b^3+27+18ab$. 5. $27a^3-125b^3-64-180ab$. 6. $(x-y-1)(x^2+y^2+1+xy+x-y)$. 7. $(x-y+2)(x^2+y^2+4+xy-2x+2y)$. 8. $(x-2y-3z)(x^2+4y^2+9z^2+2xy+3xz-6yz)$. 9. 0. 10. 0. 11. 0. 16. 0. 17. 392000.

প্রশ্নমালা 89. [৪০৩ পৃষ্ঠা]

3. $8(c-b)(a-b)(a-c)$. 4. $(x-z)(y-z)(y-x)$. 5. 0. 6. 0.

প্রশ্নমালা 90. [৪০৫ পৃষ্ঠা]

1. $2x^2y+3x^2z+12y^2z+4xy^2+9z^2x+18yz^2+12xyz$.
2. $64x^2y+320x^2z+5y^2z+8xy^2+200xz^2+25yz^2+80xyz$.
3. $2a^2b+3a^2c+12b^2c+4b^2a+9c^2a+18c^2b+12abc$.
4. $9x^2y+90x^2z+10y^2z+3y^2x+300z^2x+100z^2y+90xyz$.
5. $2(x^3+y^3+z^3)+7(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2)+16xyz$.
6. $2a^2b-3a^2c-12b^2c-4ab^2-9ac^2+18bc^2+12abc$.
7. $4abc$. 8. $4abc$. 9. 0. 10. $27abc$.

প্রশ্নমালা 91. [৪০৬-৪০৭ পৃষ্ঠা]

4. 0. 8. $84abc$. 9. $6xyz$. 10. $3(x+y-2z)(2x-2y+z)\times(y+z-x)$. 11. $3(3x+3y+2z)(3x+2y+3z)(2x+3y+3z)$. 12. 2567. 13. 16800. 14. 1280. 15. 1331.

বিবিধ প্রশ্নমালা III

[৪২০-৪২৬ পৃষ্ঠা]

I

1. $12a^3$; $720a^6b^4c^5x^2y^3$. 2. $(x-3)^2, (4x+1)(x-3)$; $x-3$.
3. $(a-b)(b-c)(b+2a+3c)(b-2a-3c)$.
4. $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$. 6. x^4+2.
7. $x=\frac{b}{a^2+b^2-ab}$, $y=\frac{a}{a^2+b^2-ab}$. 9. 0.
10. $\frac{ab}{a+b}$ ঘণ্টা ; $\frac{abc}{ab-bc-ac}$ ঘণ্টা।

II

1. $x-3$. 2. $(x-a)(x+b)(x^2+a)$. 3. (i) $\frac{9}{4}x^2y^2$. (ii) 3. 4. 0. 6. $\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}$. 7. $\frac{5(x-3)}{3(x-5)}$. 9. 9.
10. $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2a}$, $y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2b}$.

III

1. $(a-b)(x+a)$. 2. x^6-1. 3. $x+3$.
4. $(x+a)(x+b)(x-b)$. 5. $\frac{8}{x^4-16}$. 6. $(a-b)(b-c)(a-c)$.
7. $a^5+10a^3+40a+\frac{80}{a}+\frac{80}{a^3}+\frac{32}{a^5}$. 8. $(xy+yz+zx)$.
9. $x=\frac{2(b-1)}{2ab-(a+b)}$, $y=\frac{2(a-1)}{2ab-(a+b)}$. 10. £2800 এবং £1200.

IV

2. $x-y$. 3. $\frac{1}{x^2-3x+2}$. 4. $\frac{1}{m^2-m+1}$. 7. 3157.
8. 345. 9. $\frac{13}{21}$. 10. 34.

V

1. $x^2-(a+b)x+ab$. 2. $280x^3-123x^2-37x+6$. 3. 1.
4. $\frac{1}{a+c}$. 6. 1. 10. 5.

VI

1. $x-2$. 2. $abc(x-a)(x-b)(x-c)$. 4. 0. 8. 2.
9. 12 শি.। 10. -4.

VII

1. x^2+5. 2. $(a-b)(b-c)(c-a)$. 4. $\frac{3}{x^2-4x+3}$.
5. $\frac{a^2+b^2}{2ab}$. 9. $x=10, y=15$. 10. 2.

প্রশ্নমালা 93. [৪৩৮-৪৪০ পৃষ্ঠা]

1. 179. 2. 3. 3. $6\dot{5}$. 4. $-8\frac{3}{4}$. 5. $\frac{1}{a}(ad-bc)$.
16. $5a^2-11a+15=0$. 17. $a=0$, বা, $1\frac{1}{3}$. 18. $2rn$, (r, অখণ্ড ধনরাশি)।
29. $(b-c)(a-c)(a-b)(ab+bc+ca)$. 36. $1+x+x^2+\cdots+x^{30}+x^{31}$.
38. 1111111. 41. $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$. 42. $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$. 43. $x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6$.
44. $x^{14}-x^{12}y^2+x^{10}y^4-x^8y^6+x^6y^8-x^4y^{10}+x^2y^{12}-y^{14}$.
45. $x^{15}+x^{14}y+\cdots\cdots+xy^{14}+y^{15}$. 46. $p=12$; $a=\frac{1}{3}$. 49. 0. 50. 1.

প্রশ্নমালা 94. [৪৪৫-৪৪৭ পৃষ্ঠা]

1. শেষেরটি। 2. শেষেরটি। 3. প্রথমটি। 4. প্রথমটি।
5. শেষেরটি। 6. $a:d$. 7. 1 : 4. 8. 1 : 1.
9. 75 : 8. 10. 28 : 27. 11. 5 : 7. 12. 3 : 4.
13. 63 এবং 72. 14. 85 এবং 51. 15. 28 এবং 35. 16. 42 এবং 54.
17. -15. 18. 35. 19. -17. 20. $\frac{ad-bc}{c-d}$.
23. 76 : 75. 24. 1772 : 1771. 25. B.

প্রশ্নমালা 95. [৪৪৮ পৃষ্ঠা]

1. 4. 2. 18. 3. $37\frac{1}{2}$. 4. 36. 5. 20.
6. 60. 7. 20. 8. 6. 9. 14. 10. 18.

প্রশ্নমালা 96. [৪৫৩ পৃষ্ঠা]

1. $x=9, y=6.$ 2. $x=25, y=9.$ 3. $x=56, y=30.$

4. $\frac{a}{3}.$ 5. $\frac{3}{4}.$ 6. $\frac{4}{81}.$

7. $2\frac{7}{9}.$ 8. $a\left\{1-\frac{16b^2}{(1+b)^4}\right\}.$ 12. 2.

প্রশ্নমালা 98. [৪৫৯-৪৬১ পৃষ্ঠা]

26. 0.

প্রশ্নমালা 99. [৪৬৭ পৃষ্ঠা]

1. $\sqrt[7]{a^5}.$ 2. $\frac{1}{\sqrt{x^3}}.$ 3. $3\sqrt[5]{x^4}.$ 4. $\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}.\sqrt{a}}.$

5. $\frac{8}{\sqrt[3]{m^8}}.$ 6. $\frac{\sqrt[4]{a^5}}{3\sqrt[5]{x^4}}.$ 7. $\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}.$ 8. $\sqrt[5]{x^{2+a}}.$

9. $\sqrt[2m]{a^{11}}.$ 10. $\sqrt[a]{x^4}.$ 11. $x^{\frac{7}{3}}.$ 12. $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}.$

13. $x^{\frac{2}{3}}.$ 14. $a^{\frac{2}{5}}.$ 15. $x^{\frac{3}{2}}.$ 16. $a^{\frac{3}{4}}.$

17. $\frac{1}{8}.$ 18. 4. 19. 27. 20. 32.

21. $\frac{1}{27}.$ 22. 36. 23. $\frac{1}{25}.$ 24. 81.

25. 36. 26. $x^{-m}.$

প্রশ্নমালা 100. [৪৭০ পৃষ্ঠা]

1. $a^{-6}.$ 2. $a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{8}}.$ 3. $ab^6.$ 4. $a^{-8}b^{-\frac{5}{3}}.$

5. $a^8b^6.$ 6. $x^{-\frac{9}{2}}y^4.$ 7. $x^{\frac{5}{32}}.$ 8. $a^{-1}.$

9. $y.$ 10. $\frac{4}{9}x^2a^2.$ 11. $\frac{9}{16}x^{-2}a^{-2}.$ 12. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}.$

13. $a^{-1}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{6}}.$ 14. $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}}.$ 15. $a^4b^2.$

প্রশ্নমালা 101. [৪৭৩-৪৭৫ পৃষ্ঠা]

1. $x-2x^{\frac{1}{2}}+1.$ 2. $a-27b.$ 3. $1+a^2b^{-2}+a^4b^{-4}.$

4. $x^2+6xz^{\frac{1}{3}}-4y+9z^{\frac{2}{3}}.$ 5. $x^{-2}+x^{-1}y^{-1}+y^{-2}.$

6. $a+a^{\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}+a^{-1}.$ 7. $x+y+z-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}.$

8. $a^{2m}-9b^{2n}+12b^nc^p-4c^{2p}.$ 9. $a^3-64b^2.$

10. $a+a^{\frac{3}{4}}x^{-\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{3}{4}}-x^{-1}.$ 11. $x-x^{\frac{1}{2}}.$ 12. $2+4x^{-1}+2x^{-2}.$

13. $y + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + x$. 14. $a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - b$. 15. $x^{2n} - 1 + x^{-2n}$.

16. $4x - 2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}} + y^{-1} + y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{2}{3}}$.

17. $x^{\frac{9}{4}} - x^{\frac{15}{8}}a^{\frac{3}{8}} + x^{\frac{9}{8}}a^{\frac{9}{8}} - x^{\frac{3}{8}}a^{\frac{15}{8}} + a^{\frac{9}{4}}$.

18. $x^{2^n} - a^{2^n}$. 19. $x^{2^{n-1}} - y^{2^{n-1}}$. 20. a^{m-1}.

21. $x^{\frac{3}{4}} + 3x^{\frac{1}{2}} - 1$. 22. $x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{5}{4}}y^{-\frac{1}{4}} + xy^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + y$.

23. $x^n + x^{\frac{n}{2}}a^{\frac{n}{2}} + a^n$. 24. $x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{5}{6}} + 4x + 2x^{\frac{7}{6}} - 4x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{3}}$.

25. $a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$. 26. $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$.

27. $\frac{2x + 36x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x - 27y}$. 28. $\frac{a + x}{a^2 + 3ax + x^2}$. 29. 1.

30. $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$. 31. 1. 32. $\frac{a^2 + b^2}{a(a + b)}$. 33. 2.

34. $\left(\frac{a - b}{a + b}\right)^n + 2$. 36. $\left(\frac{x^{-2}}{4} - \frac{y^{-3}}{5}\right)\left(\frac{x^{-4}}{16} + \frac{y^{-6}}{25}\right)$. 37. $\left(\frac{p}{q}\right)^{2m}$.

38. $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$. 39. 1.

প্রশ্নমালা 102. [৪৭৭-৪৭৮ পৃষ্ঠা]

1. 3. 2. 5. 3. 2. 4. $-\frac{1}{11}$. 5. 6.

6. $\frac{b + d}{a + c}$. 7. $1\frac{1}{2}$. 8. $2\frac{1}{2}$. 9. 2. 10. 3.

11. -4. 12. 0. 13. $x = 4, y = 2$. 14. $x = -2, y = -3$.

15. $x = 2, y = 3$. 16. $x = 1, y = 3$. 17. $x = 2, y = -1$.

18. $x = 1, y = \frac{1}{2}$. 19. $x = 1, y = 2$. 20. $y = 4$ এবং $x = 2$, অথবা $-\frac{1}{2}$.

21. $x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}, y = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}$. 22. $m = n^{\frac{1}{n-1}}$.

প্রশ্নমালা 103. [৪৮৩-৪৮৪ পৃষ্ঠা]

1. $2xz + 3y$. 2. $x^2 - 2x + 3$. 3. $x^3 - x + 1$. 4. $2x^2 - 3x + 4$.

5. $2x^2 + 2ax + 4b^2$. 6. $3x^2 - \frac{xy}{3} + 3y^2$. 7. $x^2 - x + \frac{1}{4}$.

8. $7x^2 - \frac{x}{5} + 3$. 9. $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$. 10. $\frac{a^2}{2} + \frac{a}{x} - \frac{x}{a}$.

11. $\frac{a}{2b} - 1 - \frac{2b}{a}$. 12. $\frac{3a}{x} - \frac{1}{5} + \frac{2x}{3a}$. 13. $2x^2 - 2xy^2 - y^4$.

14. $\frac{7x}{y} - 3 - \frac{y}{7x}$. 15. $\frac{x}{y} - \frac{1}{2} - \frac{y}{x}$. 16. $\frac{2x}{7y} - 5 + \frac{3y}{4x}$.

17. $x - x^{\frac{1}{2}} + 1$. 18. $x^{\frac{5}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{6}}$. 19. $ax^{-1} + 1 + a^{-1}x$.

20. $x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}$. 21. $\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{5}{3}xy^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{1}{2}}y$. 22. $a^m - 2a^n$.

23. $a^{2m+1} + 3a^m - 5c^{m-2}$.

প্রশ্নমালা 104. [৪৮৫-৪৮৬ পৃষ্ঠা]

1. $5xy - 4$. 2. $7ax^2 - 3b^2$. 3. $7a^3b^4 + 9a^4b^3$.

4. $\frac{x^4y^2}{2} - \frac{x^3y^5}{5}$. 5. $\frac{5ab}{2} - \frac{c^2}{3}$. 6. $a + b + c$.

7. $a - b + c$. 8. $2a - b - 3c$. 9. $a^2 + 2b^2 - 3c^2$.

10. $2a^2 - 3b^2 + 5c^2$. 11. $x - \frac{b}{2} + \frac{a}{3}$. 12. $x - 2 - \frac{1}{x}$.

13. $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$. 14. $\frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a}$. 15. $\frac{x}{y} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{y}{x}$.

16. $\frac{3x}{a} - 1 + \frac{a}{3x}$. 17. $x + 2 + \frac{1}{x}$. 18. $a^{\sqrt{2}} - a^{-\sqrt{2}}$.

19. $a - b + c - d$. 20. $a^2 + b^2$. 21. $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$.

22. $a^2 + a - \frac{1}{2}$. 23. $2a(b + c) + 2bc$.

প্রশ্নমালা 105. [৪৯৩-৪৯৪ পৃষ্ঠা]

1. $x = 5, y = 4$. 2. $x = 7, y = -5$. 3. $x = 8, y = 6$.
4. $x = 9, y = 11$. 5. $x = 10, y = 13$. 6. [ছোট বর্গের এক বাহুর দশগুণকে দৈর্ঘ্যের এককরূপে লও।] $x = 1{\cdot}2$. 7. $x = 7$.
8. $x = 7$. 9. 9. 10. 4. 11. $(-6, 4)$; $(8, 2)$; $(6, 8)$; ক্ষেত্রফল = 40 বর্গ একক। 12. $(5, 4)$. 13. (i) $(3, 0)$; $(0, -3)$; $(-3, 0)$; $(0, 3)$; ক্ষেত্রফল = 18 বর্গ একক। (ii) $(1, 5)$; $(12, 5)$; $(12, 10)$; $(1, 10)$; ক্ষেত্রফল = 55 একক। (iii) $(3, 0)$; $(8, 0)$; $(0, 5)$; $(0, 12)$; ক্ষেত্রফল = $40{\cdot}5$ বর্গ একক। 14. (i) $(0, 0)$; $(5, 0)$; $(0, 6)$; ক্ষেত্রফল = 15 বর্গ একক। (ii) $(2, 1)$, $(2, 4)$, $(5, 1)$; ক্ষেত্রফল = $4{\cdot}5$ বর্গ একক। (iii) $(4, 6)$, $(-4, 2)$, $(2, -4)$; ক্ষেত্রফল = 36 একক।

15. $\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right\}$ 16. $\left.\begin{array}{l} x = 7 \\ y = -5 \end{array}\right\}$ 17. $\left.\begin{array}{l} x = 9 \\ y = 11 \end{array}\right\}$

প্রশ্নমালা 106. [৫০২-৫০৬ পৃষ্ঠা]

1. 13 আনা 3 পাই ; 2 সের 11 ছটাক। 2. 1 টাকা 9 আনা 6 পাই ; 19 টি।
3. $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টা ; 19 মাইল। 4. $8\frac{5}{8}$ ফুট ; $4\frac{1}{2}$ হাত।
5. A এর রওনা হইবার $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে ; যাত্রা-স্থান হইতে $7\frac{1}{2}$ মাইল দূরে।
6. যাত্রার 4 ঘণ্টা পরে ; A হইতে 12 মাইল দূরে। 7. 1 টাকা 3 আনা ; 39 টি।
8. 5. 11. 4-30 P.M. এ ; B হইতে $13\frac{1}{3}$ মাইল। 12. 434 টাকা।
13. 3 টা বাজিয়া 16·4 মিনিট পরে। 14. 3265 টাকা ; 113 টাকা 7 আনা।
15. 6 ঘণ্টা 59·4 মিনিট ; কলিকাতা হইতে 10·8 মাইল।

বিবিধ প্রশ্নমালা IV

[৫০৬-৫১২ পৃষ্ঠা]

I

1. (i) $(x^2+20x+95)^2-16.$ (ii) $(x^2+5x+5)^2-16.$
2. $3(x+z)(2x-y+z)(x+y+2z).$ 3. $18(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$ 7. 0.
10. $\dfrac{x^2+y^2}{(\sqrt{x^2+y^2}+y)(x-\sqrt{x^2-y^2})}.$

II

1. 0. 4. 0. 5. $\dfrac{(a-b)^2}{ab}.$ 6. $2a+3b+c.$
7. $18x^4-45x^3+37x^2-19x+6.$ 8. $(a-b)(b-c)(a-c).$
10. $x=3, y=1.$

III

1. $x^5+10x^3+40x+\dfrac{80}{x}+\dfrac{80}{x^3}+\dfrac{32}{x^5}.$ 3. 0. 5. $2x-1$; $(2x-1)(3x-2)(x-3).$ 6. $x^2-2x+3.$ 7. $ab+bc+ca.$
9. $\dfrac{x}{\sqrt{y}}-4+\dfrac{4\sqrt{y}}{x}.$

IV

1. 242. 2. $(a^2+b^2)(a-b)(2a-b)(a+b)(a+2b).$ 3. 2528000.
5. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-2ab-b^2}.$ 7. $(x+2y)(x+7y)(x-5y)(x-3y)$; $(x-3y)(x+2y)(x+7y).$ 8. 0.

V

3. 1. 5. (i) $(3a^2-4ab+3b^2)(2a^2+17ab+2b^2)$.
(ii) $(4x^2-3x+4)(3x^2-7x+3)$. (iii) $(bx^2+cx+b)(ax^2+bx+a)$.
7. (i) $x-a$. (ii) $x-y-z$. 10. $2x^2-3x^{-1}+4x^{-4}$.

VI

4. $\{(x+y)^2\}^2+(z^2)^2$. 5. $3(x^2+y^2+z^2)$. 6. (i) $x^2+(2m-3)x-6m$.
(ii) $x-3$. 7. $2x^2-3x+1$; $2x^6-3x^5-7x^4+28x^3-36x^2+20x-4$.
10. $\frac{3x}{a}-1+\frac{a}{3x}$.

VII

1. $x^2+y^2+2xy-1$. 2. x. 4. (i) $a+b$. (ii) $\frac{1-x}{(1+x)(1+2x^2)}$.
5. $p=5, q=2$; $(5x+2y)^2+4(2x-5y)^2$. 6. $(2x-1)(3x-1)$;
$(x-2)(2x-1)(3x-1)(2x+1)$. 7. -42. 10. 8 টা $27\frac{3}{11}$ মিনিটে।

VIII

4. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)$. 5. -1.
6. 0. 8. x^2+1 ; $(x^2+1)^2(x^2-1)$. 9. 1. 10. $n(n-1)$.

পরিশিষ্ট

I. জটিল সহ-সমীকরণ (Harder Simultaneous Equations)

1. দুইটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সহজ সহ-সমীকরণ (simultaneous equations) সমাধান করিবার প্রণালী দ্বাবিংশ অধ্যায়ে বর্ণিত হইয়াছে ; এক্ষণে, ঐ বিষয় অপেক্ষাকৃত বিশদরূপে আলোচনা করা যাইতেছে।

2. **বজ্রগুণন-প্রণালী (Method of Cross Multiplication) :**

$a_1x+b_1y+c_1z=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2z=0$ * হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

প্রথম সমীকরণটিকে c_2 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে c_1 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$a_1c_2x+b_1c_2y+c_1c_2z=0,$$

এবং $$a_2c_1x+b_2c_1y+c_2c_1z=0,$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া,

$$(c_1a_2-c_2a_1)x+(b_2c_1-b_1c_2)y=0\ ;$$

$$\therefore\ (c_1a_2-c_2a_1)x=(b_1c_2-b_2c_1)y\ ;$$

$$\therefore\ \frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}. \qquad \cdots\ (1)$$

---

* এই নিয়মে, x ও y এর সহগরূপে ব্যবহৃত অক্ষরগুলির সম্পর্কে কিছু বলা আবশ্যক। স্পষ্টই c যেরূপ d হইতে, অথবা, অন্য যে কোন অক্ষর যেরূপ অপর আর একটি অক্ষর হইতে বিভিন্ন, এক্ষেত্রে সেইরূপ 'a_1ও a_2 হইতে বিভিন্ন', বলিয়া কল্পনা করা হইয়াছে। b_1, b_2 ; c_1, c_2 প্রভৃতিকেও অনুরূপ অর্থে প্রয়োগ করা হইয়াছে। ইহার কারণ এই যে, বিভিন্ন সমীকরণের অনুরূপ সহগগুলিকে বিভিন্ন অঙ্কযুক্ত (with different suffixes) একই অক্ষর দ্বারা সূচিত করিলে, উহাদের সমাধানলব্ধ ফলগুলি মনে রাখা সহজ হয়। এই উদ্দেশ্যেই, প্রথম সমীকরণের x এর সহগকে a_1 দ্বারা, এবং দ্বিতীয় সমীকরণের x এর সহগকে a_2 দ্বারা, সূচিত করা হইয়াছে ; এবং b_1, b_2 ; c_1, c_2 প্রভৃতিরও অনুরূপ অর্থ বুঝিতে হইবে। কোন কোন সময়ে, অক্ষরগুলিকে অঙ্কযুক্ত না করিয়া মাত্রা (dash) যুক্ত করিয়াও ঐরূপ অর্থ বুঝান হয়। যথা, x, y, z সমন্বিত তিনটি সহ-সমীকরণ থাকিলে, প্রথমটিতে x, y ও z এর সহগগুলিকে যথাক্রমে a', b', c' দ্বারা, দ্বিতীয়টিতে, a'', b'', c'' দ্বারা, তৃতীয়টিতে a''', b''', c''' দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে।

আবার, প্রথম সমীকরণটিকে a_2 দ্বারা, এবং দ্বিতীয়টিকে a_1 দ্বারা গুণ কর ;

$$a_1a_2x+b_1a_2y+c_1a_2z=0,$$

এবং $$a_2a_1x+b_2a_1y+c_2a_1z=0.$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া, $(a_1b_2-a_2b_1)y+(c_2a_1-c_1a_2)z=0$;

$$\therefore \quad (a_1b_2-a_2b_1)y=(c_1a_2-c_2a_1)z \; ;$$

$$\therefore \quad \frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1} \; ; \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

অতএব, (1) ও (2) হইতে, $\dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\dfrac{z}{a_1b_2-a_2b_1}$.

টীকা। সমীকরণটিকে নিম্নলিখিতরূপে একটির নীচে অপরটিকে লিখিয়া, উপরিউক্ত ফলগুলি অতি সহজে মনে রাখা যায় :

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{array}\right\}$$

এক্ষণে, দেখা যায় যে,

(i) x এর নীচে যে রাশিটি আছে, উহা = (প্রথম সমীকরণের y এর সহগ × দ্বিতীয় সমীকরণের z এর সহগ) **বিয়োগ** (দ্বিতীয় সমীকরণের y এর সহগ × প্রথম সমীকরণের z এর সহগ) ;

(ii) y এর নীচের রাশিটি = (প্রথম সমীকরণের z এর সহগ × দ্বিতীয় সমীকরণের x এর সহগ) **বিয়োগ** (দ্বিতীয় সমীকরণের z এর সহগ × প্রথম সমীকরণের x এর সহগ) ;

(iii) z এর নীচের রাশিটি = (প্রথম সমীকরণের x এর সহগ × দ্বিতীয় সমীকরণের y এর সহগ) **বিয়োগ** (দ্বিতীয় সমীকরণের x এর সহগ × প্রথম সমীকরণের y এর সহগ)।

অনুসি.। উপরিউক্ত সমীকরণদ্বয়ে, z এর পরিবর্তে 1 বসাইলে,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$ পাওয়া যায়।

এবং, ইহা হইতেই, $\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{array}\right\}$ (এবং)

সহ-সমীকরণদ্বয়ের বীজ (root), অর্থাৎ x ও y এর মান, নির্ণয় করা যায়।

টীকা। উপরিউক্ত ফলগুলি ভালরূপে মুখস্থ করিয়া রাখা উচিত। এইগুলি দ্বারা যে শুধু দুইটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সহ-সমীকরণ সহজে ও সুচারুরূপে সমাধান করা যাইতে পারে, তাহা নহে; তিনটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট একশ্রেণীর সহ-সমীকরণের সমাধানেও এইগুলি সর্ব্বদা ব্যবহৃত হইয়া থাকে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, নিম্নে কতকগুলি উদাহরণ সন্নিবেশিত হইল।

উদা. 1. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}3x-5y+9=0\\5x-3y-1=0\end{array}\right\}$

এখানে, $a_1=3,\quad b_1=-5,\quad c_1=\ 9;$

$a_2=5,\quad b_2=-3,\quad c_2=-1.$

সুতরাং,

$$\frac{x}{(-5)(-1)-(-3).9}=\frac{y}{9\times5-(-1).3}=\frac{1}{3.(-3)-5.(-5)};$$

অথবা, $\dfrac{x}{5+27}=\dfrac{y}{45+3}=\dfrac{1}{-9+25}$; অথবা, $\dfrac{x}{32}=\dfrac{y}{48}=\dfrac{1}{16}$;

$\therefore\quad x=\frac{32}{16}=2$, এবং $y=\frac{48}{16}=3.$

অতএব, $x=2$ এবং $y=3.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{ll}-7x+8y=\ \ 9 & \cdots\ (1)\\5x-4y=-3 & \cdots\ (2)\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{ll}(1)\text{ হইতে}, & -7x+8y-9=0\\(2)\text{ হইতে}, & 5x-4y+3=0\end{array}\right\}$

সুতরাং,

$$\frac{x}{8\times3-(-4)(-9)}=\frac{y}{(-9).5-3.(-7)}=\frac{1}{(-7)(-4)-5\times8};$$

অথবা, $$\frac{x}{24-36}=\frac{y}{-45+21}=\frac{1}{28-40};$$

অথবা, $$\frac{x}{-12}=\frac{y}{-24}=\frac{1}{-12};$$

$$\therefore\quad x=\frac{-12}{-12}=1,\ \text{এবং}\ y=\frac{-24}{-12}=2.$$

অতএব, $x=1$ এবং $y=2.$

উদা. 3. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{ll}(x+7)(y-3)+7=(y+3)(x-1)+5 & \cdots(1)\\ 5x-11y+35=0. \quad \cdots & \cdots(2)\end{array}\right\}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1888]

(1) হইতে, $xy+7y-3x-14=xy+3x-y+2,$

$\therefore \quad 6x-8y+16=0;$

$\therefore \quad \left.\begin{array}{r}3x-4y+8=0\\ \text{এবং}\quad 5x-11y+35=0\end{array}\right\}$

সুতরাং,

$$\frac{x}{(-4).35-(-11).8}=\frac{y}{8\times5-35\times3}=\frac{1}{3.(-11)-5.(-4)};$$

অথবা, $\dfrac{x}{-140+88}=\dfrac{y}{40-105}=\dfrac{1}{-33+20},$

অথবা, $\dfrac{x}{-52}=\dfrac{y}{-65}=\dfrac{1}{-13}.$

অতএব, $x=4$ এবং $y=5.$

উদা. 4. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{lll}2x-3y+4z=0 & \cdots & (1)\\ 7x+2y-6z=0 & \cdots & (2)\\ 4x+3y+z=37 & \cdots & (3)\end{array}\right\}$

এখন, (1) এবং (2) হইতে,

$$\frac{x}{(-3)(-6)-2\times4}=\frac{y}{4\times7-(-6).2}=\frac{z}{2\times2-7.(-3)},$$

অথবা, $\dfrac{x}{10}=\dfrac{y}{40}=\dfrac{z}{25}$; অথবা, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z}{5}.$

মনে কর, উপরিউক্ত প্রত্যেক ভগ্নাংশই, k এর সমান।

তাহা হইলে, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z}{5}=k;$

$\therefore \quad x=2k, \quad y=8k, \quad z=5k. \quad \cdots \quad (4)$

এখন, x, y, z এর মানগুলি (3) তে বসাইয়া,

$k(8+24+5)=37,$

অথবা, $37k=37$; $\therefore \quad k=1.$

সুতরাং, (4) হইতে, $x=2, \; y=8$ এবং $z=5.$

উদা. 5. সমাধান কর :
$$\left.\begin{aligned} x+6y&=5z \quad \cdots \quad (1)\\ 7x+z&=6y \quad \cdots \quad (2)\\ 5x+6y-4z&=24 \quad \cdots \quad (3)\end{aligned}\right\}$$

(1) হইতে, $x+6y-5z=0$
(2) হইতে, $7x-6y+z=0$

স্নতরাং, $$\frac{x}{6\times1-(-6).(-5)}=\frac{y}{(-5).7-1\times1}=\frac{z}{1.(-6)-7\times6},$$

অথবা, $$\frac{x}{6-30}=\frac{y}{-35-1}=\frac{z}{-6-42};$$

অথবা, $$\frac{x}{-24}=\frac{y}{-36}=\frac{z}{-48};$$

$$\therefore \quad \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}.$$

[প্রত্যেকটি ভগ্নাংশকে -12 দ্বারা গুণ করিয়া]

এখন, ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকটি $=k$ ধরিয়া লইয়া,

$$x=2k, \quad y=3k, \quad z=4k. \quad \cdots \quad (4)$$

x, y, z এর এই মানগুলি (3) তে বসাইয়া,

$$k(10+18-16)=24,$$

অথবা, $12k=24$; $\therefore k=2.$

স্নতরাং, (4) হইতে, $x=4, \quad y=6$ এবং $z=8.$

প্রশ্নমালা 1

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $\left.\begin{aligned}2x+3y-8&=0\\3x-4y+5&=0\end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned}3x-5y+9&=0\\5x+2y-16&=0\end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned}4x-5y+8&=0\\2x-3y+6&=0\end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned}-3x+2y+2&=0\\5x-3y-5&=0\end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned}6x-7y+12&=0\\-7x+4y+11&=0\end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned}7x-8y&=-14\\5x-3y&=9\end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned}-6x+5y+2&=0\\13x-9y&=19\end{aligned}\right\}$

8. $\left.\begin{aligned}-7x+5y+11&=0\\8x-5y&=19\end{aligned}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l} 4x-11y+6=0 \\ 9x-13y=10 \end{array}\right\}$ 10. $\left.\begin{array}{l} 8x-7y=19 \\ 10x-9y=23 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l} -12x+17y+16=0 \\ 9x-13y=11 \end{array}\right\}$ 12. $\left.\begin{array}{l} 14x-11y+18=0 \\ 11x-7y+1=0 \end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l} 17x-7y=52 \\ 3x=2y \end{array}\right\}$ 14. $\left.\begin{array}{l} 9x+5y=124 \\ 7x=3y \end{array}\right\}$

[দ্বিতীয় সমীকরণে $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=k$ (ধর)।]

15. $\left.\begin{array}{l} 15x+7y=246 \\ 9x=4y \end{array}\right\}$ 16. $\left.\begin{array}{l} 9x=8y \\ 10x+23y-287=0 \end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l} 4x-3y=0 \\ 7x-11y+92=0 \end{array}\right\}$ 18. $\left.\begin{array}{l} 4x-7y=0 \\ 10x-9y-102=0 \end{array}\right\}$

19. $\left.\begin{array}{l} 13x-12y+15=0 \\ 8x-7y=0 \end{array}\right\}$ 20. $\left.\begin{array}{l} 11x-10y+82=0 \\ 14x-9y=0 \end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}(x+y)+\frac{1}{4}(x-y)=59 \\ 5x-33y=0 \end{array}\right\}$ 22. $\left.\begin{array}{l} \frac{4x+5y}{40}=x-y \\ \frac{2x-y}{3}+2y=20 \end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{l} y(3+x)=x(7+y) \\ 4x+9=5y-14 \end{array}\right\}$ 24. $\left.\begin{array}{l} \frac{4y-6}{x+y}=2 \\ \frac{8x-5}{y-x}=9 \end{array}\right\}$

25. $\left.\begin{array}{l} (x+5)(y+7)=(x+1)(y-9)+112 \\ 2x+10=3y+1 \end{array}\right\}$

26. $\left.\begin{array}{l} 4x-5y+2z=0 \\ 2x-7y+4z=0 \\ x+y+z=6 \end{array}\right\}$ 27. $\left.\begin{array}{l} 5x+6y+8z=0 \\ 3x+4y+6z=0 \\ x+5y+16z=3 \end{array}\right\}$

28. $\left.\begin{array}{l} 2x-7y+11z=0 \\ 6x-8y+7z=0 \\ 3x+4y+5z=35 \end{array}\right\}$ 29. $\left.\begin{array}{l} 7x+3y-8z=0 \\ 5x-7y+8z=0 \\ 3x+5y+7z=64 \end{array}\right\}$

30. $\left.\begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ 9x-8y+3z=0 \\ 2x+3y+5z=36 \end{array}\right\}$ 31. $\left.\begin{array}{l} 2(4x+9y)=7(2y+z) \\ 7(x+2y)=8(y+z) \\ 3x+4y+5z=38 \end{array}\right\}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1887]

32. $\left.\begin{array}{l} 4(x+y)=3(2z-y) \\ 5(x-2y)=3(2y-3z) \\ 6(x-2)+7(y-3)+8(z-4)=67 \end{array}\right\}$

33. $\left.\begin{array}{l}5x=2y,\ 7y=5z\\ 4x+5y+6z=150\end{array}\right\}$

34. $\left.\begin{array}{l}15x=10y=6z\\ 7x+8y+9z=332\end{array}\right\}$

35. $\left.\begin{array}{l}4x-13y+8z=0\\ 7x+\ 6y-9z=0\\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{8}{y}+\dfrac{15}{z}=6\frac{2}{3}\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{a_1x+b_1y+c_1z=d_1,}\\ \boldsymbol{a_2x+b_2y+c_2z=d_2,}\\ \boldsymbol{a_3x+b_3y+c_3z=d_3.}\end{array}\right\}$

উপরিউক্ত প্রকার সহ-সমীকরণের সমাধান :

প্রথম সমীকরণটিকে c_2 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে c_1 দ্বারা গুণ করিয়া, প্রথম গুণফলটি হইতে দ্বিতীয় গুণফলটিকে বিয়োগ করিলে,

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=d_1c_2-d_2c_1. \quad \cdots \quad (1)$$

তদ্রূপ, প্রথম সমীকরণটিকে c_3 দ্বারা এবং তৃতীয়টিকে c_1 দ্বারা গুণ করিয়া, প্রথম গুণফল হইতে দ্বিতীয় গুণফলটিকে বিয়োগ করিলে,

$$(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y=d_1c_3-d_3c_1. \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, (1) এবং (2) হইতে, বজ্রগুণন-প্রণালী অনুসারে x এবং y এর মান নির্ণয় করা যাইতে পারে। তৎপরে প্রদত্ত সমীকরণত্রয়ের যে কোনটিতে x এবং y এর এতল্লব্ধ মান বসাইয়া x এর মান নির্ণয় করা যায়।

বিকল্প পদ্ধতি (Alternative method) :

প্রথম সমীকরণটিকে d_2 দ্বারা এবং দ্বিতীয়টিকে d_1 দ্বারা গুণ করিয়া, প্রথমটি হইতে দ্বিতীয়টিকে বিয়োগ করিলে,

$$(a_1d_2-a_2d_1)x+(b_1d_2-b_2d_1)y+(c_1d_2-c_2d_1)z=0. \quad \cdots \quad (a)$$

তদ্রূপ, প্রথম সমীকরণটিকে d_3 দ্বারা এবং তৃতীয়টিকে d_1 দ্বারা গুণ করিয়া, প্রথম গুণফল হইতে দ্বিতীয় গুণফলটিকে বিয়োগ করিলে,

$$(a_1d_3-a_3d_1)x+(b_1d_3-b_3d_1)y+(c_1d_3-c_3d_1)z=0. \quad \cdots \quad (b)$$

এখন, স্পষ্টতঃ, (a) ও (b) দ্বারা সূচিত সমীকরণদ্বয় এবং প্রদত্ত সমীকরণত্রয়ের যে কোনটিকে, সহ-সমীকরণরূপে ধরিয়া লইয়া, পূর্ব্বনিয়মে বর্ণিত পদ্ধতি অনুসারে উহাদের সমাধান করা যাইতে পারে।

উদা. 1. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{ll}4x-3y+2z=40 & \cdots\ (1)\\ 5x+9y-7z=47 & \cdots\ (2)\\ 9x+8y-3z=97 & \cdots\ (3)\end{array}\right\}$

(1) কে 7 দ্বারা এবং (2) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\left.\begin{aligned} 28x - 21y + 14z &= 280 \\ \text{এবং} \quad 10x + 18y - 14z &= 94 \end{aligned}\right\}$$

অতএব, যোগ করিয়া, $38x - 3y = 374.$ ··· (4)

আবার, (1) কে 3 দ্বারা এবং (3) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\left.\begin{aligned} 12x - 9y + 6z &= 120 \\ \text{এবং} \quad 18x + 16y - 6z &= 194 \end{aligned}\right\}$$

অতএব, যোগ করিয়া, $30x + 7y = 314.$ ··· (5)

এখন, (4) এবং (5) হইতে, স্পষ্টতঃ, $\left.\begin{aligned} 38x - 3y - 374 &= 0 \\ \text{এবং} \quad 30x + 7y - 314 &= 0 \end{aligned}\right\}$ হওয়ায়,

বজ্রগুণন-প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{x}{(-3)\times(-314) - 7.(-374)} = \frac{y}{(-374).30 - (-314).38} = \frac{1}{38\times 7 - 30.(-3)};$$

অথবা, $$\frac{x}{942 + 2618} = \frac{y}{-11220 + 11932} = \frac{1}{266 + 90};$$

অথবা, $$\frac{x}{3560} = \frac{y}{712} = \frac{1}{356}.$$

অতএব, $x = 10$ এবং $y = 2.$

x এবং y এর লব্ধ মান (1) এ বসাইয়া,

$$40 - 6 + 2z = 40; \quad \therefore \; z = 3.$$

অতএব, $x = 10,\ y = 2$ এবং $z = 3.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\left.\begin{aligned} 2x - 4y + 9z &= 28 \quad \cdots \quad (1) \\ 7x + 3y - 5z &= 3 \quad \cdots \quad (2) \\ 9x + 10y - 11z &= 4 \quad \cdots \quad (3) \end{aligned}\right\}$

(1) কে 3 দ্বারা, এবং (2) কে 4 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\left.\begin{aligned} 6x - 12y + 27z &= 84 \\ \text{এবং} \quad 28x + 12y - 20z &= 12 \end{aligned}\right\}$$

সুতরাং, যোগ করিয়া, $34x + 7z = 96.$ ··· (4)

আবার, (2) কে 10 দ্বারা, এবং (3) কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\left.\begin{aligned} 70x + 30y - 50z &= 30 \\ \text{এবং} \quad 27x + 30y - 33z &= 12 \end{aligned}\right\}$$

সুতরাং, বিয়োগ করিয়া, $43x - 17z = 18.$ ··· (5)

এখন, (4) এবং (5) হইতে,

$$\left.\begin{array}{r} 34x+7z-96=0 \\ \text{এবং}\ \ 43x-17z-18=0 \end{array}\right\}$$

অতএব, $$\frac{x}{7(-18)-(-17)(-96)}=\frac{z}{(-96).43-(-18).34}$$
$$=\frac{1}{34.(-17)-43\times 7};$$

অথবা, $$\frac{x}{-126-1632}=\frac{z}{-4128+612}=\frac{1}{-578-301};$$

অথবা, $$\frac{x}{-1758}=\frac{z}{-3516}=\frac{1}{-879}.$$

$$\therefore\ x=\frac{-1758}{-879}=2 \text{ এবং } z=\frac{-3516}{-879}=4.$$

x এবং z এর এই মান (2) এ বসাইয়া, $14+3y-20=3$,

অতএব, $3y=9$; $\therefore\ y=3.$

অতএব, $x=2,\ y=3$ এবং $z=4.$

উদা. 3. সমাধান কর :

$$\left.\begin{array}{rl} 12x+9y-7z=2 & \cdots\ (1) \\ 8x-26y+9z=1 & \cdots\ (2) \\ 23x+21y-15z=4 & \cdots\ (3) \end{array}\right\}$$

(2) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া, $16x-52y+18z=2,$

আবার, $12x+9y-7z=2.$ $\cdots$ (1)

স্নুতরাং, বিয়োগ করিয়া, $4x-61y+25z=0.$ $\cdots$ (4)

আবার, (1) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া,

$24x+18y-14z=4,$

এবং $23x+21y-15z=4.$ $\cdots$ (3)

স্নুতরাং, বিয়োগ করিয়া, $x-3y+z=0.$ $\cdots$ (5)

$$\left.\begin{array}{rl} \text{এখন, যেহেতু}\ \ 4x-61y+25z=0, & \cdots\ (4) \\ \text{এবং}\ \ x-3y+z=0. & \cdots\ (5) \end{array}\right\}$$

অতএব, বজ্রগুণন-প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{x}{-61+75}=\frac{y}{25-4}=\frac{z}{-12+61},$$

অথবা, $\frac{x}{14}=\frac{y}{21}=\frac{z}{49}$; অর্থাৎ, $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{7}.$

ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকটিকে k এর সমান ধরিয়া,

$$x = 2k, \quad y = 3k, \quad z = 7k.$$

সুতরাং, (1) হইতে, $k(24 + 27 - 49) = 2,$

অথবা, $2k = 2$; $\therefore\ k = 1.$

অতএব, $x = 2,\ y = 3$ এবং $z = 7.$

প্রশ্নমালা 2

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 5z = 11 \\ 5x + 2y - 7z = -12 \\ -4x + 3y + z = 5 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + 5z = 32 \\ 2x + 5y + 3z = 31 \\ 5x + 3y + 2z = 27 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 1 \\ 3z - 4x - y = 1 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + 4z = 29 \\ 3x + 2y + 5z = 32 \\ 4x + 3y + 2z = 25 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + 4z = 16 \\ 3x + 2y - 5z = 8 \\ 5x - 6y + 3z = 6 \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{r} 4x - 3y + 2z = 8 \\ 3x - 4y + 5z = 6 \\ -6x + 5y + 7z = -1 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{r} 8x - 7y - 5z = 1 \\ -7x + 5y + 6z = -1 \\ 12x - 8y - 11z = 2 \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{r} x + 5y - 4z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 14 \\ -10x + 8y + z = 6 \end{array}\right\}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1867]

9. $\left.\begin{array}{r} 2x + 4y + 5z = 49 \\ 3x + 5y + 6z = 64 \\ 4x + 3y + 4z = 55 \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{r} x + 3y + 5z = 10 \\ 3x + 5y + 7z = 14 \\ 5x + 7y + 8z = 15 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{r} 12x + 8y - 11z = -3 \\ 11x - 13y - z = 2 \\ 8x + 17y - 12z = -2 \end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{r} 5x - 4y + 9z = 19 \\ 7x + 6y - 12z = 16 \\ -9x + 8y + 15z = -13 \end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{r} x - y - z = -15 \\ y + x + 2z = 40 \\ 4z - 5x - 6y = -150 \end{array}\right\}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1886]

14. $\left.\begin{array}{r} 2(x - y) = 3z - 2 \\ x - 3z = 3y - 1 \\ 2x + 3z = 4(1 - y) \end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{aligned} 3x+2y-z&=20\\ 2x+3y+6z&=70\\ x-y+6z&=41 \end{aligned}\right\}$

16. $\left.\begin{aligned} 4(y-x)&=5z-22\\ 3z+4x&=6y+2\\ z-3y&=14-10x \end{aligned}\right\}$

17. $\left.\begin{aligned} 5x+2y+z&=30\\ \tfrac{1}{2}x+\tfrac{4}{5}y-\tfrac{1}{10}z&=4\\ 2x+5y+10z&=129 \end{aligned}\right\}$

18. $\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}y&=12-\tfrac{1}{6}z\\ \tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{3}z-\tfrac{1}{6}x&=8\\ \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}z&=10 \end{aligned}\right\}.$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1868]

19. $\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{5}{y}-\frac{4}{z}&=\frac{1}{12}\\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}&=\frac{19}{24}\\ -\frac{4}{x}+\frac{5}{y}+\frac{6}{z}&=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$

20. $\left.\begin{aligned} \frac{3}{x}-\frac{4}{5y}+\frac{1}{z}&=7\tfrac{8}{5}\\ \frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}+\frac{2}{z}&=10\tfrac{1}{6}\\ \frac{4}{5x}-\frac{1}{2y}+\frac{4}{z}&=16\tfrac{1}{10} \end{aligned}\right\}$

21. $\left.\begin{aligned} 5x+3y&=65\\ 2y-z&=11\\ 3x+4z&=57 \end{aligned}\right\}.$

22. $\left.\begin{aligned} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{3}{2}\\ \frac{3}{z}-\frac{2}{y}&=2\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}&=\frac{4}{3} \end{aligned}\right\}$

23. $\left.\begin{aligned} ay+bx&=c\\ cx+az&=b\\ bz+cy&=a \end{aligned}\right\}.$

24. $\left.\begin{aligned} 3x+4y-11&=0\\ 5y-6z&=-8\\ 7z-8x-13&=0 \end{aligned}\right\}.$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1877]

25. $\left.\begin{aligned} 3y+x-2&=0\\ 3z-4y&=x+15\\ 2x+7z&=7 \end{aligned}\right\}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1883]

4. বিবিধ উদাহরণমালা :

উদা. 1. সমাধান কর : $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1,\ \ \frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1,\ \ \frac{c}{z}+\frac{a}{x}=1.$

প্রদত্ত সমীকরণগুলি যোগ করিয়া,

$2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=3,$ অথবা, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{3}{2}.$ ... (a)

(a) হইতে দ্বিতীয় সমীকরণটিকে বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{a}{x}=\frac{1}{2}; \quad \therefore \; x=2a.$$

এইরূপে, $y=2b$ এবং $z=2c$.

উদা. 2. সমাধান কর :

$$\text{(i) } \frac{xy}{x+y}=1; \quad \text{(ii) } \frac{xz}{x+z}=2; \quad \text{(iii) } \frac{yz}{y+z}=3.$$

এখন, (i) হইতে $\frac{x+y}{xy}=1$, অথবা, $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$; ... (1)

(ii) " $\frac{x+z}{xz}=\frac{1}{2}$, অথবা, $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$; ... (2)

(iii) " $\frac{y+z}{yz}=\frac{1}{3}$, অথবা, $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$, ... (3)

(1), (2) এবং (3) একত্র যোগ করিয়া,

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6};$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{12}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

(4) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{1}{x}=\frac{11}{12}-\frac{1}{3}=\frac{7}{22}; \quad \therefore \; x=\tfrac{12}{7}.$$

(4) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{1}{y}=\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}; \quad \therefore \; y=\tfrac{12}{5}.$$

(4) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{1}{z}=\frac{11}{12}-1=-\frac{1}{12}; \quad \therefore \; z=-12.$$

উদা. 3. সমাধান কর : $xyz=a(yz-zx-xy)=b(zx-xy-yz)$
$=c(xy-yz-zx)$.

যেহেতু $xyz=a(yz-zx-xy)$,

$$\therefore \quad \frac{1}{a}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}; \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

[উভয় পক্ষকেই $a \times xyz$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

এইরূপে, $\frac{1}{b}=\frac{1}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$, ... (2)

এবং $\frac{1}{c}=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$. ... ... (3)

(2) এবং (3) একত্র যোগ করিয়া,

$$-\frac{2}{x}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{b+c}{bc}; \quad \therefore \; x=\frac{-2bc}{b+c}.$$

এইরূপে, $-\frac{2}{y}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{a+c}{ac}; \quad \therefore \; y=\frac{-2ca}{c+a}$,

এবং $-\frac{2}{z}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}; \quad \therefore \; z=\frac{-2ab}{a+b}$.

উদা. 4. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{ll} x+y+z & =0 \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z & =0 \\ bcx+cay+abz & =1 \end{array}\right\}$

যেহেতু $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0$
এবং $x+y+z=0$

অতএব, বজ্রগুণন-প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{x}{(c+a)-(a+b)}=\frac{y}{(a+b)-(b+c)}=\frac{z}{(b+c)-(c+a)},$$

অথবা, $\frac{x}{c-b}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{b-a}$.

ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকটিকে k এর সমান ধরিয়া,

$$x=k(c-b),\; y=k(a-c),\; z=k(b-a).$$

x, y এবং z এর উপরিউক্ত মানগুলি তৃতীয় সমীকরণটিতে বসাইয়া,

$$k\{bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)\}=1.$$

কিন্তু, $bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)$

$$=bc(c-b)+a^2(c-b)-a(c^2-b^2)$$
$$=(c-b)\{bc+a^2-a(c+b)\}$$
$$=(c-b)(a-c)(a-b).$$

অতএব, $k(c-b)(a-c)(a-b)=1$; $\quad \therefore \; k=\dfrac{1}{(c-b)(a-c)(a-b)}$.

$$\text{অতএব,} \quad x=k(c-b)=\frac{1}{(a-c)(a-b)};$$

$$y=k(a-c)=\frac{1}{(c-b)(a-b)};$$

$$z=k(b-a)=\frac{1}{(c-b)(c-a)}.$$

প্রশ্নমালা 3

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর (Solve the following equations) :

1. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1, \quad \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1, \quad \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$

2. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=a, \quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=b, \quad \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=c.$

3. $\dfrac{yz}{y+z}=a, \quad \dfrac{zx}{z+x}=b, \quad \dfrac{xy}{x+y}=c.$

4. $\left.\begin{array}{l} axy=c(bx+ay) \\ bxy=c(ax-by) \end{array}\right\}$

5. $3xy=4(x+y), \quad 2xz=3(x+z), \quad 5yz=12(y+z).$

6. $y+z=4, \quad z+x=6, \quad x+y=8.$

7. $y+z-x=6, \quad z+x-y=10, \quad x+y-z=14.$

8. $\left.\begin{array}{l} x-4y+z=-10 \\ y-4z+x=-15 \\ z-4x+y=-35 \end{array}\right\}$.

9. $\left.\begin{array}{l} y+z-7x+16=0 \\ z+x-7y+24=0 \\ x+y-7z+40=0 \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l} a^2x+b^2y=2ab(a+b) \\ b(2a+b)x+a(a+2b)y=a^3+a^2b+ab^2+b^3 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l} x+y+z=A \\ ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ (a+b)x+(a+c)y+(b+c)z=0 \\ abx+acy+bcz=1 \end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0 \\ \dfrac{x}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}+\dfrac{z}{c^2}=1 \end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{l} x-ay+a^2z=a^3 \\ x-by+b^2z=b^3 \\ x-cy+c^2z=c^3 \end{array}\right\}$

15. $$\left.\begin{aligned} ax+by+cz &= 0 \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z &= 0 \\ a^2x+b^2y+c^2z &= a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) \end{aligned}\right\}$$

16. কোন্ সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে, নিম্নলিখিত সমীকরণ তিনটি, x ও y এর একই মান দ্বারা সিদ্ধ হইবে ?

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2=0,\quad a_3x+b_3y+c_3=0.$$

17. নিম্নলিখিত সমীকরণ চারিটি x, y ও z এর একই মান দ্বারা সিদ্ধ হইলে, a এর মান কত হইবে ?

$$2x-3y+5z=18,\qquad 3x-y+4z=20,\qquad 4x+2y-z=5,$$
$$(a+1)x+(a+2)y+(a+3)z=76.$$

18. $$\left.\begin{aligned} 3w-2y &= 2 \\ 5x-7z &= 11 \\ 2x+3y &= 39 \\ 4y+3z &= 41 \end{aligned}\right\}$$

19. $$\left.\begin{aligned} 9x-2z+w &= 41 \\ 7y-5z-t &= 12 \\ 4y-3x+2w &= 5 \\ 3y-4w+3t &= 7 \\ 7z-5w &= 11 \end{aligned}\right\}$$

20. $$\left.\begin{aligned} x+y+z &= ab+bc+ca \\ \frac{x}{ab}+\frac{y}{bc}+\frac{z}{ca} &= 3 \\ (c-b)x+(a-b)y+(c-a)z &= 2abc-ab^2-b^2c+ac^2-a^2c \end{aligned}\right\}$$

II. বীজগণিতীয় মিশ্র রাশির ঘনমূল নির্ণয় করিবার সাধারণ নিয়ম

স্পষ্টতঃ দেখা যায় যে,

$$\begin{aligned}(ax^2+bx+c)^3 &= (ax^2+bx)^3+3(ax^2+bx)^2c+3(ax^2+bx)c^2+c^3 \\ &= a^3x^6+3(a^2x^4)(bx)+3(ax^2)(bx)^2+(bx)^3 \\ &\quad +3(ax^2+bx)^2c+3(ax^2+bx)c^2+c^3.\end{aligned}$$

অতএব, উপরিউক্ত রাশি হইতে উহার ঘনমূল (অর্থাৎ, ax^2+bx+c) নির্ণয় করিতে হইলে, কি উপায় অবলম্বনে ঐ ঘনমূলের পদসমূহ ক্রমশঃ পাওয়া যায়, তাহা দেখা যাক :

ঘনমূলের প্রথম পদ, অর্থাৎ ax^2, স্পষ্টই, প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের (অর্থাৎ, a^3x^6 এর) ঘনমূল। প্রদত্ত রাশি হইতে a^3x^6 বাদ দিলে, অবশিষ্টে x এর সর্ব্বোচ্চ-শক্তিবিশিষ্ট পদ $=3(a^2x^4)(bx)$, অর্থাৎ, $=3\times$ (ঘনমূলের প্রথম পদের বর্গ) $\times$ (ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ) ; অতএব, ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ নির্ণয় করিবার উপায় নির্দ্ধারিত হইল।

উপরিউক্ত অবশিষ্ট হইতে $\{3(a^2x^4)+3(ax^2)(bx)+(bx)^2\}(bx)$ বাদ দিয়া $3(ax^2+bx)^2c+3(ax^2+bx)c^2+c^3$ রাশিটি পাওয়া গেল। ইহাকে দ্বিতীয় অবশিষ্ট বলা যাক। এখন, এই দ্বিতীয় অবশিষ্টে x এর সর্ব্বোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদ $=3a^2x^4c$, অর্থাৎ, $=3\times$ (ঘনমূলের প্রথম পদের বর্গ) $\times$ (ঘনমূলের তৃতীয় পদ)। অতএব, ঘনমূলের তৃতীয় পদ নির্ণয় করিবার উপায়ও নিরূপিত হইল।

উপরিউক্ত দ্বিতীয় অবশিষ্ট হইতে $\{3(ax^2+bx)^2+3(ax^2+bx)c+c^2\}c$ বিয়োগ করিলে কিছুই অবশিষ্ট থাকে না।

অতএব, ax^2+bx+c কে নির্ণেয় ঘনমূলরূপে পাওয়া গেল।

নিম্নে একটি উদাহরণ দ্বারা প্রক্রিয়া-প্রণালী ব্যাখ্যা করা হইতেছে।

উদাহরণ। $x^6-6x^5y+24x^4y^2-56x^3y^3+96x^2y^4-96xy^5+64y^6$ এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

যেহেতু প্রদত্ত রাশিমালার পদসমূহ x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারেই সাজান আছে, অতএব, ঐ পদগুলির ক্রম পরিবর্ত্তন করিবার কোন আবশ্যকতা নাই।

ঘনমূলের **প্রথম পদ** = প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের ঘনমূল $=x^6$ এর ঘনমূল $=x^2$.

তৎপরে, প্রদত্ত রাশির দ্বিতীয় পদ, $-6x^5y$ কে $3x^4$ (অর্থাৎ, ঘনমূলের প্রথম পদের বর্গের তিনগুণ) দ্বারা ভাগ করিয়া, ঘনমূলের **দ্বিতীয় পদ** পাওয়া গেল (পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদর্শিত প্রক্রিয়া দেখ)।

পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদর্শিত প্রণালী অনুসারে, $3x^4-6x^3y+4x^2y^2$ ভাজকটি তৈয়ারী করা হইল। এই ভাজকটিকে $-2xy$ দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফল, অর্থাৎ $-6x^5y+12x^4y^2-8x^3y^3$ কে ইহার উপরিভাগস্থিত রাশিমালা হইতে বিয়োগ করা হইল [প্রক্রিয়া দেখ]; এবং অবশিষ্টকে রেখার নীচে লেখা হইল।

এখন, ঘনমূলের নির্ণীত অংশের বর্গের তিনগুণ, অর্থাৎ $3x^4-12x^3y+12x^2y^2$ কে নূতন একটি ভাজকের অংশরূপে উপরিউক্ত অবশিষ্টের বামদিকে লিখিয়া রাখ।

এই অবশিষ্টে, প্রথম পদ (অর্থাৎ, $12x^4y^2$) কে নূতন ভাজকের প্রথম পদ $3x^4$ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফল $4y^2$ কে ঘনমূলের **তৃতীয় পদ**রূপে লেখা হইল।

এখন, পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদর্শিত নিয়মানুসারে, সম্পূর্ণ ভাজকটিকে তৈয়ারী করা হইল; এবং এই সম্পূর্ণ ভাজককে ঘনমূলের তৃতীয় পদ $4y^2$ দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলকে উহার উপরিভাগস্থিত রাশিমালা হইতে বিয়োগ করিবার পর কিছুই অবশিষ্ট রহিল না।

অতএব, নির্ণেয় ঘনমূল $=x^2-2xy+4y^2$.

$$x^6 - 6x^5y + 24x^4y^2 - 56x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6 \ \Big(\ x^2 - 2xy + 4y^2$$

$$\underline{x^6}$$

$$-6x^5y + 24x^4y^2 - 56x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$$

$$3 \times (x^2)^2 = 3x^4$$

$$3 \times x^2 \times (-2xy) = -6x^3y$$

$$(-2xy)^2 = +4x^2y^2$$

$$3x^4 - 6x^3y + 4x^2y^2$$

$$\underline{-6x^5y + 12x^4y^2 - 8x^3y^3}$$

$$12x^4y^2 - 48x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$$

$$3 \times (x^2 - 2xy)^2 = 3x^4 - 12x^3y + 12x^2y^2$$

$$3 \times (x^2 - 2xy) \times (4y^2) = +12x^2y^2 - 24xy^3$$

$$(4y^2)^2 = +16y^4$$

$$3x^4 - 12x^3y + 24x^2y^2 - 24xy^3 + 16y^4$$

$$\underline{12x^4y^2 - 48x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6}$$

প্রশ্নমালা 4

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের ঘনমূল নির্ণয় কর (Find the cube root of) :

1. $x^3+27x^2+243x+729$.
2. $27x^3-216x^2+576x-512$.
3. $64a^3-144a^2b+108ab^2-27b^3$.
4. $33x^4-36x+x^6-63x^3+8-9x^5+66x^2$.
5. $8x^6+12x^5-30x^4-35x^3+45x^2+27x-27$.
6. $1-9x^2+33x^4-63x^6+66x^8-36x^{10}+8x^{12}$.
7. $c^6-63c^3x^3+8x^6-9c^5x+66c^2x^4-36cx^5+33c^4x^2$.

III. (অঙ্ক কষিবার) বিবিধ কৌশল
(Miscellaneous Artifices)

বর্ত্তমানে অঙ্ক কষিবার বিবিধ কৌশল নিম্নলিখিত কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা ব্যাখ্যা করা যাইতেছে।

উদা. 1. $(x+3a)(x+5a)(x+7a)(x+9a)$ রাশিটিকে দুইটি রাশির বর্গের 'অন্তর'-রূপে প্রকাশ কর। [কলিঃ, 1887]

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= \{(x+3a)(x+9a)\}\{(x+5a)(x+7a)\}\\ &= \{x^2+12ax+27a^2\}\{x^2+12ax+35a^2\}\\ &= \{(x^2+12ax+31a^2)-4a^2\}\{(x^2+12ax+31a^2)+4a^2\}\\ &= (x^2+12ax+31a^2)^2-16a^4.\end{aligned}$$

উদা. 2. একজন ভদ্রলোক প্রথমে 10 টাকার $\frac{x}{y}$-তম অংশ এবং পরে ঐ 10 টাকার $\frac{y}{x}$-তম অংশ পাইয়া, মোট টাকা হইতে 20 টাকা দিয়া দিলেন। প্রমাণ কর যে, ইহাতে তাঁহার লোকসান হইতে পারে না।

প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে, ঐ ভদ্রলোক মোট 10 টাকার $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$-তম অংশ পাইলেন এবং 20 টাকা দিলেন।

সুতরাং, তাঁহার লাভ বা লোকসানের পরিমাণ $\left\{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\times 10-20\right\}$ দ্বারা নির্ণীত হইবে।

এখন, $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\times 10-20=\frac{x^2+y^2}{xy}\times 10-20$

$$=10\left\{\frac{x^2+y^2}{xy}-2\right\}$$

$$=10\left\{\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}\right\}=\frac{10}{xy}(x-y)^2.$$

কিন্তু x এবং y এর কোনটিই ঋণাত্মক হইতে পারে না, কারণ, প্রদত্ত সর্তানুসারে, 10 টাকার $\frac{x}{y}$-তম অংশ বা $\frac{y}{x}$-তম অংশ, ভদ্রলোকের প্রাপ্তির পরিমাণ বুঝাইতেছে।

সুতরাং, x এবং y এর যে কোনটিই বড় হউক না কেন, $(x-y)^2$ সকল সময়ই ধনাত্মক। অতএব, $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\times 10$ সকল সময়ই 20 হইতে বড়। অর্থাৎ, তাঁহার প্রাপ্তির পরিমাণ দানের পরিমাণ অপেক্ষা বড়। সুতরাং, তাঁহার কোন সময়ই লোকসান হইতে পারে না।

উদা. 3. $\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{2b}{c+a}$ হইলে, দেখাও যে, হয় $a^2+c^2=2b^2$, নতুবা $a+b+c=0$.

প্রদত্ত সমতা হইতে দেখা যায় যে,

$$\frac{a}{b+c}-\frac{b}{c+a}=\frac{b}{c+a}-\frac{c}{a+b}$$ [পক্ষান্তর করিয়া]

অথবা, $\frac{a(c+a)-b(b+c)}{(b+c)(c+a)}=\frac{b(a+b)-c(c+a)}{(c+a)(a+b)}$

অথবা, $\frac{c(a-b)+a^2-b^2}{(b+c)(c+a)}=\frac{a(b-c)+b^2-c^2}{(c+a)(a+b)}$

অথবা, $\frac{(a-b)(c+a+b)}{(b+c)(c+a)}=\frac{(b-c)(a+b+c)}{(c+a)(a+b)}$

অথবা, $(a^2-b^2)(c+a+b)=(b^2-c^2)(a+b+c)$, [উভয় পক্ষকে $(c+a)(a+b)(b+c)$ দ্বারা গুণ করিয়া]

অথবা, $(a^2+c^2-2b^2)(a+b+c)=0$;

সুতরাং হয় $a^2+c^2-2b^2=0$, নতুবা $a+b+c=0$.

অথবা, $a^2+c^2=2b^2$, বা $a+b+c=0$.

টীকা। উপরিউক্ত দৃষ্টান্তগুলিতে বিশেষভাবে লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, যদি কোন সমতা $xp=xp_1$ [অথবা, $x(p-p_1)=0$] এর আকার ধারণ করে, তাহা হইলে

স্পষ্টতঃ, হয় $x=0$, অথবা, $p=p_1$ এই দু-এর যে কোনটি দ্বারাই উক্ত সমতা রক্ষিত হয়। কাজেই, ইহাদের মধ্যে কোন একটি '0' হওয়া অসম্ভব, ইহা প্রমাণিত না হওয়া পর্য্যন্ত, শুধু অন্যটির মান '0' এইরূপ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া ভ্রান্তিমূলক।

বর্ত্তমান ক্ষেত্রে $(a^2-b^2)(a+b+c)=(b^2-c^2)(a+b+c)$, এই সমতাটি হইতে $a+b+c$ কে উভয় পক্ষের সাধারণ গুণনীয়ক হিসাবে অপসারিত করিয়া, $a^2-b^2=b^2-c^2$ এই সিদ্ধান্তে পৌছান ভ্রমপূর্ণ, কারণ, উপরিউক্ত সমতাটিতে, $a^2-b^2=b^2-c^2$ না হইয়াও, কেবলমাত্র $a+b+c=0$ হইয়াও, উহা রক্ষিত হইতে পারিত। অপর পক্ষে, যদি a, b, c এর মান এইপ্রকারের হইত যে $a+b+c$ এর মান '0' হইতে পারে না, সেক্ষেত্রে $a+b+c$ কে উভয় পক্ষ হইতে অপসারিত করিয়া, আমরা $a^2-b^2=b^2-c^2$ এই সিদ্ধান্তে পৌছাইতে পারিতাম।

কাজেই, '$xp=xp_1$' [অথবা, $x(p-p_1)=0$] সমতাটি হইতে, 'হয় $x=0$, নতুবা $p=p_1$' এইরূপ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়াই যুক্তিযুক্ত। সুতরাং, $x=0$ না হওয়ার বিশেষ কোন যুক্তিসঙ্গত কারণ প্রমাণিত না হওয়া পর্য্যন্ত, $p=p_1$ এইরূপ একটিমাত্র সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া অসঙ্গত।

উদা. 4. দেখাও যে, $\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c+a}{b}=1$ হইলে এবং $a-b+c=0$ না হইলে, $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. [কলিঃ, 1875]

প্রদত্ত সমতা হইতে, $1-\dfrac{b-c}{a}=\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{c+a}{b}$; [পক্ষান্তর করিয়া]

অথবা,
$$\frac{a-b+c}{a}=\frac{b(a-b)+c(c+a)}{bc}$$
$$=\frac{b(a-b+c)+c(c+a-b)}{bc},$$
[লবে, bc পদটিকে যোগ ও বিয়োগ করিয়া]
$$=\frac{(a-b+c)(b+c)}{bc};$$

সুতরাং, হয় $a-b+c=0$, নতুবা $\dfrac{1}{a}=\dfrac{b+c}{bc}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

কিন্তু, প্রদত্ত দ্বিতীয় সর্ত্ত অনুসারে, $a-b+c$ এর মান '0' নয়।

কাজেই,
$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

উদা. 5. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে, $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$.

প্রদত্ত সর্ত্ত অনুসারে, $a+b=-c$;

$\therefore\ a^2+2ab+b^2=c^2$; [উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া],

$\therefore\ a^2+b^2-c^2=-2ab$;

$\therefore\ (a^2+b^2-c^2)^2=4a^2b^2$;

অথবা, $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=4a^2b^2$;

$$\therefore\ a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$$
$$=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2).$$

$$\therefore\ 2(a^4+b^4+c^4)=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$
$$=(a^2+b^2+c^2)^2.$$

উদা. 6. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$$

প্রদত্ত সর্ত্ত অনুসারে, $a+b=-c$; $\therefore\ a^2+2ab+b^2=c^2$;

$\therefore\ a^2+b^2-c^2=-2ab.$

অনুরূপভাবে দেখান যায় যে,

$$b^2+c^2-a^2=-2bc\text{ ; এবং } c^2+a^2-b^2=-2ac.$$

সুতরাং, $$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$
$$=\frac{1}{-2bc}+\frac{1}{-2ac}+\frac{1}{-2ab}$$
$$=\frac{a+b+c}{-2abc}=\frac{0}{-2abc}=0.$$

উদা. 7. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1.$$

এখন, $2a^2+bc=a^2+a^2+bc=a^2+a.a+bc,$
$$=a^2+a(-\overline{b+c})+bc,\ [\because\ a=-(b+c)\ ]$$
$$=a^2-a(b+c)+bc$$
$$=(a-b)(a-c)$$

এইরূপে, $2b^2+ca=b^2-b(c+a)+ca=(b-c)(b-a)$;

এবং $2c^2+ab=c^2-c(a+b)+ab=(c-a)(c-b)$.

সুতরাং, $\dfrac{a^2}{2a^2+bc}+\dfrac{b^2}{2b^2+ca}+\dfrac{c^2}{2c^2+ab}$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{-b^2}{(b-c)(a-b)}+\frac{c^2}{(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=1.$$

উদা. ৪. $xyz=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2$$
$$=4+\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

এখন, $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$

$$=\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(y^2+2+\frac{1}{y^2}\right)$$

$$=4+\left(x^2+y^2\right)+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

$$=4+xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{xy}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$$

$$=4+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(xy+\frac{1}{xy}\right)$$

$$=4+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{z}+z\right)\cdot\quad [\because xyz=1]$$

$\therefore\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2$

$$=4+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2$$

$$= 4 + \left(z + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right)\right\}$$

$$= 4 + \left(z + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(\frac{x}{y} + z\right) + \left(\frac{y}{x} + \frac{1}{z}\right)\right\}$$

$$= 4 + \left(z + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(\frac{x}{y} + \frac{1}{xy}\right) + \left(\frac{y}{x} + xy\right)\right\}.$$

$$[\because xyz = 1]$$

$$= 4 + \left(z + \frac{1}{z}\right)\left\{\frac{1}{y}\left(x + \frac{1}{x}\right) + y\left(\frac{1}{x} + x\right)\right\}.$$

$$= 4 + \left(z + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y} + y\right)\right\}$$

$$= 4 + \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

উদা. 9. $xy + yz + zx = 1$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

যেহেতু $xy + yz + zx = 1$,

স্থতরাং,
$$\left.\begin{aligned} xy + yz &= 1 - zx; \text{ অথবা, } y(x+z) = 1 - zx \quad \dots \text{(i)} \\ yz + zx &= 1 - xy; \text{ অথবা, } z(y+x) = 1 - xy \quad \dots \text{(ii)} \\ zx + xy &= 1 - yz; \text{ অথবা, } x(z+y) = 1 - yz \quad \dots \text{(iii)} \end{aligned}\right\}.$$

এখন, $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{y}{1-y^2} + \dfrac{z}{1-z^2}$

$$= \frac{x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-x^2)(1-z^2) + z(1-x^2)(1-y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

অতএব, ডা'ন পক্ষের লব (numerator)

$$= x\{1 - (y^2 + z^2) + y^2z^2\} + y\{1 - (x^2 + z^2) + x^2z^2\}$$
$$+ z\{1 - (x^2 + y^2) + x^2y^2\}$$

$$= (x + y + z) - x(y^2 + z^2) - y(z^2 + x^2) - z(x^2 + y^2)$$
$$+ xy^2z^2 + yx^2z^2 + zx^2y^2$$

$$= (x + y + z) - \{x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2)\}$$
$$+ xyz(yz + zx + xy)$$

$$=(x+y+z)-\{y^2(z+x)+z^2(x+y)+x^2(y+z)\}+xyz.1\,;$$

$[\because yz+zx+xy=1]$

$$=(x+y+z)-\{y.\,y(z+x)+z.\,z(x+y)+x.x(y+z)\}+xyz$$

$$=(x+y+z)-\{y(1-zx)+z(1-xy)+x(1-yz)\}+xyz$$

[(i), (ii) ও (iii) হইতে]

$$=(x+y+z)-\{(y+z+x)-yzx-zxy-xyz\}+xyz$$

$$=(x+y+z)-(x+y+z)+xyz+xyz+xyz+xyz$$

$$=4xyz.$$

সুতরাং, $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}=\dfrac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$.

উদা. 10. $a_1x^2+b_1x+c_1$ এবং $a_2x^2+b_2x+c_2$ এর গ. সা. গু. $x-m$ হইলে, প্রমাণ কর যে, (i) $m=\dfrac{c_1a_2-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$ এবং (ii) $(b_1c_2-b_2c_1)(a_1b_2-a_2b_1)=(c_1a_2-a_1c_2)^2$.

প্রদত্ত সর্ত অনুসারে, '$x-m$' রাশিটি $a_1x^2+b_1x+c_1$ এর একটি উৎপাদক হইবে, সুতরাং, $a_1m^2+b_1m+c_1=0$ ... (1) [বিভাজ্যতার নিয়মানুসারে]

আবার, '$x-m$' রাশিটি $a_2x^2+b_2x+c_2$ এরও উৎপাদক বলিয়া,

$a_2m^2+b_2m+c_2=0.$ ... (2) ["]

অতএব, $a_1m^2+b_1m+c_1=0$ ... (1)

$a_2m^2+b_2m+c_2=0$ ... (2)

সুতরাং, বজ্রগুণন-প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{m^2}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{m}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1};$$

অতএব, শেষের দুইটি রাশির সম্পর্ক হইতে $m=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$. ... (3)

আবার, প্রথমটি ও শেষটির সম্পর্ক হইতে, $m^2=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$. ... (4)

সুতরাং, (3) ও (4) হইতে, $\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=m^2=\left(\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)^2$.

$$\therefore\quad (b_1c_2-b_2c_1)(a_1b_2-a_2b_1)=(c_1a_2-a_1c_2)^2.$$

উদা. 11. বর্গমূল-নির্ণয়ের প্রণালী অবলম্বন করিয়া, x এর মান কত হইলে, $x^4+6x^3+11x^2+3x+31$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{r|l|l}
 & x^4+6x^3+11x^2+3x+31 & x^2+3x+1 \\
 & x^4 & \\
\hline
2x^2+3x & \quad 6x^3+11x^2 & \\
 & \quad 6x^3+\ 9x^2 & \\
\hline
2x^2+6x+1 & \quad 2x^2+3x+31 & \\
 & \quad 2x^2+6x+\ 1 & \\
\hline
 & \qquad -3x+30 &
\end{array}$$

এখন, প্রদত্ত রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হইলে, সর্বশেষ ভাগাবশিষ্টটির, অর্থাৎ $3x+30$ এর, মান '0' হইবে।

স্মৃতরাং, $-3x+30=0$; অথবা, $3x=30$; অথবা, $x=10$.

কাজেই, $x=10$ হইলে, প্রদত্ত রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

উদা. 12. $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}=\frac{ay-bx}{a-b}.$$

এখন, $x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)=0 \quad \cdots \quad (1)$

আবার, $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0 \quad \cdots \quad (2)$ [একটি অভেদ বলিয়া]

অতএব, $b-c$, $c-a$, $a-b$ এর সম্পর্কে, বজ্রগুণন-প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{b-c}{cy-bz}=\frac{c-a}{az-cx}=\frac{a-b}{bx-ay}. \quad \text{অতএব,} \quad \frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}=\frac{ay-bx}{a-b}.$$

উদা. 13. সমাধান কর : $x+y+z=a+b+c \quad \cdots \quad (1)$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3 \quad \cdots \quad (2)$$

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \quad \cdots \quad (3)$$

(1), (2) ও (3) হইতে, স্পষ্টতঃ,

$$(x-a)+(y-b)+(z-c)=0 \quad \cdots \quad (4)$$

$$\left(\frac{x}{a}-1\right)+\left(\frac{y}{b}-1\right)+\left(\frac{z}{c}-1\right)=0 ;$$

অথবা, $$\frac{x-a}{a}+\frac{y-b}{b}+\frac{z-c}{c}=0 ; \quad \cdots \quad (5)$$

$$\left(\frac{x}{a^2}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{y}{b^2}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{z}{c^2}-\frac{1}{c}\right)=0 ;$$

অথবা, $$\frac{x-a}{a^2}+\frac{y-b}{b^2}+\frac{z-c}{c^2}=0, \quad \cdots \quad (6)$$

এখন, (4) ও (5) হইতে, বজ্রগুণন-প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{x-a}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}=\frac{y-b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}=\frac{z-c}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}};$$

ধর, ইহাদের প্রত্যেকটি $=k$.

তাহা হইলে,
$$\left.\begin{aligned} x-a&=k.\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=k\cdot\frac{b-c}{bc};\\ y-b&=k.\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)=k\cdot\frac{c-a}{ac};\\ \text{এবং}\quad z-c&=k.\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=k\cdot\frac{a-b}{ab}.\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

(6) তে এই মানগুলি বসাইলে,

$$k\cdot\left\{\frac{(b-c)}{bc}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{c-a}{ac}\cdot\frac{1}{b^2}+\frac{a-b}{ab}\cdot\frac{1}{c^2}\right\}=0,$$

অথবা, $$k\cdot\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{a^2b^2c^2}=0,$$

" $$k.\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{a^2b^2c^2}=0.$$

সুতরাং, $k=0$, যেহেতু a, b, c, পরস্পর বিভিন্ন সংখ্যা,

কাজেই, (A)-চিহ্নিত সম্বন্ধগুলি হইতে, $x-a=0$; $\therefore\ x=a$

$y-b=0$; $\therefore\ y=b$

$z-c=0$; $\therefore\ z=c$.

উদা. 14. $x=cy+bz$, $y=az+cx$ এবং $z=bx+ay$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}.$$

প্রদত্ত সম্বন্ধগুলি হইতে,
$$\left.\begin{aligned} x-cy-bz&=0 \quad \cdots (1)\\ -cx+y-az&=0 \quad \cdots (2)\\ -bx-ay+z&=0 \quad \cdots (3)\end{aligned}\right\}; \text{ [পক্ষান্তর করিয়া]}$$

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে, বজ্রগুণন-প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{x}{ac+b}=\frac{y}{bc+a}=\frac{z}{1-c^2}. \quad \cdots \quad (4)$$

অনুরূপভাবে, (2) ও (3) হইতে, $\frac{x}{1-a^2}=\frac{y}{ab+c}=\frac{z}{ac+b}$ ... (5)

এবং (1) ও (3) হইতে, $\frac{x}{-c-ab}=\frac{y}{b^2-1}=\frac{z}{-a-bc}$;

অথবা, $$\frac{x}{ab+c}=\frac{y}{1-b^2}=\frac{z}{bc+a}. \qquad \cdots (6)$$

এখন, (4) ও (5) হইতে, $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{ac+b}=\frac{z}{1-c^2}; \\ \frac{x}{1-a^2}=\frac{z}{ac+b};\end{array}\right\}$ $\therefore \frac{x}{ac+b}\times\frac{x}{1-a^2}=\frac{z}{1-c^2}\times\frac{z}{ac+b}$,
অথবা, $\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{z^2}{1-c^2}$; (7)

[উভয় পক্ষকে $ac+b$ দ্বারা গুণ করিয়া]

আবার, (5) ও (6) হইতে,

$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{1-a^2}=\frac{y}{ab+c}; \\ \frac{x}{ab+c}=\frac{y}{1-b^2};\end{array}\right\}$ $\therefore \frac{x}{1-a^2}\times\frac{x}{ab+c}=\frac{y}{ab+c}\times\frac{y}{1-b^2}$;
অথবা, $\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}$. ... (8)

[উভয় পক্ষকে $ab+c$ দ্বারা গুণ করিয়া]

অতএব, (7) ও (8) হইতে, $\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}$.

উদা. 15. $ax+by+cz=0$ এবং $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ হইলে, দেখাও যে,

$$ax^2+by^2+cz^2+(a+b+c)(yz+zx+xy)=0.$$

প্রদত্ত সম্বন্ধ দুইটি হইতে, স্পষ্টতঃ, $\left.\begin{array}{l}ax+by+cz=0 \\ \text{এবং } ayz+bzx+cxy=0\end{array}\right\}$

সুতরাং, a, b, c এর সম্পর্কে, বজ্রগুণন-প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{a}{x(y^2-z^2)}=\frac{b}{y(z^2-x^2)}=\frac{c}{z(x^2-y^2)}=k \text{ [মনে কর]}$$

তাহা হইলে, $a=kx(y^2-z^2)$; $b=ky(z^2-x^2)$ এবং $c=kz(x^2-y^2)$;

$$\therefore\quad ax^2+by^2+cz^2=kx^3(y^2-z^2)+ky^3(z^2-x^2)+kz^3(x^2-y^2)$$
$$=k\{x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)\},$$

এবং $$a+b+c=kx(y^2-z^2)+ky(z^2-x^2)+kz(x^2-y^2)$$
$$=k\{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)\}.$$

সুতরাং, $\dfrac{ax^2+by^2+cz^2}{a+b+c}=\dfrac{x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)}$

$$=\frac{(y-z)(x-z)(x-y)(xy+yz+zx)}{-(y-z)(x-z)(x-y)}$$

$$=-(xy+yz+zx).$$

$\therefore\ ax^2+by^2+cz^2=-(a+b+c)(xy+yz+zx)$;

সুতরাং, $ax^2+by^2+cz^2+(a+b+c)(xy+yz+zx)=0.$

উদা. 16. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}+\frac{y^3+b^3}{y^2+b^2}=\frac{(x+y)^3+(a+b)^3}{(x+y)^2+(a+b)^2}.$$

এখন, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=k$, (মনে কর)। তাহা হইলে, $x=ak,\ y=bk.$

সুতরাং, $\dfrac{x^3+a^3}{x^2+a^2}+\dfrac{y^3+b^3}{y^2+b^2}=\dfrac{a^3(k^3+1)}{a^2(k^2+1)}+\dfrac{b^3(k^3+1)}{b^2(k^2+1)}$

$$=\frac{a(k^3+1)}{k^2+1}+\frac{b(k^3+1)}{k^2+1}=(a+b)\cdot\frac{k^3+1}{k^2+1}=\frac{(k^3+1)(a+b)^3}{(k^2+1)(a+b)^2}$$

$$=\frac{k^3(a+b)^3+(a+b)^3}{k^2(a+b)^2+(a+b)^2}=\frac{\{k(a+b)\}^3+(a+b)^3}{\{k(a+b)\}^2+(a+b)^2}=\frac{(x+y)^3+(a+b)^3}{(x+y)^2+(a+b)^2}.$$

উদা. 17. দেখাও যে, $(bcd+cda+dab+abc)^2-abcd(a+b+c+d)^2$
$=(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd),$

এখন, $(bcd+cda+dab+abc)^2=\{cd(a+b)+ab(c+d)\}^2$
$=c^2d^2(a+b)^2+2abcd(a+b)(c+d)+a^2b^2(c+d)^2$

এবং $(a+b+c+d)^2=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2.$

অতএব, প্রামাণ্য সমতার বামপক্ষ

$$=c^2d^2(a+b)^2+2abcd(a+b)(c+d)$$
$$+a^2b^2(c+d)^2-abcd\{(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2\}$$
$$=c^2d^2(a+b)^2+a^2b^2(c+d)^2-abcd(a+b)^2-abcd(c+d)^2$$
$$=cd(a+b)^2(cd-ab)+ab(c+d)^2(ab-cd)$$
$$=(ab-cd)\{ab(c+d)^2-cd(a+b)^2\}$$
$$=(ab-cd)\{ab(c^2+d^2)-cd(a^2+b^2)\}$$
$$=(ab-cd)\{ac(bc-ad)-bd(bc-ad)\}$$
$$=(ab-cd)(bc-ad)(ac-bd).$$

উদা. 18. দেখাও যে, নিম্নলিখিত রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ :

$$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy).$$

x^2-yz এর পরিবর্তে a, y^2-zx এর পরিবর্তে b এবং z^2-xy এর পরিবর্তে c বসাইলে,

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &= a^3+b^3+c^3-3abc\\ &=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\ &=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.\end{aligned}$$

এখন,
$$\begin{aligned}a-b&=x^2-yz-y^2+zx\\ &=x^2-y^2+z(x-y)\\ &=(x-y)(x+y+z);\end{aligned}$$

তদ্রূপ, $b-c=(y-z)(x+y+z)$;

এবং $c-a=(z-x)(x+y+z)$;

সুতরাং,
$$\begin{aligned}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 &=(x+y+z)^2\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\\ &=2(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\end{aligned}$$

আবার, $a+b+c=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx.$

সুতরাং,
$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশি} &=(a+b+c)\times\tfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\\ &=(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\times\tfrac{1}{2}.\{2(x+y+z)^2\\ &\qquad\times(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\}\\ &=(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2\\ &=\{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)\}^2\\ &=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2.\end{aligned}$$

উদা. 19. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ হইলে, এবং n একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে, দেখাও যে, $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^{2n+1}=\dfrac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}.$

প্রদত্ত সমতা হইতে, $\dfrac{bc+a(b+c)}{abc}-\dfrac{1}{a+b+c}=0.$

সুতরাং, $\{a+(b+c)\}\{bc+a(b+c)\}-abc=0$;

অথবা, $abc+bc(b+c)+a^2(b+c)+a(b+c)^2-abc=0,$

অথবা, $(b+c)\{bc+a(b+c)+a^2\}=0,$

অথবা, $(b+c)(c+a)(a+b)=0.$

অতএব, হয় $b+c=0$; নতুবা $c+a=0$; নতুবা $a+b=0.$

এখন, $b+c=0$ হইলে, $b=-c$; অথবা, $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$;

স্থতরাং, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1}=\left(\frac{1}{a}\right)^{2n+1}=\frac{1}{a^{2n+1}}$ [$\because b+c=0$]

$$=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}};$$

[কারণ, $b^{2n+1}=(-c)^{2n+1}=-c^{2n+1}$; কাজেই, $b^{2n+1}+c^{2n+1}=0.$]

অন্য দুইটি ক্ষেত্রেও, অনুরূপ প্রমাণ দেওয়া যাইতে পারে।

উদা. 20. $x=by+cz+du$, $y=ax+cz+du$, $z=ax+by+du$ এবং $u=ax+by+cz$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}=1.$

$ax+by+cz+du$ এর পরিবর্তে P বসাইয়া, প্রথম প্রদত্ত সর্ত হইতে,

$$ax+x=ax+by+cz+du=P, \text{ অথবা, } x(1+a)=P;$$

অথবা, $\frac{1}{1+a}=\frac{x}{P}$; অথবা, $\frac{a}{1+a}=\frac{ax}{P}$;

অনুরূপভাবে, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ সর্ত হইতে দেখান যাইতে পারে যে,

$$\frac{b}{1+b}=\frac{by}{P};\ \frac{c}{1+c}=\frac{cz}{P};\ \frac{d}{1+d}=\frac{du}{P};$$

স্থতরাং, $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}=\frac{ax+by+cz+du}{P}=\frac{P}{P}=1.$

বিবিধ প্রশ্নমালা

I

1. $x = -1, y = -3, z = 1$ হইলে,
$\sqrt{(x^2+y^3+z)(x-y-3z)} + \sqrt[3]{xy^3z^2}$ এর মান নির্ণয় কর।
2. সরল কর : $3a - 2(b-c) - \{2(a-b) - 3(c+a)\} - \{9c - 4(c-a)\}$.
3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $3(a+b)^2 - 2(a^2 - b^2) - a(a+b)$.
4. $2x^4 - 10x^3y + 25x^2y^2 - 31xy^3 + 20y^4$ কে
$x^2 - 3xy + 4y^2$ দ্বারা ভাগ কর।
5. সরল কর : $\frac{b}{a+b} - \frac{ab}{(a+b)^2} - \frac{ab^2}{(a+b)^3}$.
6. সমাধান কর : $\frac{x+a}{x-a} - \frac{x-b}{x+b} = \frac{2(a+b)}{x}$.
7. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 0$.

II

1. $a = 1, b = 2, c = -3$ হইলে, $(2a+b)(a-b) + (2b+c)(b-c)$
$+ (2c+a)(c-a)$ এর মান নির্ণয় কর।
2. $1 + 3x - 24x^2 + 8x^4$ কে $2x^2 + 3x - 1$ দ্বারা ভাগ কর।
3. $x + 4$ দ্বারা $x^2 + 7x + c$ সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইলে, c এর মান কত হইবে ?
4. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$ এবং $x^3 - 7x + 6$.
5. সরল কর : $\left(1 + \frac{35}{x-7} - \frac{15}{x-3}\right)\left(\frac{1}{5} - \frac{7}{x+7} + \frac{3}{x+3}\right)$.
6. সমীকরণটি সমাধান কর : $\frac{x+1}{6} + \frac{3x-1}{8} - \frac{5x-7}{12} + 1 = \frac{7x-5}{24}$.
7. $x - \frac{1}{x} = 1$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 - \frac{1}{x^3} = 4$.

III

1. $a = 3, b = -2$ এবং $c = 4$ হইলে, $\{a^2(b^3 - c^3) + b^2(c^3 - a^3)$
$+ c^2(a^3 - b^3)\} \div (bc + ca + ab)$ এর মান নির্ণয় কর।
2. সরল কর : $\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^2 - b^2 + 6bc - 9c^2$.

4. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$x^3 + 5ax^2 - 5a^2x - a^3$ এবং $5x^3 - 3ax^2 - 5a^2x + 3a^3$.

5. ল. সা. গু. নির্ণয় কর : $x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 4x + 3$ এবং $x^2 - 3x + 2$.

6. লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর : $\dfrac{x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 4x^2}{x^5 + x^4 + 8x^2 + 8x}$.

7. সমাধান কর : $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{2}{x-7}$.

8. $a : b :: c : d$ হইলে, দেখাও যে, $ab : cd :: a^2 + b^2 : c^2 + d^2$.

IV

1. সরল কর : $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2} + b} \div \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - b}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$.

2. দুইটি রাশির গুণফল $x^8 + x^4y^4 + y^8$ এবং উহাদের একটি $x^2 - xy + y^2$ হইলে, অপরটি নির্ণয় কর।

3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $x^3 + x^2 - x - 1$; (ii) $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$.

4. দেখাও যে, $(ax + by)^2 + (bx - ay)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$.

5. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$8x^3 + 27$, $16x^4 + 36x^2 + 81$ এবং $6x^2 - 5x - 6$.

6. সমাধান কর : $\dfrac{3x-4}{x} + \dfrac{2}{4x+3} = 3$.

7. $\dfrac{bx + ay}{2ab} = \dfrac{by - ax}{b^2 - a^2} = ab$ হইলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

8. $\dfrac{p}{a+b-c} = \dfrac{q}{a-b+c} = \dfrac{r}{b+c-a}$ হইলে, দেখাও যে, প্রত্যেকটি ভগ্নাংশই $\dfrac{p+q+r}{a+b+c}$ এর সমান।

V

1. সরল কর : $\dfrac{x^2 - 25y^2}{x^2 + 3xy - 10y^2} \times \dfrac{x^2 - 4y^2}{x^2 - 3xy - 10y^2}$.

2. $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ কে $a+b+c$ দ্বারা ভাগ কর, এবং লব্ধ ভাগফলকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

3. $x=a+3$, এবং $y=a-3$ হইলে, $\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

4. $24+\frac{a^2}{b}+8\left(\frac{2b}{a^2}-ab^{-\frac{1}{2}}\right)-\frac{32\sqrt{b}}{a}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

5. দেখাও যে, $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$
$$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2.$$

6. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}2^x \times 4^y=64\\ 3^x+9^y=\ \ 9\end{array}\right\}.$

7. $a:b::p:q$ হইলে, দেখাও যে, $(a^2+p^2)(b^2+q^2)=(ab+pq)^2$.

VI

1. লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর :
$$\frac{2a(1-x^2)^2}{yz} \div \frac{(1+x)^2(1-x)}{y^3} \div \frac{2ay^2(1-x)}{z}.$$

2. গুণ কর : $a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}$ কে $a-b+\frac{b^2}{a}-\frac{a^2}{b}$ দ্বারা।

3. ভাগ কর : $x^4-2bx^3-(a^2-b^2)x^2+2a^2bx-a^2b^2$ কে
$x^2-(a+b)x+ab$ দ্বারা।

4. $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ হইলে, দেখাও যে,
$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$$

5. $\frac{5x^3-14x^2+16}{3x^3-2x^2+16x-48}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর।

6. সমাধান কর : $\frac{2}{x}+\frac{7}{y}=29, \quad \frac{5}{x}-\frac{6}{y}=2.$

7. সমাধান কর : $2x+3y-8z+35=0, \quad 7x-4y+z-8=0,$
$12x-5y-3z+10=0.$

8. $a:b=c:d=e:f$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$a:b::\sqrt{p^2a^2+q^2c^2-r^2e^2}:\sqrt{p^2b^2+q^2d^2-r^2f^2}.$$

VII

1. $-2x^5y^{-3}+17x^6y^{-4}-5x^7-24x^8y^4$ কে
$-x^2y^{-5}-7x^3y^{-1}+8x^4y^3$ দ্বারা ভাগ কর।

2. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :
$$e^{2x}a^3+e^{2x}-a^3-1 \text{ এবং } e^{2x}a^2+2e^xa^2-e^{2x}-2e^x+a^2-1.$$

3. দেখাও যে, $1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}=\frac{(a+c+d-b)(b+c+d-a)}{2(ab+cd)}$.

4. সরল কর : $\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$.

5. সমাধান কর : $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}$.

6. x^2+mx+n এবং $x^2+m'x+n'$ রাশি দুইটির প্রত্যেকটি $x+a$ দ্বারা বিভাজ্য হইলে, দেখাও যে, $a=\frac{n-n'}{m-m'}$.

7. গিনি এবং অর্দ্ধ-ক্রাউনে, 100 পাউণ্ডের একখানি বিলের (bill) পাওনা শোধ করা হইল। উহাতে গিনির সংখ্যা, অর্দ্ধ-ক্রাউনের সংখ্যা অপেক্ষা 48 কম হইলে, কোন্ প্রকার মুদ্রার কতগুলি করিয়া দেওয়া হইয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।

[A bill of £100 was paid in guineas and half-crowns, and 48 more half-crowns than the guineas were used; find how many of each were paid ?]

8. $a:b::c:d$ হইলে, প্রমাণ কর যে;

$$4a^8+5b^8:4c^8+5d^8::a^4b^4:c^4d^4.$$

VIII

1. দেখাও যে, $(a+c)(x+z)$ দ্বারা $(ax+by+cz)^3+(cx-by+az)^3$ বিভাজ্য।

2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $(b+c)^2-6a(b+c)+5a^2$. (ii) $x^2+2xy-a^2-2ay$.

3. সরল কর : $\frac{(a+b)\{(a+b)^2-c^2\}}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}$.

4. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে, $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$.

5. সমাধান কর : $3(x+3)^2+5(x+5)^2=8(x+8)^2$.

6. বর্গমূল নির্ণয় কর : $25a^{-2}-12a+16a^{-8}+4a^4-24a^{-5}$.

7. $yz=4$, $zx=9$, $xy=25$ হইলে, x, y, z এর মান নির্ণয় কর।

8. $p:q::r:s$ হইলে, দেখাও যে, $p(p+q+r+s)=(p+q)(p+r)$.

IX

1. $a=1$, $b=2$ এবং $c=-3$ হইলে,

$\{a^2-(b-c)^2\}-\{b^2-(c-a)^2\}-\{c^2-(a-b)^2\}$ এর মান নির্ণয় কর।

2. সরল কর : $\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^2}$.

3. $a^3 - b^3 + 3ab + 1$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

4. সমাধান কর : $\frac{4x+3}{9} + \frac{7x-29}{5x-12} = \frac{8x+19}{18}$.

5. দেখাও যে, $\frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(x-y)^2} = \left(\frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y}\right)^2$.

6. সমাধান কর : $x+y : x-y = 5 : 3$, $x+5y = 36$.

7. 4 টা ও 5 টার মধ্যে কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর-লম্ব হইবে ?

[Find the time between 4 and 5 o'clock, when the hands of a clock are at right angles to each other.]

8. $m : n :: n : p$ হইলে, দেখাও যে,

$$(m+n+p)(m-n+p) = m^2 + n^2 + p^2.$$

X

1. $27a^3 - 8b^3 - 27c^3 - 54abc$ কে $3a - 2b - 3c$ দ্বারা ভাগ কর।

2. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $x^5 + 11x^3 - 54$ এবং $x^5 + 11x + 12$.

3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $(a^2 - b^2)(x^2 + y^2) + 2(a^2 + b^2)xy$.

4. সরল কর : $\dfrac{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2} \div \dfrac{\frac{a}{b}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}{\frac{(a+b)^2}{ab} - 2}$.

5. দেখাও যে, $a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) + abc(a+b+c)$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(bc + ca + ab).$$

6. তিনজন লোক ও একটি বালক যে কাজ 6 দিনে করিতে পারে, একজন লোক ও দুইটি বালক তাহা 12 দিনে করিতে পারে, উহা করিতে একজন লোকের কত দিন লাগিবে ?

[One man and two boys can do in 12 days a piece of work which would be done in 6 days by three men and one boy. How long would it take one man to do it ?]

7. $a : b :: b : c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$a^4 + a^2c^2 + c^4 = b^2\left(\frac{b^2}{c^2} - 1 + \frac{b^2}{a^2}\right)(a^2 + b^2 + c^2).$$

XI

1. দেখাও যে, $(x^2 + xy + y^2)^2 - 4xy(x^2 + y^2) = (x^2 - xy + y^2)^2$.

2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2(ad - bc)$;

(ii) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z$.

3. বর্গমূল নির্ণয় কর : $\frac{9b^2}{a^2}+\frac{a^2}{9b^2}-\frac{6b}{a}-\frac{2a}{3b}+3.$

4. সমাধান কর : $x+2y+3z=6,\ 2x+4y+z=7,\ 3x+2y+9z=14.$

5. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $x^4y-x^3y^2-15x^2y^3+38xy^4-14y^5$ এবং $x^5-7x^4y+21x^3y^2-34x^2y^3+28xy^4.$

6. কোন ব্যক্তি 570 টি কমলালেবুর কতকগুলি প্রতি শিলিংএ 16 টা দরে, এবং কতকগুলি প্রতি শিলিংএ 18 টা দরে ক্রয় করিয়া সমস্ত লেবু প্রতি শিলিংএ 15 টা দরে বিক্রয় করিল ; ইহাতে তাহার 3 শিলিং লাভ হইয়া থাকিলে, সে প্রত্যেক প্রকারের কতগুলি করিয়া লেবু কিনিয়াছিল ?

[A man buys 570 oranges, some at 16 for a shilling and the rest at 18 for a shilling ; he sells them all at 15 for a shilling and gains three shillings ; how many for each sort does he buy ?]

7. সরল কর :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{b}{c}\right)\left(1-\frac{a}{c}\right)}.$$

8. $a:b=c:d=e:f$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2.$$

XII

1. $x=a+d,\ y=b+d,\ z=c+d$ হইলে, দেখাও যে,

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$$

2. সরল কর :

$$\frac{y+z}{(y^2-xz)(z^2-xy)}+\frac{z+x}{(z^2-xy)(x^2-yz)}+\frac{x+y}{(x^2-yz)(y^2-xz)}.$$

3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $x^2-2ax-b^2+2ab$; (ii) $x^2+(a+b+c)x+ab+ac.$

4. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$6x^4-2x^3+9x^2+9x-4$ এবং $9x^4+80x^2-9.$

5. সমাধান কর : $\frac{6x+13}{15}-\frac{3x+5}{5x-25}-\frac{2x}{5}=0.$

6. কোন কাজ A ও B একত্রে 12 দিনে, A ও C একত্রে 15 দিনে, এবং B ও C একত্রে 20 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। A, B ও C একত্রে ঐ কাজ কতদিনে সম্পন্ন করিতে পারিবে ?

[A and B can together do a work in 12 days ; A and C in 15 days ; B and C in 20 days ; find in how many days, they will do the work, all working together.]

7. $x : y :: a : b$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+y+a+b}.$$

XIII

1. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,

$$a(b-c)(s-a)^2+b(c-a)(s-b)^2+c(a-b)(s-c)^2=0.$$

2. দেখাও যে, $x^6+x^3a^3+a^6$ রাশিটি $x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{3}{8}}a^{\frac{3}{8}}+a^{\frac{3}{4}}$ দ্বারা বিভাজ্য।

3. সরল কর : $\dfrac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}.$

4. সমাধান কর : $\dfrac{x^2-a^2}{x-a}+\dfrac{x^2-b^2}{x-b}+\dfrac{x^2-c^2}{x-c}=a+b+c-3x.$

5. প্রতি গ্যালন্ 15 শি. দরের 80 গ্যালন্ স্পিরিটের সহিত কত পরিমাণ জল মিশ্রিত করিলে, মিশ্রণের প্রতি গ্যালন্ 12 শি. দরে বিক্রয় করিয়া, মূলধনের শতকরা 10 ভাগ করিয়া লাভ হইবে ?

[Find how many gallons of water is to be mixed with 80 gallons of spirit which cost 15 shillings a gallon, so that by selling the mixture at 12 shillings a gallon, there may be a gain of 10 per cent. on the outlay.]

6. সরল কর : $\dfrac{(p^{a+b})^2.(p^{b+c})^2.(p^{c+a})^2}{(p^a.p^b.p^c)^4}.$

7. $a : b :: b : c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$a^2+ab+b^2 : b^2+bc+c^2 :: a : c.$$

XIV

1. $a+b+c=2s$ এবং $a^2+b^2+ab+s^2=2s(a+b)$ হইলে, দেখাও যে, $(a-s)^2+(b-s)^2+(c-s)^2=s^2.$

2. x^2+px+q এবং x^2+lx+m এর সাধারণ গুণনীয়ক $x+a$ হইলে, দেখাও যে, $a=\dfrac{m-q}{l-p}.$

3. সমাধান কর : $\dfrac{a-b}{x-a}+\dfrac{a-b}{x-b}=\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}.$

4. সমাধান কর : $\dfrac{y+z-x}{b+c}=\dfrac{z+x-y}{c+a}=\dfrac{x+y-z}{a+b}=1.$

5. A যে কাজ 20 দিনে করিতে পারে, B এর সেই কাজ করিতে 12 দিন লাগে ; A কিছুদিন কাজ করিবার পর B তাহার পরিবর্তে নিযুক্ত হইয়া কাজের বাকী

অংশ শেষ করিল; A ও B এর সর্ব্বশুদ্ধ 14 দিন লাগিয়া থাকিলে, A কতদিন কাজ করিয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।

[A can do a piece of work in 20 days, which B can do in 12 days. A begins the work, but after a time B takes his place and the whole work is finished in 14 days from the beginning. How long did A work ?]

6. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

7. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

XV

1. b এর মান কত হইলে, $x^4+2ax^3+(a^2+8)x^2+(4a+ab)x+4b$ একটি সম্পূর্ণ বর্গ হইবে?

2. প্রমাণ কর যে, $(b-c)(1+ab)(1+ac)+(c-a)(1+bc)(1+ba)$
$+(a-b)(1+ca)(1+cb)=(b-c)(c-a)(a-b).$

3. সরল কর: $\dfrac{2x^2+2}{x^4+x^2+1}+\dfrac{1}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{x^2-x+1}.$

4. গ. সা. গু. নির্ণয় কর: $2x^3+(2a-3b)x^2-(2b+3ab)x+3b^2$ এবং $2x^2-(3b-2c)x-3bc.$

5. $x=\dfrac{a^n+b^n}{2}$ হইলে, $\dfrac{a^n}{2na^n-2nx}+\dfrac{b^n}{2nb^n-2nx}$ এর মান নির্ণয় কর।

6. সমাধান কর: $\dfrac{20x+36}{25}+\dfrac{5x+20}{9x-16}=\dfrac{4x}{5}+\dfrac{86}{25}.$

7. স্পিরিট ও জলের মিশ্রণ দ্বারা পরিপূর্ণ কোন পাত্রে, স্পিরিটের ভাগ মিশ্রণের শতকরা 70 ভাগ; উহা হইতে 9 গ্যালন্ বাহির করিয়া লইয়া পাত্রটি পুনরায় জল দ্বারা পূর্ণ করিবার পর দেখা গেল যে, পাত্রস্থিত মিশ্রণে শতকরা $58\frac{1}{3}$ ভাগ স্পিরিট রহিয়াছে। পাত্রটিতে কত পরিমাণ মিশ্রণ ছিল?

[A vessel is filled with a mixture of spirit and water, 70 per cent. of which is spirit. After 9 gallons are taken out, and the vessel is filled up with water, there remains $58\frac{1}{3}$ per cent. of spirit ; find the contents of the vessel.]

8. $x-z:y-z::x^2:y^2$ হইলে, দেখাও যে,

$$x+z:y+z::\frac{x}{y}+2:\frac{y}{x}+2.$$

XVI

1. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $x^5+2x^4-5x^2-7x+3$ এবং $3x^6-3x^4-18x^3+x^2+2x+3$.

2. $(a+b+c)x=(-a+b+c)y=(a-b+c)z=(a+b-c)w$ হইলে,

দেখাও যে, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{x}$.

3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $ax(y^3+b^3)+by(bx^2+a^2y)$.

4. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c}{d}$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{a^2+ab}{ab-b^2}=\frac{c^2+cd}{cd-d^2}$.

5. দুইটি পাত্রের প্রত্যেকটিতে মদ ও জলের মিশ্রণ রহিয়াছে; প্রত্যেক পাত্র হইতে সমান পরিমাণ মিশ্রণ লইয়া একত্র করিবার পর দেখা গেল যে, উহাতে জল ও মদ সমান পরিমাণে আছে। কিন্তু দ্বিতীয়টি হইতে যত পরিমাণ মিশ্রণ লওয়া হইল, প্রথমটি হইতে তাহার চারিগুণ পরিমাণ মিশ্রণ লইয়া একত্র করিলে, উহাতে মদ ও জলের অনুপাত 2 : 3 হইত। প্রত্যেক পাত্রে মদ ও জলের অনুপাত নির্ণয় কর।

[Each of two vessels contains a mixture of wine and water; a mixture of equal measures from the two vessels contains as much wine as water, and another mixture consisting of four measures from the first vessel and one from the second is composed of wine and water in the ratio of 2 : 3. Find the proportion of wine and water in each of the vessels.]

XVII

1. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : x^5+x^2+2x+2 এবং x^4+x^2+1.

2. $a=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ হইলে, $\left(\frac{a}{a-1}\right)^2+\left(\frac{a}{a+1}\right)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে, $\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}=ab+bc+ca$.

4. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে,

$$4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)=(a^2+b^2+c^2)^2.$$

অতএব, প্রমাণ কর যে,

$$(y-z)^2(z-x)^2+(z-x)^2(x-y)^2+(x-y)^2(y-z)^2 = (x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2.$$

5. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার একটি অঙ্ক অপরটি অপেক্ষা 5 বেশী; সংখ্যার অঙ্কদ্বয়কে বিপরীতক্রমে লিখিয়া যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তাহা পূর্বসংখ্যার $\frac{3}{8}$ অংশ। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[One of the digits of a number formed of two digits is greater by

5 than the other. When the digits are inverted, the number becomes $\frac{3}{8}$ ths of the original number. Find the number.]

6. সরল কর: $\dfrac{3x^3+x^2-5x+21}{6x^3+29x^2+26x-21}$.

7. $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$ হইলে, দেখাও যে, $a=b=c$.

XVIII

1. দেখাও যে, $\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}^2$
$$=2\{(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4\}.$$

2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
(i) $14x^2-37x+5$; (ii) $(1+a)^2(1+c^2)-(1+c)^2(1+a^2)$;
(iii) $m^4-n^4+2n(m^3+n^3)-(m+n)^2(m-n)^2$.

3. কোন পাঁউরুটি-বিক্রেতা, 3 পাউণ্ড 12 আউন্স ওজনের এক একখানা পাঁউরুটিকে 4 পাউণ্ড ওজনের রুটি বলিয়া প্রত্যেকখানা $9\frac{1}{2}$ পেন্স দরে বিক্রয় করিতে লাগিল, এবং এইরূপ কয়েকখানা বিক্রয় করার পর ধরা পড়িয়া 5 পাউণ্ড জরিমানা দিল; এবং ইহাতে তাহার কম ওজনের রুটি-বিক্রয়জনিত লাভের পরিমাণ অপেক্ষা আরও 5 শিলিং বেশী লোকসান হইল। সে কতখানা রুটি বিক্রয় করিয়াছিল ?

[A baker charges $9\frac{1}{2}d.$ for a loaf which he represents as weighing 4 lbs., but which really weighs 3 lbs. 12 oz. After he has sold a certain number of loaves, he is detected and fined £5, and thus loses 5 shillings more than he has cleared by selling less weight. How many loaves did he sell ?]

4. সরল কর: $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

5. $a+b+c=0$ না হইলে, $\dfrac{a-b}{ay+bx}=\dfrac{b-c}{bz+cy}=\dfrac{c-a}{cx+az}=\dfrac{a+b+c}{ax+by+cz}$

হইলে, দেখাও যে, প্রত্যেকটি অনুপাতই $\dfrac{1}{x+y+z}$ এর সমান।

6. সমাধান কর: $x(x+y+z)=24$, $y(x+y+z)=48$, $z(x+y+z)=72$.

XIX

1. দেখাও যে, $\dfrac{a(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}=a+b+c$.

2. সরল কর: $\dfrac{(b-c)a^3+(c-a)b^3+(a-b)c^3}{c^2-bc-ca+ab}$.

3. m-সংখ্যক স্বর্ণমুদ্রা ও n-সংখ্যক রৌপ্যমুদ্রা সমান ওজনবিশিষ্ট হইলে, এবং

p-সংখ্যক স্বর্ণমুদ্রা এবং q-সংখ্যক রৌপ্যমুদ্রা সমান মূল্যবিশিষ্ট হইলে, সমান ওজনের স্বর্ণ ও রৌপ্যের মূল্যের তুলনা কর।

[If m gold coins are equal in weight to n silver coins and p of the former is equal in value to q of the latter, compare the values of equal weights of gold and silver.]

4. $x=b+c,\ y=c+a,\ z=a+b$ হইলে, দেখাও যে,

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=2(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

5. $\dfrac{1}{b^3(a-c)}+\dfrac{1}{a^3(b-c)}=\dfrac{1}{ab(a-c)(b-c)}$ হইলে,

প্রমাণ কর যে, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$, অথবা, $a^2+b^2=ab$.

XX

1. দেখাও যে, $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$
$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

2. $a^2x^3-b^3x^2+ac^3x+3a^3bc$-এর একটি গুণনীয়ক $x+a$ হইলে, এবং a এর মান 0 (zero) না হইলে, দেখাও যে, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

3. সরল কর :

$$\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{ca}{b(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\frac{ab}{c(c^2-b^2)(c^2-a^2)}.$$

4. ভাগ কর : $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$ কে
$(a-b)(b-c)(c-a)$ দ্বারা।

5. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে, $a^5+b^5+c^5=5abc(c^2-ab)$.

6. সমাধান কর : $\dfrac{a}{x+a-c}+\dfrac{b}{x+b-c}=2.$

7. সমাধান কর : $ax+by+cz=a+b+c,\ \dfrac{ax}{b+c}+\dfrac{by}{a+c}=1,$

$$\frac{2x}{b+c}+\frac{2y}{a+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

8. কোন ব্যক্তি, পথিমধ্যে বিশ্রাম না করিয়া বরাবর সমান গতিতে কটক হইতে জোব্‌রা পর্য্যন্ত যাইয়া, পুনরায় কটকে ফিরিয়া আসিবার নিমিত্ত যাত্রা করিল। ঠিক সেই সময় অন্য এক ব্যক্তিও ঠিক ঐরূপভাবে জোব্‌রা হইতে কটক পর্য্যন্ত যাইয়া পুনরায় জোব্‌রায় ফিরিয়া আসিবার নিমিত্ত যাত্রা করিল। তাহারা প্রথমে জোব্‌রা হইতে দেড় মাইল দূরে, এবং এক ঘণ্টা পরে পুনরায় কটক হইতে এক মাইল দূরে, মিলিত হইল। তাহাদের ভ্রমণের বেগ ও কটক হইতে জোব্‌রার দূরত্ব নির্ণয় কর।

[A person starts to walk at a uniform speed without stopping

from Cuttack to Jobra and back ; at the same time, another starts to walk at a uniform speed without stopping from Jobra to Cuttack and back. They meet a mile and a half from Jobra and again, an hour after, a mile from Cuttack. Find their rates of walking and the distance between Cuttack and Jobra.]

XXI

1. দেখাও যে,

$$\{(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2\}\times\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$
$$=2\{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)\}.$$

2. দেখাও যে, $\dfrac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}=3.$

3. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে,

$$a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2.$$

4. $s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(s-3a)^2+(s-3b)^2+(s-3c)^2=3\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$$

5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^2+2ab-2ac-3b^2+2bc.$

6. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$x^4-2x^3+5x^2-4x+3$ এবং $2x^4-x^3+6x^2+2x+3.$

7. $a:b=b:c=c:d$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$a:d=\sqrt{a^5+b^2c^2+a^3c^2}:\sqrt{b^4c+d^4+b^2cd^2}.$$

XXII

1. দেখাও যে, $a(b-c)(1+ab)(1+ac)+b(c-a)(1+bc)(1+ba)$
$+c(a-b)(1+ca)(1+cb)=abc(a-b)(a-c)(b-c).$

2. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে, $a^7+b^7+c^7=7abc(c^2-ab)^2.$

3. ax^2+bx+c এবং $a'x^2+b'x+c'$ রাশিদ্বয়ের মধ্যে $x+f$ এর আকারের এক উৎপাদক সাধারণ (common) থাকিলে, দেখাও যে,

$$(ac'-a'c)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b).$$

4. A ও B এর ভিতর কোন দৌড়-প্রতিযোগিতায় B কে 50 গজ অগ্রবর্তী হইতে দেওয়া হইল ; কিন্তু B যতক্ষণে 19 গজ যায়, A সে সময়ে 20 গজ যাইতে পারে। প্রতিযোগিতায় A, B কে এক গজে হারাইয়া থাকিলে, A কত পরিমাণ পথ দৌড়াইয়াছিল ?

[A and B run a race ; B has 50 yards start, but A runs 20 yards while B runs 19. What must be the length of the course that A may come in a yard ahead of B?]

5. দেখাও যে, $\frac{p+q+r}{p-q}-\frac{q(4p+3r)-r(p+r)}{p^2-q^2}=\frac{(p-q+r)^2}{p^2-q^2}$.

6. দেখাও যে,

$$\frac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}=(a+b)(b+c)(c+a).$$

7. সমাধান কর :

$$x+y+z=2a+2b+2c,\ ax+by+cz=2bc+2ca+2ab,$$
$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0.$$

XXIII

1. দেখাও যে, $(b-c)(1+a^2b)(1+a^2c)+(c-a)(1+b^2c)(1+b^2a)$
$+(a-b)(1+c^2a)(1+c^2b)=abc(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$.

2. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$21x^2-13x+2,\ 28x^2-15x+2$ এবং $12x^2-7x+1$.

3. দেখাও যে, $(x^2+xy+y^2)^2$ দ্বারা $(x+y)^7-x^7-y^7$ বিভাজ্য।

4. $2s=a+b+c$ এবং $2t^2=a^2+b^2+c^2$ হইলে, দেখাও যে,

$$(t^2-a^2)(t^2-b^2)+(t^2-b^2)(t^2-c^2)+(t^2-c^2)(t^2-a^2)$$
$$=4s(s-a)(s-b)(s-c).$$

5. $(1+xx'+yy')^2=(1+x^2+y^2)(1+x'^2+y'^2)$ হইলে,

দেখাও যে, $x=x'$ এবং $y=y'$.

6. সরল কর :

$$\frac{ab(a-b)(a^2+b^2)+bc(b-c)(b^2+c^2)+ca(c-a)(c^2+a^2)}{a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)}.$$

7. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

XXIV

1. সমাধান কর : $x+y+z=a+b+c,$

$$bx+cy+az=cx+ay+bz=ab+bc+ca.$$

2. 243 কে এরূপ তিন অংশে ভাগ কর, যেন প্রথম ভাগের অর্দ্ধ দ্বিতীয় ভাগের এক-তৃতীয়াংশ এবং তৃতীয় ভাগের এক-চতুর্থাংশ পরস্পর সমান হইবে।

[Divide 243 into three parts such that one half of the first, one-third of the second and one-fourth of the third may be equal to one another.]

3. $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$ হইলে, দেখাও যে,

$$a=b=c=d.$$

4. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে,

$$a(b-c)(s-a)^2+b(c-a)(s-b)^2+c(a-b)(s-c)^2=0.$$

5. $bz+cy=a,\ az+cx=b$ এবং $ay+bx=c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^2}{1-x^2}=\frac{b^2}{1-y^2}=\frac{c^2}{1-z^2}.$$

6. ax^2-bx+c এবং dx^3-bx+c এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকিলে, দেখাও যে, $a^3-abd+cd^2=0$.

7. $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$ এবং n একটি অখণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}$.

XXV

1. $x=a^2-bc,\ y=b^2-ca,\ z=c^2-ab$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}=(a+b+c)(x+y+z).$$

2. $2s=a+b+c+d$ হইলে, দেখাও যে,

$$4(bc+ad)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

3. প্রমাণ কর যে, $(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3$

$$-3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

4. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে,

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9.$$

5. $x:a=y:b=z:c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}=\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{x+y+z+a+b+c}.$$

6. $ax+by+cz=0$ এবং $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$ax^3+by^3+cz^3+(a+b+c)(y+z)(z+x)(x+y)=0.$$

পরিশিষ্ট—উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1. [৫৫৯-৫৬১ পৃষ্ঠা]

1. $x=1,\ y=2.$
2. $x=2,\ y=3.$
3. $x=3,\ y=4.$
4. $x=4,\ y=5.$
5. $x=5,\ y=6.$
6. $x=6,\ y=7.$
7. $x=7,\ y=8.$
8. $x=8,\ y=9.$
9. $x=4,\ y=2.$
10. $x=5,\ y=3.$
11. $x=7,\ y=4.$
12. $x=5,\ y=8.$
13. $x=8,\ y=12.$
14. $x=6,\ y=14.$
15. $x=8,\ y=18.$
16. $x=8,\ y=9.$
17. $x=12,\ y=16.$
18. $x=21,\ y=12.$
19. $x=21,\ y=24.$
20. $x=18,\ y=28.$
21. $x=99,\ y=15.$
22. $x=10,\ y=8.$
23. $x=3,\ y=7.$
24. $x=4,\ y=7.$
25. $x=3,\ y=5.$
26. $x=1,\ y=2,\ z=3.$
27. $x=2,\ y=-3,\ z=1.$
28. $x=3,\ y=4,\ z=2.$
29. $x=2,\ y=6,\ z=4.$
30. $x=1,\ y=3,\ z=5.$
31. $x=2,\ y=3,\ z=4.$
32. $x=3,\ y=6,\ z=9.$
33. $x=4,\ y=10,\ z=14.$
34. $x=8,\ y=12,\ z=20.$
35. $x=3,\ y=4,\ z=5.$

প্রশ্নমালা 2. [৫৬৪-৫৬৫ পৃষ্ঠা]

1. $x=1,\ y=2,\ z=3.$
2. $x=2,\ y=3,\ z=4.$
3. $x=2,\ y=3,\ z=4.$
4. $x=2,\ y=3,\ z=4.$
5. $x=3,\ y=2,\ z=1.$
6. $x=3,\ y=2,\ z=1.$
7. $x=4,\ y=3,\ z=2.$
8. $x=4,\ y=5,\ z=6.$
9. $x=7,\ y=5,\ z=3.$
10. $x=1,\ y=-2,\ z=3.$
11. $x=3,\ y=2,\ z=5.$
12. $x=3,\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{2}{3}.$
13. $x=10,\ y=20,\ z=5.$
14. $x=2,\ y=-3,\ z=4.$
15. $x=5,\ y=6,\ z=7.$
16. $x=2,\ y=4,\ z=6.$
17. $x=2,\ y=5,\ z=10.$
18. $x=12,\ y=12,\ z=12.$
19. $x=6,\ y=12,\ z=8.$
20. $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{4}.$
21. $x=7,\ y=10,\ z=9.$
22. $x=1,\ y=-2,\ z=3.$
23. $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad y=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac},\quad z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$
24. $x=1,\ y=2,\ z=3.$
25. $x=-28,\ y=10,\ z=9.$

প্রশ্নমালা 3. [৬৬৮-৬৬৯ পৃষ্ঠা]

1. $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$, $z=\frac{c}{2}$. 2. $x=\frac{2}{a+b-c}$, $y=\frac{2}{a-b+c}$. $z=\frac{2}{b+c-a}$. 3. $x=\frac{2abc}{ab+ac-bc}$, $y=\frac{2abc}{bc-ac+ab}$, $z=\frac{2abc}{bc+ac-ab}$.
4. $x=\frac{c(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$, $y=\frac{c(a^2+b^2)}{2ab}$. 5. $x=2, y=4, z=6$.
6. $x=5, y=3, z=1$. 7. $x=12, y=10, z=8$.
8. $x=13, y=8, z=9$. 9. $x=4, y=5, z=7$.
10. $x=\frac{b(2a-b)}{a-b}$, $y=\frac{a(2b-a)}{b-a}$.
11. $x=\frac{Abc}{(a-b)(a-c)}$, $y=\frac{Aac}{(b-a)(b-c)}$, $z=\frac{Aab}{(c-b)(c-a)}$.
12. $x=\frac{1}{(b-c)(a-c)}$, $y=\frac{1}{(a-b)(c-b)}$, $z=\frac{1}{(c-a)(b-a)}$.
13. $x=\frac{a^2bc}{(b-a)(c-a)}$, $y=\frac{db^2c}{(b-a)(b-c)}$, $z=\frac{abc^2}{(c-b)(c-a)}$.
14. $x=abc, y=ab+ca+bc, z=a+b+c$.
15. $x=b-c, y=c-a, z=a-b$. 16. $a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(a_2c_1-a_1c_2)+c_3(a_1b_2-b_1a_2)=0$. 17. $a=6$. 18. $w=4, x=12, y=5, z=7$.
19. $x=5, y=4, z=3, w=2, t=1$. 20. $x=ab, y=bc, z=ac$.

প্রশ্নমালা 4. [৫৭২ পৃষ্ঠা]

1. $x+9$. 2. $3x-8$. 3. $4a-3b$. 4. x^2-3x+2.
5. $2x^2+x-3$. 6. $1-3x^2+2x^4$. 7. $2x^2-3cx+c^2$.

বিবিধ প্রশ্নমালা

[৫৮৫-৫৯৮ পৃষ্ঠা]

I

1. $1\frac{2}{3}$. 2. 0. 3. $5b(a+b)$. 4. $2x^2-4xy+5y^2$.
5. $\frac{b^3}{(a+b)^3}$. 6. $\frac{ab}{b-a}$.

II

1. 21. 2. $4x^2-6x-1$. 3. 12. 4. x^2-3x+2.
5. $\frac{1}{5}$. 6. 11.

III

1. -30. 2. $\frac{4x^2}{1-x^4}$. 3. $(a+b-3c)(a-b+3c)$.

4. $x-a$. 5. $(x-1)(x-2)(x-3)$. 6. $\frac{x(x+2)}{x^2-2x+4}$.

7. $\frac{1}{3}$.

IV

1. $\frac{b^2}{a^2}$. 2. $x^6+x^5y-x^3y^3+xy^5+y^6$. 3. (i) $(x+1)^2(x-1)$.

(ii) $(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)$. 5. $(64x^6-729)(3x+2)$.

6. $-\frac{6}{7}$. 7. $x=a^2b,\ y=ab^2$.

V

1. 1. 2. $a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)=a^2(b-c)+b^2(c-a)$
$+c^2(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)$. 3. $\frac{9(a^2+3)}{a(a^2+27)}$.

4. $\frac{a}{\sqrt{b}}-4+\frac{4\sqrt{b}}{a}$. 6. $x=4,\ y=1$.

VI

1. 1. 2. $b^2-a^2+\frac{b^4}{a^2}-\frac{a^4}{b^2}$. 3. $x^2+(a-b)x-ab$.

5. $\frac{5x^2-4x-8}{3x^2+4x+24}$. 6. $x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{3}$. 7. $x=3,\ y=5,\ z=7$.

VII

1. $2x^3y^{-3}-3x^4y$. 2. ae^x+e^x+a+1. 4. $\frac{ax+by}{ax-by}$.

5. 7. 7. 80 গিনি, 128 অর্দ্ধ-ক্রাউন।

VIII

2. (i) $(b+c-a)(b+c-5a)$. (ii) $(x+2y+a)(x-a)$.

3. $\frac{a+b}{(a-b+c)(b+c-a)}$. 5. -6. 6. $2a^2-3x^{-1}+4a^{-4}$.

7. $x=7\frac{1}{2},\ y=3\frac{1}{3},\ z=1\frac{1}{5}$.

IX

1. -20. 2. $\frac{1}{x^2-1}$. 3. $(a-b+1)(a^2+b^2+1+ab-a+b)$.

4. 6. 6. $x=16,\ y=4$. 7. 4 টা বাজিয়া $5\frac{5}{11}$ বা $38\frac{2}{11}$ মিনিটের সময়।

X

1. $9a^2+4b^2+9c^2+6ab-6bc+9ac$. 2. x^2+2x+3.
3. $\{(a+b)x+(a-b)y\}\{(a-b)x+(a+b)y\}$. 4. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. 6. 20 দিন।

XI

2. (i) $(a+b-c-d)(a-b+c-d)$. (ii) $(x+y-z)(x-y+z+1)$.
3. $\frac{3b}{a}-1+\frac{a}{3b}$. 4. $x=y=z=1$. 5. $x^2-5xy+7y^2$.
6. প্রতি শিলিং 16 টা দরে 480 টি ; এবং প্রতি শিলিংএ 18 টা দরে 90 টি।
7. 1.

XII

2. 0. 3. (i) $(x-b)(x-2a+b)$. (ii) $(x+a)(x+b+c)$.
4. $3x-1$. 5. 20. 6. 10.

XIII

3. 0. 4. 0. 5. 30. 6. 1.

XIV

3. $a+b$. 4. $x=\frac{1}{2}(2a+b+c)$, $y=\frac{1}{2}(a+2b+c)$, $z=\frac{1}{2}(a+b+2c)$.
5. 5 দিন। 6. $(x^2+5ax+5a^2)^2-(a^2)^2$.

XV

1. 4. 3. $\frac{2x+3}{x^2+x+1}$. 4. $2x-3b$. 5. $\frac{1}{n}$.
6. 4. 7. 54 গ্যালন।

XVI

1. x^2+2x+3. 3. $(xy+ab)(ay^2+b^2x)$.
5. প্রথমটিতে মিশ্রণের $\frac{1}{3}$ অংশ মদ এবং দ্বিতীয়টিতে $\frac{2}{3}$ অংশ মদ।

XVII

1. x^2+x+1. 2. $n(n-1)$. 5. 72. 6. $\frac{x^2-2x+3}{2x^2+5x-3}$.

XVIII

2. (i) $(7x-1)(2x-5)$. (ii) $2(a-c)(1-ac)$. (iii) $2m^2n(m+n)$.
3. 1920. 4. $a+b+c$. 6. $x=2, y=4, z=6$.

XIX

2. $ac - bc - b^2 + a^2$. 3. $mq : np$.

XX

3. $\frac{1}{abc}$. 4. $-(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$. 6. $x = c$.

অথবা, $= c - \frac{a+b}{2}$. 7. $x = \frac{b+c}{2a}$, $y = \frac{a+c}{2b}$, $z = \frac{a+b}{2c}$.

8. ঘণ্টায় যথাক্রমে 4 ও 3 মাইল ; $3\frac{1}{2}$ মাইল।

XXI

5. $(a-b)(a+3b-2c)$. 6. $x^2 - x + 3$.

XXII

4. 1020 গজ। 7. $x = b + c$, $y = a + c$, $z = a + b$.

XXIII

2. $(3x-1)(7x-2)(4x-1)$. 6. $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

XXIV

1. $x = a$, $y = b$, $z = c$. 2. 54, 81, 108.

নূতন নিয়মানুসারে, পরীক্ষা বঙ্গভাষায় হইলেও, প্রশ্নপত্র ইংরাজীতেই হইবে; সুতরাং, পরীক্ষার্থিগণের সুবিধার জন্য বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রশ্নপত্রাবলী ভাষান্তরিত না করিয়া ইংরাজীতেই প্রদত্ত হইল।

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রবেশিকা পরীক্ষার প্রশ্নপত্র

COMPULSORY PAPERS

1941

1. *Either*, (i) Factorize $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

(ii) If $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, show that $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}$.

Or, (iii) If $(x+a)$ be the H. C. F. of x^2+px+q and $x^2+p'x+q'$, show that $(p-p')a=q-q'$.

(iv) If $2s=a+b+c$, prove that $s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2$.

2. (i) Simplify $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

(ii) If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, show that $\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}=\frac{ce}{df}$.

3. *Either*, (i) Solve $\left(\frac{2x-10}{2x-5}\right)^2=\frac{x-10}{x-5}$.

Or, (ii) A person rowed down a river, a distance of 70 miles in 10 hours with the stream and rowed back again in 70 hours. Find the rate of the flow of the river per hour.

4. Draw the graphs of *any two* of the following equations :

(i) $x=\frac{2y+6}{3}$, (ii) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$, and (iii) $6x-7y=42$.

1942

1. Factorize, *Either*, (i) $a^2+b^2-c^2-2ab$. *Or*, (ii) $x^4+x^3+2x^2+x+1$.

(iii) If $a^2=b+c, b^2=c+a, c^2=a+b$, show that $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$.

2. *Either*, (i) Find the H. C. F. of

$$x^3-x^2-4x-2 \text{ and } x^5+3x^4-x^3-7x^2-5x-1.$$

(ii) Simplify $\frac{(s-a)^2}{(s-b)(s-c)}+\frac{(s-b)^2}{(s-c)(s-a)}+\frac{(s-c)^2}{(s-a)(s-b)}$, given $3s=a+b+c$.

Or, (iii) Solve $\frac{ax+a^2}{b+c}+\frac{bx+b^2}{c+a}+\frac{cx+c^2}{a+b}+a+b+c=0$.

(iv) If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, show that $\left(\frac{2a+3c+5e}{2b+3d+5f}\right)^3=\frac{ace}{bdf}$.

3. *Either*, (i) A man who went out between 3 P.M. and 4 P.M. and returned between 4 P.M. and 5 P.M. found that the hands of the clock had exactly changed places. When did he go out ?

Or, (ii) A general can arrange his regiment in a hollow square 3 deep ; if he had 800 more men he could have arranged them in a hollow square 4 deep with the same number of men in the front row ; find the number of men in the regiment.

4. Draw the graph of *any one* of the following equations :

(i) $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$, (ii) $2x+3y=6$, and (iii) $x=7(y+1)$.

1943

1. *Either*, (i) Find the value of $(x-y)^2$, when $x+y=3$ and $xy=2$.

(ii) Find the H. C. F. of x^3+4x^2+4x+3 and $x^3+8x^2+21x+18$.

Or, (iii) Express $x^2+2xy-z^2-2yz$ as the difference of two squares

(iv) If $a+b+c=0$, show that $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

2. (i) Solve $\frac{1}{2x+b}-\frac{1}{2x+a}=\frac{a-b}{4x^2+2ab}$.

(ii) If $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, show that $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(b^2-c^2)^2$.

3. *Either*, (i) A man bought an equal number of two kinds of mangoes, one kind at 2*as*. each and the other at 1*a*. 3*p*. each. If he had spent his money equally in the two kinds he would have had 9 mangoes more. How many of each kind did he buy ?

Or, (ii) A number consists of two digits. The digit in the tens' place is 3 times the digit in the unit's place. If 54 is subtracted from the number the digits are inverted. Find the number.

4. Draw the graphs of $y=5$ and $5x+6y=30$ and obtain their point of intersection.

1944

1. *Either*, (*a*) Factorize x^4+4x^2-12.

(*b*) Find the H. C. F. of x^3+3x^2-9x+5 and $x^3-19x+30$.

Or, (*c*) If $x=a+\frac{1}{a}$ and $y=a-\frac{1}{a}$, find the value of $x^4+y^4-2x^2y^2$.

(*d*) If $2s=a+b+c$, show that

$$s^2+(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=ab+bc+ca.$$

2. (*a*) Solve $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+7)}=\frac{x+5}{x+8}$.

(*b*) If $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, show that $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

3. *Either*, (*a*) A man who went out for an evening walk between 5 and 6 returned between 6 and 7 and found that the hands of the clock had exactly changed places. When did he go out ?

Or, (*b*) A person bought an article and sold it at a profit of 6 per cent. Had he bought it at 4 per cent. less and sold it at Rs. 2. 6*as*., more, his profit would have been 12 per cent. For how much did he buy it ?

4. Draw the graphs of *any two* of the following :

(*a*) $y=2x$; (*b*) $xy=7$; (*c*) $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1$.

1945

1. *Either*, (*a*) If $a+b+c=15$ and $a^2+b^2+c^2=77$, find the value of $ab+bc+ca$.

(*b*) If $ab+bc+ca=0$, show that

$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$$

Or, (*c*) If $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$, find the value of $x^3+\frac{1}{x^3}$.

(*d*) Find the H. C. F. of $2x^2-x-1$ and $3x^3-7x^2+4$.

2. (*a*) Factorize $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

(*b*) If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, prove that $\frac{a^2+ab+b^2}{c^2+cd+d^2}=\frac{a^2-ab+b^2}{c^2-cd+d^2}$.

3. *Either*, (*a*) The product of two numbers is 18225 and the quotient when the larger number is divided by the smaller is 81. Find the numbers.

Or, (*b*) At what time between 4 and 5 o'clock will the hands of a watch be at right angles to one another ?

4. Draw the graphs of *any two* of the following equations :

(*a*) $x-y=3$, (*b*) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ and (*c*) $7x-3y=21$.

1946

1. *Either*, (*a*) Express $a^2+2ab-2bc-c^2$ as the difference of two squares.

(*b*) Simplify $\frac{b+c-k}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a-k}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b-k}{(c-a)(c-b)}$.

Or, (*c*) If $a+b+c=0$, show that $a^2-bc=-(ab+bc+ca)$.

(*d*) Factorize $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$.

2. *Either*, (*a*) If $a+b=2c$, show that $\frac{a}{a-c}+\frac{c}{b-c}=1$.

(*b*) Solve $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$.

Or, (*c*) Find the H. C. F. of x^3-1 and x^5-1.

(*d*) If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, prove that $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$.

3. A number consists of two digits ; the digit in the tens' place is twice the digit in the unit's place ; if 36 be subtracted from the number the digits are inverted ; find the number.

4. Draw the graphs of *any two* of the following equations :

(*a*) $y-2x=7$; (*b*) $y=5$; (*c*) $x=6y$.

1947

1. *Either*, (i) Simplify $\frac{a^2(b-c)}{(b+a)(a+c)}+\frac{b^2(c-a)}{(c+b)(b+a)}+\frac{c^2(a-b)}{(a+c)(c+b)}$.

Or, (ii) If $x=\frac{4ab}{a+b}$, find the value of $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}$.

2. *Either*, (i) If $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{2}{a+b}$, prove that $a^2+b^2=2c^2$.

Or, (ii) Solve $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$.

3. *Either*, (i) Find the H. C. F. of $6x^2+xy-15y^2$ and $21x^2+41xy+10y^2$.

Or, (ii) If $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$, prove that $xyz(x+y+z)^3=(xy+yz+zx)^3$.

4. *Either*, (i) Factorize $4(x^2+2x+5)^2+17(x^2+2x+5)(x^2+6x)+4(x^2+6x)^2$.

Or, (ii) The age of a father ten years ago was thrice the age of his son ten years hence the father's age will be twice that of his son. Find the present age of the father.

5. Draw the graphs of *any two* of the following equations :
(*a*) $3x-4y=2$. (*b*) $x+y=10$. (*c*) $2x=3y$.

1948

1. *Either*, (*a*) Factorize $a^3+b^3+c^3-3abc$.

(*b*) Find the value of $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}$, when $x=\frac{2ab}{a+b}$.

Or, (*c*) Find the H. C. F. of $3x^2+13x+10$ and $3x^3+18x^2+33x+18$.

(*d*) Simplify $\frac{a^2(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(a+b)}{(c-a)(c-b)}$.

2. *Either*, (*a*) If $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$,

find the value of $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$.

(*b*) Solve $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}$.

Or, (*c*) If $a+\frac{1}{b}=1$ and $b+\frac{1}{c}=1$, show that $c+\frac{1}{a}=1$.

(*d*) If $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, show that $\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}=\frac{a}{c}$.

3. *Either*, (*a*) A general can arrange his men in a hollow square 5 deep. If the total number of men in it be 1900, find the number of men in the front row.

Or, (*b*) Find the time between 1 and 2 o'clock when the hands of a clock are at right angles.

4. Draw the graphs of *any two* of the following equations :
(*a*) $2y-x=7$. (*b*) $x=5$. (*c*) $4x=3y$.

1949

1. *Either*, (*a*) Factorize $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

(*b*) Find the value of $x^3+y^3+z^3-3xyz$, when $x+y+z=5$ and $xy+yz+zx=10$.

Or, (*c*) Express ab as the difference of two squares.

(*d*) If $a^2=b+c$, $b^2=c+a$, $c^2=a+b$, show that

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1.$$

2. *Either*, (*a*) Simplify $\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x}}}}$

(*b*) Find the H. C. F. of $a^5+11a-12$ and a^5+11a^3+54.

Or, (*c*) If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, show that $\frac{ac}{bd}=\frac{4a^2+5c^2}{4b^2+5d^2}$.

(d) Solve $\frac{(x+2)(x+6)}{(x+4)(x+5)}=\frac{x+8}{x+9}$.

3. *Either*, (a) A number consists of three digits each less by unity than that ich follows it ; if 27 be subtracted from the number, the remainder is 16 times sum of the digits. Find the number.

Or, (b) P and Q start at the same time from Howrah and Madhupur and peed towards each other at the rate of 20 and 30 miles respectively. They meet n Q has proceeded 36 miles farther than P. Find the distance between Howrah Madhupur.

4. Draw the graphs of *any two* of the following equations :

(a) $3x+4y=12$. (b) $x-y=5$. (c) $3y=2x$.

1950

1. *Either*, (a) Factorize $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$.

(b) Express $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ as the sum of two squares.

Or, (c) Solve the equation $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}=\frac{2}{x+b}$.

(d) If $a+b+c=8$ and $a^2+b^2+c^2=30$, find the value of $a^3+b^3+c^3-3abc$.

2. *Either*, (a) Find the L. C. M. of $6x^3+11x^2+6x+1$ and $4x^3-7x-3$.

(b) If $a+b+c=0$, show that $a^5+b^5+c^5=\frac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)$.

Or, (c) The denominator of a fraction exceeds the numerator by 2, and if the nerator be increased by 7, the fraction is increased by unity ; find the fraction.

(d) Simplify $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x^3}{x^4+1}+\frac{8x^7}{x^8+1}$.

3. Draw the graphs of *any two* of the following equations :

(a) $3x-7y=10$. (b) $x+y+3=0$. (c) $y=4x+3$.

1951

1. *Either*, (a) Factorize : (i) $12+x-20x^2$. (ii) $8a^3+27b^3$.

(b) Find the H.C.F. of $x^2+3x-10$ and $x^3-x^2-14x+24$.

Or, (c) Find the simplest value of

$$1{\cdot}34\times1{\cdot}34\times1{\cdot}34+8{\cdot}66\times8{\cdot}66\times8{\cdot}66+30\times1{\cdot}34\times8{\cdot}66.$$

(d) Solve $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-8}$.

2. *Either*, (a) If $bc+ca+ab=0$, prove that $\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0$.

(b) A monarch ascended the throne at the age of 32 and lived to reign $\frac{5}{13}$ of his life. Find at what age the monarch died.

Or, (c) Simplify $\frac{b+c-a}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a-b}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b-c}{(c-a)(c-b)}$.

(d) 20 years ago a father was four times as old as his son and 4 years hence ll be twice as old as his son. What are the present ages of the father and on ?

3. Draw the graphs of the equations $3x+2y=8$ and $4x-3y=5$ and find their of intersection.

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা-পর্ষদের স্কুল ফাইনাল পরীক্ষার প্রশ্নপত্র

1952

1. *Either*, (*a*) Factorize : (i) $2x^2+x-15$. (ii) x^4+64.

(*b*) Find the L. C. M. of $x^2(x^2-4)$ and $x^4+2x^3-8x^2$.

Or, (*c*) Find the value of $xy+yz+zx$, when $x+y+z=9$ and $x^2+y^2+z^2=31$.

(*d*) Solve $\frac{a}{bx}-\frac{b}{ax}=a^2-b^2$.

2. *Either*, (*a*) Find the square root of $x^4-2x^3+11x^2-10x+25$.

(*b*) If $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{c}$, prove that $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Or, (*c*) If $a+b+c=0$, prove that, $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0$.

(*d*) A number consists of two digits, the sum of the digits being 5. If 9 be added to the number, the digits are reversed. Find the number.

3. Draw the graphs of $x+y=2$ and $x=y$. Measure their angle of intersection, and determine the point where they meet.

1953

1. (*a*) Factorize : (i) $3x^2+14x+8$. (ii) $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$.

(*b*) If $x=\frac{4ab}{a+b}$, find the value of $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}$.

Or, (*c*) Find the H.C.F. of $x^2+9x+14$ and $x^3+10x^2+31x+30$.

(*d*) If $2s=a+b+c$, show that

$$s^2+(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=ab+bc+ca.$$

2. (*a*) Solve: (i) $\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}+\frac{x-ab}{a+b}=a+b+c$.

(ii) $3x+4y=11$; $5x-2y=1$.

(*b*) If $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, prove that $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2$.

Or, (*c*) If $x+y=2z$, then show that

$$\frac{x}{x-z}+\frac{z}{y-z}=1.$$

(*d*) A father's age is four times that of his elder son and five times that of his younger son ; when the elder son has lived to three times his present age the father's age will exceed twice that of his younger son by 4 years. Find their present ages.

3. Draw the graph of the equation $2y-3x=7$. From the graph find, by measurement, the value of y when $x=2\frac{1}{3}$ and the value of x when $y=3\frac{1}{2}$.

1954

1. *Either*, (*a*) Resolve into factors :

(i) x^2-y^2+2x+1. (ii) $2x^2-x-10$.

(*b*) Find the H.C.F. of

$$3x^3+11x^2+13x+5 \text{ and } 3x^3+12x^2+16x+7.$$

Or, (c) Simplify

$$\frac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2}+\frac{(b-c)^2-a^2}{b^2-(c+a)^2}+\frac{(c-a)^2-b^2}{c^2-(a+b)^2}.$$

(d) If $a+b+c=0$, prove that $a^3+b^3+c^3=3abc$.

2. *Either*, (a) Solve :

(i) $\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-13}-\frac{1}{x-11}$.

(ii) $x+3y=9$, $4x+y=14$.

(b) If $(b+c-a)x=(c+a-b)y=(a+b-c)z=2$, show that

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=abc.$$

Or, (c) If $a:b=b:c=c:d$, show that $(d-a)^2=(d-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

(d) A number consists of two digits, the tens' digit being twice the unit's. If the digits are interchanged, the number is diminished by 18. Find the number.

3. Using the same unit and axes of reference, draw the graphs of the following two equations, and from the graphs find the co-ordinates of their point of intersection :—

(i) $y=x+2$. (ii) $2x-y=1$.

(At least three points should be plotted for each graph.)

1955

1. Answer *either* (i) and (ii), *or* (iii) and (iv) :

(i) Resolve into factors :

(a) $5-4x-x^2$; (b) $a^2-b^2+4bc-4c^2$.

(ii) Find the value of $\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}$ when $x=\frac{a^2}{a-b}$.

(iii) Find the H. C. F. of :

$x^2+3x-10$ and $x^3-x^2-14x+24$.

(iv) If $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=0$, show that $a=b=c$.

2. Answer *either* (i) and (ii), *or* (iii) and (iv) :

(i) Solve : (a) $\frac{a-x}{a}+\frac{2a-x}{2a}=\frac{3a-x}{3a}$;

(b) $2x-y=5$, $3x+2y=11$.

(ii) A labourer is engaged for 30 days on condition that he receives 2*s*. 6*d*. for each day he works, and loses 1*s*. for each day he is idle ; he receives £2. 7*s*. in all. For how many days is he idle ?

(iii) If $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, show that $\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{xyz}{abc}$.

(iv) If $bc+ca+ab=0$, prove that $\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0$.

3. Using the same unit and the same axes of reference, draw the graphs of the following two equations, plotting at least *three* points for each graph, and from the graphs find the co-ordinates of their point of intersection :

(i) $x+2y=12$, (ii) $x-3y=2$.

গৌহাটী বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রবেশিকা পরীক্ষার প্রশ্নপত্র

COMPULSORY PAPERS

1950

1. *Either*, (*a*) If $x+\dfrac{1}{x}=p$, express $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ in terms of p.

(*b*) Find the H.C.F. of $3x^3+11x^2+13x+5$ and $3x^3+12x^2+16x+7$.

Or, (*c*) Find the L.C.M. of x^2-3x+2, x^2-4x+3 and x^2-5x+6.

(*d*) If $a+b+c=0$, show that $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$.

2. *Either*, (*a*) Simplify $\dfrac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2}+\dfrac{(b-c)^2-a^2}{b^2-(c+a)^2}+\dfrac{(c-a)^2-b^2}{c^2-(a+b)^2}$.

(*b*) If $x:a=y:b=z:c$, prove that $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$.

Or, (*c*) If $x(b+c-a)=y(c+a-b)=z(a+b-c)=t(a+b+c)$, show that

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{t}.$$

(*d*) If $x=\dfrac{2ab}{a+b}$, find the value of $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}$.

3. *Either*, (*a*) Solve $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=3$.

(*b*) Solve the equations : $5x+7y=59$, $7x+5y=49$.

Or, (*c*) A number consists of two digits whose sum is 9. If 9 be added to the number, the digits are inverted. Find the number.

(*d*) A motorist does a journey of 80 miles in 6 hours. During the first part of the journey he travels at the rate of 10 miles per hour and during the second and last part at 18 miles an hour. How far does he travel at each rate ?

4. Draw the graphs of *any two* of the following equations :

(i) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$; (ii) $2x=3y$; (iii) $x=5$.

1951

1. *Either*, (*a*) Resolve into factors $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$.

(*b*) Solve $\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{x}{x-b}=2$.

Or, (*c*) Simplify $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2x}{x^2+y^2}+\dfrac{4x^3}{x^4+y^4}$.

(*d*) If $1+x+x^2=0$, show that $(a+bx+cx^2)+(ax+bx^2+c)+(ax^2+b+cx)=0$.

2. *Either*, (*a*) Find the H.C.F. of

$$3x^4+20x^3-3x^2+6x+1 \text{ and } x^4+7x^3-x^2-14x-2.$$

(*b*) If $a:b=b:c=c:d$, prove that $(d-a)^2=(d-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

Or, (*c*) Solve the equations :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$
$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1.$$

(*d*) A boat takes 10 hours to go upstream 30 miles and downstream 44 miles. If it takes 13 hours to go upstream 40 miles and downstream 55 miles, find the velocities of the stream and the boat.

3. Draw the graphs of *any two* of the following equations :

(i) $\frac{x}{5}-\frac{y}{7}=1$; (ii) $y=4x+3$; (iii) $3x+4y=24$.

1952

1. *Either*, (*a*) Factorize : (i) x^2+x-20 ; (ii) x^2-y^2+2x+1.

(*b*) Solve $\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-13}-\frac{1}{x-11}$.

Or, (*c*) Simplify $\frac{127\times127\times127-123\times123\times123}{127\times127+127\times123+123\times123}$.

(*d*) Find the L.C.M. of $3x^2+5x+2$, $9x^2-4$ and $3x^2+x-2$.

2. *Either*, (*a*) If $a+b+c=0$, prove that $a^3+b^3+c^3=3abc$.

(*b*) If $a:b=c:d$, show that $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$.

Or, (*c*) If $(b+c-a)x=(c+a-b)y=(a+b-c)z=2$, show that

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=abc.$$

(*d*) Divide 20 into two parts such that the difference of their squares is 160.

3. Draw the graphs of *any two* of the following equations :

(i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$; (ii) $y=2x+3$; (iii) $x=5$.

1953

1. *Either*, (*a*) Factorize : (i) $3x^2+10x+8$; (ii) $x^4+x^2y^2+y^4$.

(*b*) Show that

$(3x+2y)^3-(2x+3y)^3-3(3x+2y)(2x+3y)(x-y)$ is a perfect cube.

Or, (*c*) Simplify $\frac{28573\times28573-13569\times13569}{28573+13569}$.

(*d*) Find the H.C.F. of x^2+3x+2 and $3x^3+11x^2+13x+5$.

3. *Either*, (*a*) Solve $\frac{2}{(x-2)(x-3)}+\frac{3}{(x-3)(x-1)}+\frac{4}{(x-1)(x-2)}=0$.

(*b*) If $x+y+z=1$, show that $(x+yz)(y+zx)(z+xy)=(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2$.

Or, (*c*) If $a:b=b:c$, show that $a^2+b^2:ab+bc=ab+bc:b^2+c^2$.

(*d*) A number consists of two digits, the tens' digit being twice the unit's. If the digits are interchanged, the number is diminished by 18. Find the number.

3. Using same axes, same units, and plotting at least *three* points for *each*, draw the graphs of the following equations :

(i) $y=x+2$ and (ii) $2x-y=1$;

and find, from the graphs, the co-ordinates of their point of intersection.

ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রবেশিকা পরীক্ষার প্রশ্নপত্র

COMPULSORY PAPERS

1947

1. (a) Resolve into factors : (i) $-a^3-27b^3$. (ii) $27x^3-8y^3-64-72xy$.

(b) Simplify $\frac{1}{x^2-7x+12}-\frac{1}{x^2-x-12}$.

2. (a) Find the value of c, so that $x^3-10x^2+31x-c$ may be exactly divisible by $x-2$ and $x-5$.

(b) Solve the equation $\frac{2}{x-a}+\frac{3}{x+a}=\frac{9a}{x^2-a^2}$.

3. (a) Find the L.C.M. of a^3b-ab^3, $a^2+ab-2b^2$ and $a^2-ab-2b^2$.

(b) Find the H.C.F. of $2x^3-4x^2-6x$ and $3x^5-6x^4-6x^3-9x^2$.

4. A person starts walking from a certain place at 5 miles per hour. Draw the graph of his motion and determine from the graph the time taken by him in covering a distance of $12\frac{1}{2}$ miles.

5. (a) If $a:b=c:d$, show that $3a+2b:4a+5b=3c+2d:4c+5d$.

(b) What number must be added to each of the numbers 3, 5, 7, 10 to give four numbers in proportion ?

6. (a) Solve graphically $2x+3y=4$, $3x-2y=-7$.

(b) Find a fraction such that if 1 be subtracted from the numerator, the value will be $\frac{2}{3}$ and if 6 be added to the denominator, its value will be $\frac{1}{2}$.

1948

1. *Either*, (a) If $x+\frac{1}{x}=4$, find the values of $x^2+\frac{1}{x^2}$ and $x^3+\frac{1}{x^3}$.

Or, (b) Simplify $\frac{a^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{b^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^2}{(b-c)(c-a)}$.

2. *Either*, Factorize

(a) $5x^2-7x-6$. (b) $x^2-y^2-6xa+2ya+8a^2$.

Or, (c) If $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$, prove that $\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+d}$.

(d) If $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$, prove that $\frac{p+q}{p-q}=\frac{r+s}{r-s}$.

3. (a) Solve (i) $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}=1$. (ii) $\frac{x+a}{b+c}+\frac{x+b}{c+a}+\frac{x+c}{a+b}+3=0$.

(b) $\frac{1}{2}$ of a post is under mud, $\frac{1}{3}$ of its length is under water and the part that stands above the water level is 2 ft. long. Find the entire length of the post.

4. *Either*, (a) Find the H. C. F. of x^2-3x+2, $3x^2-2x-8$ and $2x^2-9x+10$.

(b) Find the L. C. M. of $12(x^2-4x+3)$ and $16(x^2-5x+6)$.

Or, (c) Draw the graphs of the equations :

(i) $4x+3y-12=0$. (ii) $5x-4y-20=0$.

1949

1. (a) *Either*, Resolve into factors :

(i) $2a^2+2a-3ab-b+b^2$. (ii) $(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$.

Or, (b) Find the H.C.F. of $3x^3-7x^2+4$, x^3-2x^2-x+2 and $2x^3-3x^2+1$.

(c) Draw the graphs of the equations $x-y=3$, and $3x+2y=14$; and find from the graphs the values of x and y which satisfy both the equations.

2. (a) *Either*, Simplify $\frac{b+c-k}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a-k}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b-k}{(c-a)(c-b)}$.

Or, (b) If $xy+yz+zx=0$, show that $\frac{1}{x^2-yz}+\frac{1}{y^2-zx}+\frac{1}{z^2-xy}=0$.

(c) If $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$, prove that $\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$.

3. (a) *Either*, Solve the equations :

(i) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$. (ii) $2x-y=20$, $3y-z=13$, $4z-3x=23$.

Or, (b) Find the fraction which becomes $\frac{1}{2}$ when 1 is added to its denominator and $\frac{1}{3}$ when 2 is subtracted from its numerator.

1950

1. (a) Simplify $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

(b) Factorize : (i) $2x^2+5xy+2y^2$. (ii) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$.

2. Solve : (a) $\frac{a-x^2}{bx}-\frac{b-x}{c}=\frac{c-x}{b}-\frac{b-x^2}{cx}$.

(b) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=m$; $\frac{b}{x}+\frac{a}{y}=n$.

3. (a) Show that $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

(b) If $a:b=c:d$, prove that $(ab+cd)$ is a mean proportional between a^2+c^2 and b^2+d^2.

4. Solve graphically the following simultaneous equations

$$4x-5y=2;\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=4.$$

পূর্ব্ববঙ্গ মাধ্যমিক শিক্ষাবোর্ডের প্রবেশিকা পরীক্ষার প্রশ্নপত্র

1950

1. (a) *Either*, Resolve into factors :

(i) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2$. (ii) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

Or, (b) Simplify $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

(c) If $a+b+c=0$, show that $ab+bc+ca=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

2. (a) If $\frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}$, show that

$$\frac{a(b-c)}{y^2-z^2}=\frac{b(c-a)}{z^2-x^2}=\frac{c(a-b)}{x^2-y^2}.$$

(b) *Either*, If $x-a$ be the H. C. F. of x^2-px+q and $x^2-p^1x+q^1$, prove that $a(p-p^1)=q-q^1$.

Or, (c) Draw the graphs of $x=y+1$ and $2y=3x-5$, and write down the co-ordinates of their point of intersection.

3. *Either*, (a) Solve the equations

(i) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-6}{x+3}=2$.

(ii) $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=13$, $\frac{7}{x}+\frac{3}{y}=27$.

Or, (b) Find the fraction which is doubled when 2 is added to both its numerator and denominator, and trebled when 8 is added to both its numerator and denominator.

1951

1. (a) Show that $\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)^2=\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}$.

(b) If $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$, prove that $x^3+\frac{1}{x^3}=0$.

Or, (c) If $\frac{x}{y}=\frac{a+2}{a-2}$, find the value of $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

2. (a) Resolve into factors

(i) $a^2+2ab+b^2-3a-3b$. (ii) $x^2-49x+600$.

Or, (b) Find the H.C.F. of $3x^5-5x^3+2$ and $2x^5-5x^2+3$.

(c) Draw the graph of $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$, and find the co-ordinates of its points of intersection with the axes.

3. (a) Solve the equations

(i) $\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-9}$. (ii) $ax+by=1$, $bx+ay=\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}-1$.

Or, (b) A reduction of $12\frac{1}{2}\%$ in the price of salt enables a man to buy 2 seers more for Re. 1. 12as. Find the original price of salt per seer.

দর
হাঃ।